Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 2, 201 – 218

Колмогоровские поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ в метрике пространства L_∞

Анатолий С. Романюк

(*Представлена В. П. Моторным*)

Аннотация. Получены порядковые оценки колмогоровских поперечников классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в равномерной метрике.

2000 MSC. 41A46, 42A10.

Ключевые слова и фразы. колмогоровский поперечник, классы Бесова, сумма Фурье, периодическая функция, тригонометрический полином.

Введение

В настоящей работе продолжаются (см. [1]–[3]) исследования колмогоровских поперечников классов Бесова $B^r_{p,\theta}$, периодических функций многих переменных в пространстве L_q. Здесь мы устанавливаем порядковые оценки колмогоровских поперечников классов $B^r_{p,\theta}$ в равномерной метрике. Для формулировки и доказательства полученных результатов нам понадобится привести необходимые обозначения и определения.

Пусть R^d обозначает d — мерное пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, $(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_dy_d$, и $L_p(\pi_d)$; $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$, — пространство 2π-периодических по каждому аргументу функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess}\sup_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty,$$

Статья поступила в редакцию 7.07.2004

$$L_p^o(\pi_d) = \left\{ f : f \in L_p(\pi_d), \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx_j = 0, \quad j = \overline{1,d} \right\}.$$

Для функции $f \in L_p^o(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$ рассмотрим разность первого порядка по j-й переменной с шагом h

$$\triangle_{h,j} f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1},\, x_j + h,\, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x)$$

и определим разность l-го порядка

$$\triangle_{h,j}^{l} f(x) = \overbrace{\triangle_{h,j} \dots \triangle_{h,j}}^{l} f(x)$$

в точке x_j с шагом h. Далее, если $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in N, j = \overline{1,d}$, то смешанная разность порядка k с векторным шагом $h = (h_1, \dots, h_d)$ определяется следующим образом:

$$\triangle_h^k f(x) = \triangle_{h_1,1}^{k_1} \dots \triangle_{h_d,d}^{k_d} f(x).$$

Пусть заданы вектор $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$ и параметры $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le \ p \le \infty$. Функция $f \in L_p^o(\pi_d)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, если

$$\left(\int\limits_{\pi_d} \|\triangle_h^k f(x)\|_p^\theta \prod_{j=1}^{d} \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{1/\theta} \le 1, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\sup_h \|\triangle_h^k f(x)\|_p \prod_{j=1}^{d} h_j^{-r_j} \le 1, \quad \theta = \infty.$$

Отметим, что при этом для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ и $r = (r_1, \dots, r_d)$ предполагаются выполненными неравенства $k_j > r_j$, $j = \overline{1,d}$.

Классы $B_{p,\theta}^r$ введены О. В. Бесовым [4]; при $\theta = \infty \quad B_{p,\infty}^r = H_p^r$, где H_p^r — классы, введенные С. М. Никольским (см., например, [5, с. 189]).

Ниже, при изложении результатов, нам будет удобнее пользоваться несколько другим определением классов $B_{p,\theta}^r$.

Для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in Z$ и $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in N$, $j = \ \overline{1,d}$, положим

$$\rho(s) = \{k : k = (k_1, \dots, k_d),\, 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}\}$$

и для $f \in L_p^o(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \widehat{f}(k)\, e^{i(k,x)},$$

где $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t)\, e^{-i(k,\,t)}\, dt$ — коэффициенты Фурье $f(x)$.

Пусть сначала $1 < p < \infty$ и $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$. Тогда классы $B^r_{p,\theta}$ можно определить следующим образом (см., например, [6]):

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x) : \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta}\, \|\delta_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\},\ 1 \le \theta < \infty,$$

$$B^r_{p,\infty} = \left\{ f(x) : \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)}\, \|\delta_s(f,x)\|_p \le 1 \right\} \tag{1}$$

Для того, чтобы в этих определениях классов $B^r_{p,\theta}$ охватить крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$, нужно в (1) несколько видоизменить “блоки” $\delta_s(f,x)$.

Пусть $V_l(t)$, $l \in N$ обозначает ядро Валле Пуссена порядка $2\,l - 1$:

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l} \right) \cos kt$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1,d}$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j) \right)$$

и для $f \in L_p^o(\pi_d)$ обозначим

$$A_s(f,x) = f(x) * A_s(x),$$

где “$*$” — операция свертки. Тогда при $1 \le p \le \infty$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, r$_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, классы $B^r_{p,\theta}$ определяются следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(x) : \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta}\, \|A_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\},\ 1 \le \theta < \infty,$$

$$B^r_{p,\infty} = \{ f(x) : \|f\|_{B^r_{p,\infty}} = \sup_s 2^{(s,r)}\, \|A_s(f,x)\|_p \le 1 \}.$$

Всюду ниже будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \ldots, r_d)$, участвующих в определениях классов, упорядочены в виде $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$. Вектору $r = (r_1, \ldots, r_d)$

сопоставим вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1,d}$, которому, в свою очередь, сопоставляется вектор $\gamma' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_d')$, где $\gamma_j = \gamma_j'$ при $j = \overline{1,\nu}$ и $1 < \gamma_j' < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$. Если A — конечное множество, то $|A\,|$ обозначает количество его элементов.

Напомним определение колмогоровского поперечника, который будет нами исследоваться. Пусть Φ — центрально-симметричное множество банахова пространства $\mathcal{X}$.

Тогда величина

$$d_M(\Phi, \mathcal{X}) = \inf_{L_M} \sup_{f\in\Phi} \inf_{a\in L_M} \|f - a\,\|_{\mathcal{X}},$$

где L_M — подпространство размерности M пространства $\mathcal{X}$, называется M — мерным колмогоровским поперечником множества Φ в пространстве $\mathcal{X}$ [7].

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений: функции $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ называем функциями одного порядка и пишем $\mu_1 \asymp \mu_2$, если существуют постоянные $0 < C_1 \le C_2$ такие, что $C_1\mu_2(N) \le \mu_1(N) \le C_2\mu_2(N)$. Аналогично определяются порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Все постоянные C_i, $i = 1, 2, \ldots$, которые будут встречаться в процессе доказательств, могут зависеть только от параметров, определяющих классы, от метрики, в которой измеряется погрешность приближения, и от размерности пространства R^d.

1. Оценки величин $d_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $r_1 > \max\{\frac{1}{p}; \frac{1}{2}\}$. *Тогда при* $1 \le \theta < \infty$ *имеет место оценка*

$$(M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}(\log^{\nu-1} M)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} \ll d_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) \ll$$
$$\ll (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}(\log^{\nu-1} M)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\sqrt{\log M}, \quad (2)$$

где $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доказательство. Получим сначала оценку сверху в случае $p = 2$. С этой целью определим множества векторов $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_i \in N$, $i = \overline{1,d}$ вида

$$S_j = \big\{s = (s_1, \ldots, s_d),\, j \le (s, \gamma') < j+1,\, j \in N \text{ и } j \ge d\big\}.$$

Тогда для количества элементов множеств $Q_j = \bigcup\limits_{s\in S_j} \rho(s)$, в силу соотношения (см. [8, с. 11])

$$\sum_{(s,\gamma)\le n} 2^{(s,\delta)} \ll 2^n n^{\nu-1},$$

$$1=\gamma_1=\delta_1=\ldots=\gamma_\nu=\delta_\nu,\ 1<\delta_j\le\gamma_j,\ j=\overline{\nu+1,d},$$

можем записать оценку

$$|Q_j| = \sum_{j\le(s,\gamma')<j+1} 2^{(s,1)} \ll 2^j j^{\nu-1}.$$

Далее, по заданному натуральному числу M подберем $l\in N$ таким, чтобы выполнялось соотношение $2^l l^{\nu-1}\asymp M$ и положим

$$M_j = \begin{cases} 2^j j^{\nu-1}, & d\le j\le l,\\ \left[2^{l(r_1+\frac12)} l^{\nu-1} 2^{-j(r_1-\frac12)}\right]+1, & l+1\le j<\alpha l,\end{cases}$$

где $\alpha=\frac{r_1+\frac12}{r_1-\frac12}$, а $[\,b\,]$ — целая часть числа b.

Тогда

$$\sum_{j=d}^{\infty} M_j \ll \sum_{j=d}^{l} 2^j j^{\nu-1} + \sum_{l<j\le\alpha l} 2^{l(r_1+\frac12)} l^{\nu-1} 2^{-j(r_1-\frac12)} \ll$$
$$\ll 2^l l^{\nu-1} + 2^{l(r_1+\frac12)} l^{\nu-1} \sum_{l<j\le\alpha l} 2^{-j(r_1-\frac12)} \ll$$
$$\ll 2^l l^{\nu-1} + 2^{l(r_1+\frac12)} l^{\nu-1} 2^{-l(r_1-\frac12)} = 2^l l^{\nu-1} + 2^l l^{\nu-1} \asymp 2^l l^{\nu-1} \asymp M.$$

Пусть $f\in B^r_{2,\theta}$, $1\le\theta\le2$. В таком случае согласно неравенству [9, с. 43]

$$\left(\sum_k |a_k|^{\mu_2}\right)^{1/\mu_2} \le \left(\sum_k |a_k|^{\mu_1}\right)^{1/\mu_1}, \quad 1\le\mu_1\le\mu_2<\infty,$$

можем записать

$$\Big\|\sum_{s\in S_j}\delta_s(f,x)\Big\|_2 = \left(\sum_{s\in S_j}\|\delta_s(f,x)\|_2^2\right)^{1/2} \le$$
$$\le 2^{-jr_1}\left(\sum_{s\in S_j} 2^{(s,r)\theta}\|\delta_s(f,x)\|_2^{\theta}\right)^{1/\theta} \ll 2^{-jr_1}\|f\|_{B^r_{2,\theta}} \le 2^{-jr_1} \quad (3)$$

Если же $2 < \theta < \infty$, то воспользовавшись сначала неравенством Гельдера с показателем $\theta/2$, а затем соотношением

$$\sum_{(s,\gamma')\geq n} 2^{-\alpha(s\,\gamma)} \asymp 2^{-\alpha\, n} n^{\,\nu-1}, \alpha > 0, \tag{4}$$

(см. [8, с. 11]), будем иметь

$$\Big\| \sum_{s\in S_j} \delta_s(f,x) \Big\|_2 = \Big(\sum_{s\in S_j} \|\, \delta_s(f,x)\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq \Big(\sum_{s\in S_j} 2^{(\,s,\,r)\theta} \|\, \delta_s(f,x)\|_2^{\theta} \Big)^{\frac{1}{\theta}} \Big(\sum_{s\in S_j} 2^{-2(\,s,\,r)\theta/(\theta-2)} \Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \ll$$
$$\ll \Big(\sum_{s\in S_j} 2^{-2(\,s,\,r)\theta/(\theta-2)} \Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \|f\,\|_{B^r_{2,\,\theta}} \ll 2^{\,-j\,r_1}\, j^{\,(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{5}$$

Таким образом, для $f \in B^r_{2,\,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, согласно (3) и (5), можем записать

$$\Big\| \sum_{s\in\, S_j} \delta_s(f,x) \Big\|_2 \ll 2^{\,-j\,r_1}\, j^{\,(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{6}$$

Далее подмножество тригонометрических полиномов вида

$$t(x) = \sum_{s\in S_j} \delta_s(f,x),$$

для которых выполняется (6), будем обозначать $B^r_{2,\,\theta}(j)$.

В последующих рассуждениях нам понадобится оценка величины

$$\mathcal{J} = \Big\| \sum_{(s,\gamma'\,)\geq\alpha\, l} \delta_s(f,x) \Big\|_\infty, \quad f \in B^r_{2,\,\theta},$$

при установлении которой используется неравенство разных метрик, доказанное С. М. Никольским [10]. Для удобства приведем соответствующее утверждение.

Теорема A. *Пусть* $n = (n_1, \ldots, n_d)$, n_j *— целые неотрицательные числа,* $j = \overline{1,d}$ *и*

$$t(x) = \sum_{|k_j|\leq n_j} c_k\, e^{i\,(k,x)}.$$

Тогда при $1 \le q < p \le \infty$ *имеет место неравенство*

$$\| t \|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} n_j^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \| t \|_q. \tag{7}$$

Итак, пусть $1 < \theta < \infty$. Тогда, применив к $\delta_s(f,x)$, как к полиному степени 2^{s_j} по переменной x_j неравенство (7), и затем, воспользовавшись неравенством Гельдера и соотношением (4), будем иметь

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \Big\| \sum_{(s,\gamma')\ge\alpha l} \delta_s(f,x) \Big\|_\infty \le \sum_{(s,\gamma')\ge\alpha l} \|\delta_s(f,x)\|_\infty \ll \\ &\ll \sum_{(s,\gamma')\ge\alpha l} 2^{\frac{\|s\|_1}{2}} \|\delta_s(f,x)\|_2 = \sum_{(s,\gamma')\ge\alpha l} 2^{\|s\|_1 r_1} \|\delta_s(f,x)\|_2 2^{\|s\|_1 (\frac{1}{2}-r_1)} \le \\ &\le \Big(\sum_{(s,\gamma')\ge\alpha l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f,x)\|_2^\theta \Big)^{\frac{1}{\theta}} \Big(\sum_{(s,\gamma')\ge\alpha l} 2^{\|s\|_1 (\frac{1}{2}-r_1)\theta'} \Big)^{\frac{1}{\theta'}} \le \\ &\le \|f\|_{B^r_{2,\theta}} \Big(\sum_{(s,\gamma')\ge\alpha l} 2^{\|s\|_1 (\frac{1}{2}-r_1)\theta'} \Big)^{\frac{1}{\theta'}} \le 2^{-\alpha l (r_1-\frac{1}{2})} l^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})},\end{aligned} \tag{8}$$

где $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$.

В случае $\theta = 1$ имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &\le \sum_{(s,\gamma')\ge\alpha l} \|\delta_s(f,x)\|_\infty \ll \\ &\ll \sum_{(s,\gamma')\ge\alpha l} 2^{(s,r)} \|\delta_s(f,x)\|_2 2^{\|s\|_1 (\frac{1}{2}-r_1)} \ll \\ &\ll 2^{-\alpha l (r_1-\frac{1}{2})} \|f\|_{B^r_{2,1}} \le 2^{-\alpha l (r_1-\frac{1}{2})}.\end{aligned} \tag{9}$$

Принимая во внимание значение α, из (8) и (9) приходим к оценке

$$\Big\| \sum_{(s,\gamma')\ge\alpha l} \delta_s(f,x) \Big\|_\infty \ll 2^{-l(r_1+\frac{1}{2})} l^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}, \quad 1 \le \theta < \infty. \tag{10}$$

Таким образом, согласно определению колмогоровского поперечника, выбору чисел M_j и оценке (10) можем записать

$$d_M(B^r_{2,\theta}, L_\infty) \ll \sum_{d\le j<\alpha l} d_{M_j}(B^r_{2,\theta}(j), L_\infty) + 2^{-l(r_1+\frac{1}{2})} l^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{11}$$

Для последующей оценки правой части (11) понадобится вспомогательное утверждение, которое нам будет удобно сформулировать, несколько видоизменив определение колмогоровского поперечника.

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ банаховы пространства, $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ — единичный шар в $\mathcal{X}$ и $\mathcal{S}$ — компактный оператор, действующий из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Обозначим через $L_M(\mathcal{Y})$ множество всех линейных подпространств размерности не более M данного банахова пространства $\mathcal{Y}$. Тогда (см. например, [11, с. 123]) величины

$$d_M(\mathcal{S};\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \inf_{L_M(\mathcal{Y})} \sup_{x\in\mathcal{B}_{\mathcal{X}}} \inf_{y\in L_M(\mathcal{Y})} \|\mathcal{S}x-y\|_{\mathcal{Y}}$$

называются поперечниками по Колмогорову.

Пусть далее $L_q(\Omega_N)$ — банахово пространство, состоящее из тригонометрических полиномов вида

$$T(\Omega_N;x) = \sum_{k=1}^{N} c_k\, e^{i(n_k,x)}$$

с вещественными коэффициентами по заданному набору из N экспонент, и

$$\|T(\Omega_N;x)\| = \|T(\Omega_N;x)\|_{L_q(\pi_d)}.$$

В [12], как следствие одного более общего результата, получено следующее

Предложение. *Пусть $\mathcal{S}$ — оператор вложения из $L_2(\Omega_N)$ в $L_\infty(\Omega_N)$. Тогда*

$$d_M(\mathcal{S};L_2(\Omega_N),\, L_\infty(\Omega_N)) \ll \sqrt{N\,M^{-1}\,\log(\deg T(\Omega_N;x))}, \qquad (12)$$

где $\deg T(\Omega_N;x)$ обозначает наибольшую из степеней экспонент, входящих в $T(\Omega_N;x)$, а $\deg e^{i(n,x)} = \max_j |n_j|$.

Таким образом, переходя непосредственно к оценке первого слагаемого в правой части в (11) заметим, что согласно определению чисел M_j

$$d_{M_j}(B^r_{2,\theta}(j),L_\infty) = 0, \quad d\le j\le l.$$

Поэтому, воспользовавшись оценкой (12), будем иметь

$$\sum_{d\le j<\alpha l} d_{M_j}(B^r_{2,\theta}(j),L_\infty) \ll \sum_{j=l+1}^{[\alpha l]+1} M_j^{-\frac{1}{2}}\, 2^{-j\,(r_1-\frac{1}{2})}\, j^{\,(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\, j^{\frac{\nu}{2}} \le$$

$$\leq 2^{-\frac{l}{2}(r_1+\frac{1}{2})}\, l^{-\frac{v-1}{2}} \sum_{j=l+1}^{[\alpha l]+1} 2^{-\frac{j}{2}(r_1-\frac{1}{2})}\, j^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\, j^{\frac{\nu}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-l\, r_1}\, l^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\, l^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

Подставляя (13) в (11) и учитывая, что $M \asymp 2^l\, l^{\nu-1}$, приходим к искомой оценке

$$d_M(B^r_{2,\theta}, L_\infty) \ll 2^{-l\, r_1}\, l^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\, l^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1}\, (\log^{\nu-1} M)^{r_1+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} \sqrt{\log M}. \quad (14)$$

Теперь, воспользовавшись оценкой (14), легко получить оценку поперечника $d_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty)$, $1 \leq p \leq \infty$. Пусть сначала $1 \leq p < 2$ и $f \in B^r_{p,\theta}$. Тогда применив к $A_s(f,x)$, как к полиному степени 2^{s_j} по переменной x_j, неравенство разных метрик (теорема A), будем иметь

$$\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f,x)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \gg$$

$$\gg \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} 2^{(s,1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|A_s(f,x)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_s 2^{(s, r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})\theta} \|A_s(f,x)\|_2^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} = \|f\|_{B_{2,\theta}^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}}, \quad (15)$$

где $r - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$ обозначает вектор с координатами $r_j - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$, $j = \overline{1,d}$. Следовательно, из (15) заключаем, что $B^r_{p,\theta} \subset B_{2,\theta}^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$, $1 \leq p < 2$, и согласно (14) приходим к оценке

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) \ll d_M(B_{2,\theta}^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}, L_\infty) \ll$$

$$\ll (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} (\log^{\nu-1} M)^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} \sqrt{\log M}.$$

В случае $2 < p \leq \infty$ искомая оценка следует из (14) согласно включению $B^r_{p,\theta} \subset B^r_{2,\theta}$, т.е.

$$d_M(B^r_{p,\theta}, L_\infty) \ll d_M(B^r_{2,\theta}, L_\infty) \ll M^{-r_1}\, (\log^{\nu-1} M)^{r_1+(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+} \sqrt{\log M}.$$

Оценка сверху в теореме установлена.

Переходя к доказательству в (2) оценки снизу, отметим, что ее достаточно установить при $\nu = d$. При этом нам потребуется рассмотреть несколько случаев. В первую очередь отметим, что в случае

$1 < p \leq 2$ соответствующая оценка следует из оценки поперечника $d_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$, $1 < p < q \leq 2$ при $q = 2$ [1].

Пусть $p = 1$ и $2 \leq \theta < \infty$. В этом случае мы будем пользоваться известным утверждением, для формулировки которого введем соответствующее обозначение.

Пусть $L_q(\pi_{2d})$, $q = (q_1, q_2)$ обозначает множество функций $f(x, y)$, $x, y \in \pi_d$ с конечной смешанной нормой

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2} = \Big\|\|f(\cdot,y)\|_{q_1}\Big\|_{q_2},$$

где норма вычисляется сначала в пространстве $L_{q_1}(\pi_d)$ по переменной $x \in \pi_d$, а затем от результата – по переменной $y \in \pi_d$ в пространстве $L_{q_2}(\pi_d)$.

В [13] Шмидтом получено утверждение, которое в несколько более общей форме может быть сформулировано в виде (см., например, [8, с. 10])

Теорема Б. *Пусть функция $f(x, y)$, $x \in \pi_d$, $y \in \pi_d$ такова, что $\|f(x, y)\|_{2,2} < \infty$. Тогда*

$$\inf_{u_i(x),v_i(y)} \left\| f(x,y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)\, v_i(y) \right\|_{2,2} = \left(\sum_{j=M+1}^{\infty} \lambda_j \right)^{\frac{1}{2}},$$

где λ_j — невозрастающая последовательность собственных чисел оператора $\mathrm{G}_f^*\,\mathrm{G}_f$, G_f — интегральный оператор с ядром $f(x, y)$, а G_f^* — сопряженный ему оператор.

Итак, по заданному натуральному числу M подберем $n \in N$ таким, чтобы для количества элементов множества $\mathrm{Q}_n = \bigcup\limits_{\|s\|_1=n} \rho(s)$ выполнялись соотношения:

$a)|\mathrm{Q}_n| \asymp 2^n\, n^{d-1}$;

$b)|\mathrm{Q}_n| > 2M$.

Рассмотрим функцию

$$g_1(x) = C_1 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{n \leq (s,1) < n+d} \ \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-r_1} \cos k_j x_j,$$

где $\rho^+(s) = \rho(s) \cap Z^d_+$, $C_1 > 0$ – некоторая постоянная.

Нетрудно убедиться,что эта функция, при соответствующем выборе $C_1 > 0$, принадлежит классу $B^r_{1,\theta}$. Действительно, поскольку функция

$$F_{r_1}(x) = \sum_{k>0} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-r_1} \cos k_j x_j$$

принадлежит классу H_1^r, $r=(r_1,\dots,r_1)\in R_+^d$ (см., например, [8, с. 53]) , то согласно теореме 1.1 (см. [8, с. 32]) выполняется соотношение

$$\|A_s(F_{r_1},x)\|_1 \ll 2^{-(s,r)},\ s\in N^d. \tag{16}$$

Следовательно, в силу (16) будем иметь

$$\|g_1\|_{B^r_{1,\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{n\le(s,1)<n+d} 2^{(s,r)\theta}\|A_s(F_{r_1},x)\|_1^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll n^{-\frac{d-1}{\theta}}\Bigg(\sum_{n\le(s,1)<n+d} 1\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d-1}{\theta}} = 1,$$

т.е. $g_1\in B^r_{1,\theta}$.

Далее, пусть G — интегральный оператор

$$(\mathrm{G}f)(x)=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d} g_1(x-y)f(y)\,dy,$$

G^* — оператор сопряженный к G и λ_l — собственные числа оператора $\mathrm{G}^*\mathrm{G}$, которые расположены в невозрастающем порядке. Легко видеть, что числа λ_l совпадают с числами $n^{\frac{-2(d-1)}{\theta}}\prod\limits_{j=1}^{d} k_j^{-2r_1}$, расположенными в порядке невозрастания.

Пусть $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$ — система функций из L_2, такая, что для некоторого $\varepsilon>0$ выполняется соотношение

$$\sup_{f\in B^r_{1,\theta}}\inf_{v_i}\Bigg\| f(x)-\sum_{i=1}^{M} v_i\,u_i(x)\Bigg\|_2 \le d_M(B^r_{1,\theta},L_2)+\varepsilon. \tag{17}$$

Тогда, с одной стороны имеем

$$\mathrm{I}=\sup_y\Bigg\| g_1(x-y)-\sum_{i=1}^{M} v_i(y)\,u_i(x)\Bigg\|_2 \le d_M(B^r_{1,\theta},L_2)+2\,\varepsilon, \tag{18}$$

и функции $v_i(y)$ можно считать непрерывными.

С другой стороны,

$$\mathrm{I}=\Bigg\| g_1(x-y)-\sum_{i=1}^{M} v_i(y)\,u_i(x)\Bigg\|_{2,\infty} \ge$$

$$\ge \Bigg\| g_1(x-y)-\sum_{i=1}^{M} v_i(y)\,u_i(x)\Bigg\|_{2,2} = \mathrm{I}_1. \tag{19}$$

Далее, воспользовавшись для оценки I_1 теоремой Б, будем иметь

$$\mathrm{I}_1 \geq \inf_{u_i(x), v_i(y) \in L_2} \left\| g_1(x-y) - \sum_{i=1}^{M} v_i(y)\, u_i(x) \right\|_{2,2} =$$

$$= \left(\sum_{l=M+1}^{\infty} \lambda_l \right)^{\frac{1}{2}} \geq n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n+d} \prod_{j=1}^{d} \sum_{k_j = 2^{s_j - 1}}^{2^{s_j}-1} k_j^{-2r_1} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp n^{-\frac{d-1}{\theta}} \left(\sum_{(s,1)=n+d} 2^{-\|s\|_1 (2r_1 - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-n(r_1 - \frac{1}{2})} n^{(d-1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp M^{-(r_1 - \frac{1}{2})} (\log^{d-1} M)^{r_1 - \frac{1}{\theta}}. \quad (20)$$

Таким образом, сопоставив (17)–(20), приходим к искомой оценке.

Теперь рассмотрим случай $p = 1,\ 1 \leq \theta < 2$ и получим оценку снизу поперечника $d_M(B^r_{1,\theta}, L_2)$. Пусть, по-прежнему, числа n и M связаны соотношениями $a)$ и $b)$ из предыдущего случая. Обозначим через $\mathcal{T}_n$ множество функций вида

$$\mathcal{T}_n = \left\{ f :\, f(x) = \sum_{(s,1) \leq n} \delta_s(f, x) \right\}.$$

Из определения колмогоровского поперечника и ограниченности оператора ортогонального проектирования на $\mathcal{T}_n$ (см., например, [8, с. 7]) можем записать

$$d_M(B^r_{1,\theta}, L_2) \gg d_M(B^r_{1,\theta} \cap \mathcal{T}_n,\, L_2 \cap \mathcal{T}_n). \quad (21)$$

Пусть $\mathcal{K} = |Q_n|$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mathcal{K}}$ — некоторая ортонормированная система функций из $\mathcal{T}_n$. Запишем разложение экспоненты $e^{i(k,x)}$, $k \in Q_n$ по системе $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^{\mathcal{K}}$. Имеем

$$e_k(x) = e^{i(k,x)} = \sum_{j=1}^{\mathcal{K}} a_k^j \, \alpha_j(x), \quad k \in Q_n,$$

и в силу ортонормированности систем функций $\{e_k(x)\}_{k \in Q_n}$ и $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^{\mathcal{K}}$

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{K}} |\, a_k^j|^2 = \sum_{k \in Q_n} |\, a_k^j|^2 = 1 \quad (22)$$

Далее, рассмотрим приближение функции $e_k(x)$ ее M-ой суммой Фурье $M = [\,\frac{\mathcal{K}}{2}\,]$ по системе $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^{\mathcal{K}}$. Получим

$$\mathrm{R}_k^2 = \left\| e_k(x) - \sum_{j=1}^{M} a_k^j \, \alpha_j(x) \right\|_2^2 = \left\| \sum_{j=1}^{\mathcal{K}} a_k^j \, \alpha_j(x) - \sum_{j=1}^{M} a_k^j \, \alpha_j(x) \right\|_2^2 =$$

$$= \Big\| \sum_{j=M+1}^{\mathcal{K}} a_k^j\, \alpha_j(x) \Big\|_2^2 = \sum_{j=M+1}^{\mathcal{K}} |\, a_k^j|^2$$

Отсюда, воспользовавшись (22), можем записать

$$\sum_{k\in Q_n} \mathrm{R}_k^2 = \sum_{k\in Q_n} \sum_{j=M+1}^{\mathcal{K}} |\, a_k^j|^2 = \sum_{k\in Q_n} \left(\sum_{j=1}^{\mathcal{K}} |\, a_k^j|^2 - \sum_{j=1}^{M} |a_k^j|^2 \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\mathcal{K}} \sum_{k\in Q_n} |a_k^j|^2 - \sum_{j=1}^{M} \sum_{k\in Q_n} |a_k^j|^2 = \mathcal{K} - M \geq \frac{\mathcal{K}}{2}. \quad (23)$$

Из (23) делаем заключение, что существует вектор $s^*=(s_1^*, \ldots, s_d^*)$, $(s^*, 1) = n$, такой, что

$$\sum_{k\in\rho(s^*)} \mathrm{R}_k^2 \geq \frac{1}{2}\, |\, \rho(s^*)|,$$

где $|\, \rho(s^*)|$ — количество элементов множества $\rho(s^*)$.

Рассмотрим функцию

$$g_2(x) = C_2 \sum_{k\in\rho(s^*)} \prod_{j=1}^{d} |k_j|^{-r_1}\, e^{i(k,x)}, \quad C_2 > 0.$$

Легко убедиться, что функция $g_2(x)$, с соответствующей постоянной $C_2 > 0$, принадлежит классу $B^r_{1,\theta}$. Запишем уклонение функции $g_2(x+y)$, $y \in \pi_d$ от ее М-ой суммы Фурье $\mathrm{S}_M(g_2(x+y), \alpha)$ по системе функций $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^{\mathcal{K}}$. Имеем

$$\mathrm{R}_M(x, y) = g_2(x+y) - \mathrm{S}_M(g_2(x+y), \alpha) =$$
$$= C_2 \sum_{k\in\rho(s^*)} \prod_{l=1}^{d} |k_l|^{-r_1}\, e^{i(k,\, y)} \sum_{j=M+1}^{\mathcal{K}} a_k^j\, \alpha_j(x)$$

и, следовательно,

$$\|\mathrm{R}_M(\cdot, y)\|_2^2 \asymp \sum_{j=M+1}^{\mathcal{K}} \Big| \sum_{k\in\rho(s^*)} \prod_{l=1}^{d} |k_l|^{-r_1}\, a_k^j\, e^{i(k,\, y)} \Big|^2. \quad (24)$$

Далее, приняв во внимание,что

$$\prod_{l=1}^{d} |k_l|^{-r_1} \gg 2^{-(s^*,1) r_1},$$

и воспользовавшись соотношениями (22)–(24), будем иметь

$$(2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d}\|\mathrm{R}_M(\cdot,y)\|_2^2dy \gg 2^{-(s^*,1)2\,r_1}\sum_{j=M+1}^{\mathcal{K}}\sum_{k\in\rho(s^*)}|\,a_k^j\,|^2 =$$

$$= 2^{-(s^*,1)2\,r_1}\sum_{k\in\rho(s^*)}\sum_{j=M+1}^{\mathcal{K}}|\,a_k^j\,|^2 = 2^{-(s^*,1)2\,r_1}\sum_{k\in\rho(s^*)}\mathrm{R}_k^2 \geq$$

$$\geq 2^{-(s^*,1)2\,r_1}\,\frac{1}{2}|\,\rho(s^*)|.$$

Поэтому, для некоторого $y^*\in\pi_d$ справедливо соотношение

$$\|\mathrm{R}_M(\cdot,y^*)\|_2^2 \gg |\rho(s^*)|\,2^{-(s^*,1)2\,r_1} \asymp 2^{(s^*,1)}\,2^{-(s^*,1)2\,r_1} = 2^{(s^*,1)(1-2\,r_1)}.$$

Отсюда находим

$$\|\mathrm{R}_M(\cdot,y^*)\|_2 \gg 2^{-\|\,s^*\,\|_1(\,r_1-\frac{1}{2})}. \tag{25}$$

Таким образом, согласно (21) и (25) и соотношению $M\asymp 2^n\,n^{d-1}$, приходим к оценке

$$d_M(B^r_{1,\theta},L_2)\gg 2^{-\|\,s^*\,\|_1(\,r_1-\frac{1}{2})} = 2^{-n(\,r_1-\frac{1}{2})}\asymp(M^{-1}\,\log^{d-1}\,M)^{\,r_1-\frac{1}{2}}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось получить оценку снизу в случае $p>2$. Заметим, что поскольку при $p>2$ $B^{\,r}_{\infty,\,\theta}\subset B^{\,r}_{p,\theta}$, то достаточно получить необходимую оценку поперечника $d_M(B^r_{\infty,\theta},L_2)$. Здесь мы также рассмотрим отдельно случаи $1\leq\theta\leq 2$ и $2<\theta<\infty$.

Итак, предположим, что $1\leq\theta\leq 2$ и числа M и n связаны соотношениями $|Q_n|\asymp M$ и $|Q_n|>2M$.

Рассмотрим M функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_M$, которые будем считать ортонормированными. Исследуем приближение экспонент $e^{i(k,x)}$, $k\in Q_n$ в пространстве L_2 их частными суммами Фурье порядка M по системе функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{M}$. Полагая $\alpha_k^j=(\varphi_j,e^{i(k,x)})$, в силу ортонормированности систем функций $\{e^{i(k,x)}\}_{k\in Q_n}$ и $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{M}$, получим

$$\sum_{k\in Q_n}|\,\alpha_k^j\,|^2\leq 1,$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{k\in Q_n}|\,\alpha_k^j\,|^2=\sum_{k\in Q_n}\sum_{j=1}^{M}|\,\alpha_k^j\,|^2\leq M.$$

Отсюда заключаем, что существует вектор $k^0 = (k_1^0, \dots, k_d^0) \in Q_n$, такой, что

$$\sum_{j=1}^{M} |\,\alpha_{k^0}^j|^2 \le \frac{1}{2}$$

и

$$\|e^{i(k^0,x)} - \sum_{j=1}^{M} \alpha_k^j\, \varphi_j(x)\|_2^2 \ge \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Рассмотрим функцию

$$g_3(x) = 2^{-(s^0,r)} e^{i(k^0,x)},$$

где $s^0 = (s_1^0, \dots, s_d^0)$ — вектор, координаты которого удовлетворяют соотношению $2^{s_j^0 - 1} \le |k_j| < 2^{s_j^0}$, $j = \overline{1,d}$. Нетрудно проверить,что $g_3(x) \in B_{\infty,\theta}^r$. Таким образом, воспользовавшись (26), получим

$$\inf_{c_j} \|g_3(x) - \sum_{j=1}^{M} c_j\, \varphi_j(x)\|_2 > \frac{1}{\sqrt{2}}\, 2^{-(s^0,r)} \gg 2^{-n r_1} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1}.$$

Отсюда следует искомая оценка снизу в случае $1 \le \theta \le 2$.

Пусть теперь $2 < \theta < \infty$. Положим $\overline{S}_n = \{s : (s,1) = n,\ s_j$ — четные числа$\}$, $\overline{Q}_n = \bigcup\limits_{s \in \overline{S}_n} \rho^+(s)$ и $T(\overline{Q}_n)$ — множество полиномов с "номерами" гармоник из $\overline{Q}_n$.

В [14] В. Н. Темляковым установлена следующая оценка

$$d_M(H_\infty^r \cap T(\overline{Q}_n),\, L_q) \gg M^{-r_1}\, (\log^{d-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2}}, \tag{27}$$

$1 < q < \infty,\ M \asymp 2^n\, n^{d-1}$.

Воспользовавшись этой оценкой нетрудно получить соответствующую оценку поперечника $d_M(B_{p,\theta}^r, L_\infty)$. Действительно, пусть $f \in H_\infty^r \cap T(\overline{Q}_n)$. Тогда согласно теореме 1.1 [8, с. 32]

$$\|A_s(f,x)\|_\infty \ll 2^{-(s,r)},\ s \in \overline{S}_n$$

и, следовательно,

$$\|\,f\,\|_{B_{\infty,\theta}^r \cap T(\overline{Q}_n)} = \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} 2^{(s,r)\,\theta} \|A_s(f,x)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s \in \overline{S}_n} 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp n^{\frac{d-1}{\theta}}. \tag{28}$$

Из (28) заключаем,что если $f \in H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n)$, то функция $g_4(x) = C_3\, n^{-\frac{d-1}{\theta}} f(x),\ C_3 > 0$ принадлежит классу $B^r_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)$. Таким образом, согласно (27) имеем

$$d_M\big(B^r_{p,\theta}, L_\infty\big) \geq d_M\big(B^r_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n), L_\infty\big) \gg$$
$$\gg d_M\big(H^r_\infty \cap T(\overline{Q}_n), L_q\big) n^{-\frac{d-1}{\theta}} \gg$$
$$\gg \big(M^{-1} \log^{d-1} M\big)^{r_1} \big(\log^{d-1} M\big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Оценки снизу во всех случаях установлены. Теорема доказана. $\square$

В завершение получим точную по порядку оценку колмогоровского поперечника класса $B^r_{\infty,1}$ в пространстве L_∞.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть $r_1 > 0$. Тогда справедлива оценка*

$$d_M(B^r_{\infty,1}, L_\infty) \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1}. \tag{29}$$

Доказательство. Чтобы доказать в (29) оценку сверху рассмотрим для $f \in B^r_{\infty,1}$ приближающий полином

$$t_n(f,x) = \sum_{(s,\gamma)\leq n} A_s(f,x),$$

где число n подобрано по заданному M из соотношения $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

Тогда

$$\|f(x) - t_n(f,x)\|_\infty = \Big\| \sum_{(s,\gamma)>n} A_s(f,x) \Big\|_\infty \leq$$
$$\leq \sum_{(s,\gamma)>n} \|A_s(f,x)\|_\infty = \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)} \|A_s(f,x)\|_\infty\, 2^{-(s,r)} \leq$$
$$\leq 2^{-n r_1} \sum_{(s,\gamma)>n} 2^{(s,r)} \|A_s(f,x)\|_\infty \leq 2^{-n r_1} \|f\|_{B^r_{\infty,1}} \leq 2^{-n r_1}.$$

Отсюда, принимая во внимание , что $M \asymp 2^n\, n^{\nu-1}$, находим

$$d_M(B^r_{\infty,1}, L_\infty) \ll (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Что касается в (29) оценки снизу, то она была установлена при доказательстве теоремы 1. Теорема доказана. $\square$

Пусть $F_r(x,\alpha),\ r=(r_1,\ldots,r_d)$ обозначают многомерные аналоги ядер Бернулли, т.е.

$$F_r(x,\alpha)=2^d\sum_k\prod_{j=1}^d k_j^{-r_j}\,\cos\Big(k_j\,x_j-\frac{\alpha_j\,\pi}{2}\Big),\ r_j>0,\ \alpha_j\in R,$$

и в сумме участвуют только те векторы $k=(k_1,\ldots,k_d)$, для которых $k_j>0,\ j=\overline{1,d}$. Обозначим (см., например, [8, с. 31]) через $W^r_{p,\alpha}$ класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x)=\varphi(x)*F_r(x,\alpha)=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d}\varphi(y)F_r(x-y,\alpha)\,dy,$$

где $\varphi\in L_p(\pi_d),\ \|\varphi\|_p\le 1$.

Замечание. Порядковые оценки колмогоровских поперечников $d_M(W^r_{p,\alpha},L_\infty)$ и $d_M(H^r_p,L_\infty)$ при $1\le p\le\infty$ и $r_1>\max\{\frac{1}{p};\frac{1}{2}\}$ имеют вид

$$\big(M^{-1}\log^{\nu-1}M\big)^{r_1-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}\ll d_M(W^r_{p,\alpha},L_\infty)\ll$$
$$\ll\big(M^{-1}\log^{\nu-1}M\big)^{r_1-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}\sqrt{\log M}$$

и

$$\big(M^{-1}\log^{\nu-1}M\big)^{r_1-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}\big(\log^{\nu-1}M\big)^{1/2}\ll d_M(H^r_p,L_\infty)\ll$$
$$\ll\big(M^{-1}\log^{\nu-1}M\big)^{r_1-(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})_+}\log^{\frac{\nu}{2}}M.$$

Оценки сверху в этих соотношениях получены Э. С. Белинским [12], а снизу они являются следствием соответствующих оценок поперечников $d_M(W^r_{p,\alpha},L_2)$ и $d_M(H^r_p,L_2)$, которые установлены В. Н. Темляковым (см., например, [8, с. 69 и с. 76]).

Литература

[1] А. С. Романюк, *Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q* // Укр. матем. журн., **43** (1991), No 10, 1398–1408.

[2] А. С. Романюк, *О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных* // Укр. матем. журн. **45** (1993), No 5, 663–675.

[3] Э. М. Галеев, *Поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}(T^d)$* // Матем. заметки, **69** (2001), No 5, 656–665.

[4] О. В. Бесов, *О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения* // Докл. АН СССР, **126** (1959), No 6, 1163–1165.

[5] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука, 1969.

[6] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения* // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **187** (1989), 143–161.

[7] A. Kolmogoroff, *Über die beste Annäherung von funktionen einer gegeben Funktionenklasse* // Ann. Math. **37** (1936), 107–111.

[8] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **178** (1986), 1–112.

[9] Г. Харди, Д. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства.* М.: ИЛ, 1948.

[10] С. М. Никольский, *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных* // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **38** (1951), 244–278.

[11] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* М.: Мир, 1980.

[12] Э. С. Белинский, *Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность)* // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Ярослав. ун-т. (1990), 22–37.

[13] E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I* // Math. Ann. (1907), Bd. 63, 433–476.

[14] В. Н. Темляков, *Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью* // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **189** (1989), 138–168.

Сведения об авторах

Анатолий Сергеевич Романюк

Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская, 3
01601 Киев,
Украина
E-Mail: `funct@imath.kiev.ua`