Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 1, 52 – 64

Про обмеженість l-індексу канонічних добутків

Анатолій А. Гольдберг,
Мирослав М. Шеремета

Анотація. Досліджені умови на нулі канонічного добутку, за яких він є обмеженого l-індексу.

2000 MSC. 30D15, 30B50.

Ключові слова та фрази. цілі функції, канонічні добутки, функції обмеженого індексу.

1. Вступ

Нехай Λ — клас додатних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій l, а Q — клас таких функцій $l \in \Lambda$, що $l(r + O(1/l(r))) = O(l(r))$, $r \to +\infty$.

Для $l \in \Lambda$ ціла функція f називається функцією обмеженого l-індексу [4, c. 5] якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : 0 \le k \le N\right\}.$$

Нехай (a_k) — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, для якої $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/a_n) = +\infty$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/a_n^2) < +\infty$. Тоді канонічний добуток першого роду

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\exp\left\{\frac{z}{a_n}\right\}$$

є цілою функцією. В [1] і [3] висловлена така

Гіпотеза. *Якщо (a_n^2) — опукла послідовність, то функція π є обмеженого l-індексу для кожної функції $l \in Q$ такої, що* $\sum\limits_{a_k \le r}\dfrac{1}{a_k} \asymp l(r)$, $r \to +\infty$.

Стаття надійшла в редакцію 8.10.2004

В [1] вона доведена за додаткових умов

$$n \ln n = O\left(a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right), \quad n \to \infty, \tag{1}$$

та

$$a_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{a_k^2} = O\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right), \quad n \to \infty. \tag{2}$$

В загальному випадку гіпотеза неправильна, її спростування наведемо в п. 2. В тому ж пункті ми покажемо, що з умови (1) випливає умова (2). Умову (1) задовольняє досить вузький клас послідовностей (a_n). Вона виконується, наприклад, коли $a_n = n \ln_1^{\alpha_1} n \ln_2^{\alpha_2} n \ldots \ln_k^{\alpha_k} n$, де $\ln_k x$ — k-а ітерація логарифма, а $\alpha_j < 1$. Якщо, наприклад, $a_n = n^{\alpha}$, $1/2 < \alpha < 1$, або $a_n = n^{1/2} \ln n$, то умова (1) не виконується. Детальніший аналіз показав, що обмеженість l-індексу функція π вигідніше вивчати для функції $l \in Q$ такої, що $l(r) \asymp \dfrac{n(r) \ln n(r)}{r}$, $r \to +\infty$, а в цьому випадку правильною є наступна

Теорема 1. *Нехай (a_n^2) — опукла послідовність. Для того щоб функція π була обмеженого l-індексу для функції $l \in Q$ такої, що $l(r) \asymp \dfrac{n(r) \ln n(r)}{r}$, $r \to +\infty$, необхідно і досить, щоб*

$$\sum_{a_k \le r} \frac{1}{a_k} + r \sum_{a_k \ge r}^{\infty} \frac{1}{a_k^2} = O\left(\frac{n(r) \ln n(r)}{r}\right), \quad r \to +\infty. \tag{3}$$

Правильність теореми 1 ми отримаємо як наслідок з відповідної теореми для канонічних добутків довільного роду $p \ge 1$.

2. Допоміжні твердження та спростування гіпотези

Якщо $a_k \in \mathbb{C}$ — нулі цілої функції f, то позначимо $n(r, z_0, 1/f) = \sum_{|a_k - z_0| \le r} 1$, а для $l \in \Lambda$ і $q \in (0, +\infty)$ нехай

$$G_q(f) = \bigcup_k \left\{ z : \ |z - a_k| \le \frac{q}{l(|a_k|)} \right\}.$$

Справедливий наступний критерій обмеженості l-індексу цілої функції.

Лема 1 ([2, 4, с. 27]). *Якщо $l \in Q$, то ціла функція f є обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли:*

1) *для кожного $q > 0$ існує $P(q) > 0$ таке, що $\left|\dfrac{f'(z)}{f(z)}\right| \le P(q)l(|z|)$ для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus G_q(f)$;*

2) *для кожного $q > 0$ існує $n^*(q) \in \mathbb{N}$ таке, що $n\left(\dfrac{q}{l(|z_0|)}, z_0, \dfrac{1}{f}\right) \le n^*(q)$ для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Використовуючи цю лему, спочатку спростуємо наведену вище гіпотезу. Оскільки $\dfrac{\pi'(z)}{\pi(z)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{z}{a_k(z-a_k)}$, то для $z = -r$, $a_n \le r \le a_{n+1}$, маємо $\dfrac{\pi'(-r)}{\pi(-r)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{r}{a_k(r+a_k)} \ge \dfrac{r}{2} \sum\limits_{a_k \ge r} \dfrac{1}{a_k^2}$. Тому, якщо виберемо $a_k = \sqrt{k} \ln k$ для $k > 1$, то $\sum\limits_{a_k \le r} \dfrac{1}{a_k} = a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}\ln k} \asymp \dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}$, $n \to \infty$, а $a_n \sum\limits_{a_k \ge r} \dfrac{1}{a_k^2} \ge \sqrt{n} \ln n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k \ln^2 k} \asymp \sqrt{n}$ $\quad n \to \infty$. Звідси випливає, що $\sum\limits_{a_k \le r} \dfrac{1}{a_k} = o\left(\dfrac{\pi'(-r)}{\pi(-r)}\right)$, $r \to +\infty$, так що за лемою 1 функція π не є обмеженого l-індексу з $l(r) \asymp \sum\limits_{a_k \le r} \dfrac{1}{a_k}$, $r \to +\infty$. Гіпотезу спростовано.

Покажемо, що з умови (1) випливає умова (2). Переходячи до інтегралу Стільтьєса, інтегруючи частинами і використовуючи опуклість (a_n^2), неважко показати, що умови (1) і (2) рівносильні відповідно умовам

$$\frac{n(r)\ln n(r)}{r} = O\left(\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t^2}\,dt\right), \quad r \to +\infty, \tag{4}$$

і

$$r\int\limits_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^3} dt = O\left(\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t^2}\,dt\right), \quad r \to +\infty. \tag{5}$$

Тому треба показати, що з (4) випливає (5). Але з (4) маємо $\dfrac{n(r)}{r} \le \dfrac{K}{\ln n(r)} \int\limits_0^r \dfrac{n(t)}{t^2}\,dt$, $K = \mathrm{const} > 0$. Тому

$$r\int\limits_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^3}\,dt \le Kr \int\limits_r^{\infty} \frac{dt}{t^2 \ln n(t)} \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x^2}\,dx \le$$

$$\leq \frac{Kr}{\ln n(r)}\int\limits_r^\infty \frac{dt}{t^2}\int\limits_0^t \frac{n(x)}{x^2}\,dx \leq \frac{Kr}{\ln n(r)}\left(\frac{1}{r}\int\limits_0^r \frac{n(x)}{x^2}\,dx + \int\limits_r^\infty \frac{n(t)}{t^3}\,dt\right),$$

звідки

$$\left(1-\frac{K}{\ln n(r)}\right) r\int\limits_r^\infty \frac{n(t)}{t^3}\,dt \leq \frac{K}{\ln n(r)}\int\limits_0^r \frac{n(x)}{x^2}\,dx,$$

тобто

$$r\int\limits_r^\infty \frac{n(t)}{t^3}\,dt = o\left(\int\limits_0^r \frac{n(x)}{x^2}\,dx\right), \quad r\to+\infty,$$

що вказує на виконання умови (5).

Наведемо ще дві потрібні надалі леми.

Лема 2. *Якщо $l\in Q$ і $|a_{k+1}|-|a_k|>2q_0/l(|a_k|)$ для деякого $q_0>0$ і всіх $k\geq 1$, то виконується умова 2) леми 1.*

Доведення. Покладемо

$$\lambda_1(q)=\inf\left\{\frac{l(r)}{l(r_0)}:\ |r-r_0|\leq \frac{q}{l(r_0)},\ r_0\geq 0\right\},$$
$$\lambda_2(q)=\sup\left\{\frac{l(r)}{l(r_0)}:\ |r-r_0|\leq \frac{q}{l(r_0)},\ r_0\geq 0\right\}.$$

Оскільки $l\in Q$, то $0<\lambda_1(q)\leq 1\leq \lambda_2(q)<+\infty$ для кожного $q\in[0,+\infty)$.

Припустимо тепер, що для деякого $r\in(0,+\infty)$

$$r-\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)l(r)}\leq |a_k|<|a_{k+1}|\leq r+\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)l(r)}.$$

Тоді

$$|a_{k+1}|-|a_k|\leq \frac{2q_0}{\lambda_2(q_0)l(r)}, \quad l(|a_k|)\leq \lambda_2\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}\right)l(r)\leq \lambda_2(q_0)l(r),$$

тобто $|a_{k+1}|-|a_k|\leq 2q_0/l(|a_k|)$, що неможливо. Звідси випливає, що проміжок $[r-q_0/(\lambda_2(q_0)l(r)),\ r+q_0/(\lambda_2(q_0)l(r))]$ містить щонайбільше один нуль. Тому $n(q_0/(\lambda_2(q_0)l(|z_0|)), z_0, 1/f)\leq 1$. Але кожний круг радіуса $q/l(|z_0|)$, $q>q_0/\lambda_2(q_0)$, можна покрити скінченною кількістю $m=m(q_0/\lambda_2(q_0),q)$ кругів радіуса $q_0/(\lambda_2(q_0)l(|z_0|))$. Тому $n(q/l(|z_0|), z_0, 1/f)\leq m$, тобто виконується умова 2) леми 1. $\square$

Лема 3. *Якщо* $l \in Q$, $|a_n| \le |z| \le |a_{n+1}|$, $|z-a_n| \ge q/l(|a_n|)$ *і* $|z-a_{n+1}| \ge q/l(|a_{n+1}|)$, *то*

$$\frac{1}{|z-a_n|} + \frac{1}{|z-a_{n+1}|} \le P_1(q)l(|z|), \quad P_1(q) \equiv const > 0. \tag{6}$$

Доведення. Якщо $|z-a_n| \ge q/l(|z|)$ і $|z-a_{n+1}| \ge q/l(|z|)$, то нерівність (6) виконується з $P_1(q) = 2/q$. Припустимо, що $|z-a_n| < q/l(|z|)$, але $|z-a_n| \ge q/l(|a_n|)$. Тоді $|z| - q/l(|z|) \le |a_n| \le |z| - q/l(|z|)$ і, оскільки $l \in Q$, то $l(|a_n|) \le \lambda_2(q)l(|z|)$ і тому $|z-a_n| \ge q/(\lambda_2(q)l(|z|))$. Аналогічно, якщо $|z-a_{n+1}| < q/l(|z|)$, але $|z-a_{n+1}| \ge q/l(|a_{n+1}|)$, то $|z-a_{n+1}| \ge q/(\lambda_2(q)l(|z|))$. Звідси випливає правильність нерівності (6) з $P_1(q) = 2\lambda_2(q)/q$. □

3. Обмеженість l-індексу канонічного добутку роду p

Нехай $p \in \mathbb{N}$, а (a_k) — послідовність комплексних чисел, занумерованих у порядку неспадання модулів, така, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^p} = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{p+1}} < +\infty. \tag{7}$$

Тоді канонічний добуток роду p

$$\pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left\{\frac{z}{a_k} + \frac{z^2}{2a_k^2} + \dots + \frac{z^p}{pa_k^p}\right\} \tag{8}$$

абсолютно і рівномірно збіжний на кожному компакті з комплексної площини і задає цілу функцію π. Легко перевірити, що

$$\frac{\pi'(z)}{\pi(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k} + \frac{z}{a_k^2} + \dots + \frac{z^{p-1}}{a_k^p}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^p}{a_k^p(z-a_k)}. \tag{9}$$

З (7) випливає, що $|a_n|^{p+1}/n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Тому умова $|a_n|^{p+1}/n \nearrow \infty$ $(n \to \infty)$, за якої ми вивчатимемо поводження $\pi'(z)/\pi(z)$ зовні $G_q(\pi)$, є природною. З неї випливає, що $|a_n| \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$.

Лема 4. *Якщо* $|a_n|^{p+1}/n \nearrow \infty\, (n \to \infty)$ *і* $|a_n| \le |z| \le |a_{n+1}|, n \ge 2$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{|z| - |a_k|} + \sum_{k=n+2}^{2n+1} \frac{1}{|z| - |a_k|} \le \frac{6p\, n(r) \ln n(r)}{r}, \quad r = |z|. \tag{10}$$

Доведення. Оскільки $k^{-1/(p+1)}|a_k| \nearrow \infty\,(k\to\infty)$, то для $n>k$

$$|a_n|-|a_k| = n^{1/(p+1)}n^{-1/(p+1)}|a_n| - k^{1/(p+1)}k^{-1/(p+1)}|a_k| \ge \\ \ge n^{-1/(p+1)}|a_n|\left(n^{1/(p+1)}-k^{1/(p+1)}\right) = |a_n|\left(1-(k/n)^{1/(p+1)}\right)$$

і

$$\frac{|a_n|}{|a_n|-|a_k|} \le \frac{n^{1/(p+1)}}{n^{1/(p+1)}-k^{1/(p+1)}} =$$

$$= \frac{n^{1/(p+1)}(n^{p/(p+1)}+n^{(p-1)/(p+1)}k^{1/(p+1)}+\cdots+k^{p/(p+1)})}{n-k} \le \frac{pn}{n-k}.$$

Тому

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{|z|-|a_k|} = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-|a_k|/r} \le \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-|a_k|/|a_n|} = \\ = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|a_n|}{|a_n|-|a_k|} \le \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{pn}{n-k} \le \frac{2p\,n(r)\ln n(r)}{r}$$

і подібно

$$\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{|a_k|-|z|} = \frac{1}{r}\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{|a_k|/r-1} \le \frac{1}{r}\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{|a_k|/|a_{n+1}|-1} =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{|a_{n+1}|}{|a_k|-|a_{n+1}|} \le \frac{1}{r}\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{pn^{1/(p+1)}k^{p/(p+1)}}{k-(n+1)} \le$$

$$\le \frac{p2^{p/(p+1)}(n+1)}{r}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \le \frac{4p\,n(r)\ln n(r)}{r}.$$

З двох останніх нерівностей отримуємо нерівність (10). □

Лема 5. *Якщо* $|a_n|^{p+1}/n \nearrow \infty$ $(n\to\infty)$ *і* $|a_n| \le |z| \le |a_{n+1}|$, $n\ge 2$, *то*

$$r^p\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}} \le \sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{|z|^p}{|a_k|^p(|a_k|-|z|)} \le \\ \le \frac{r^p}{1-2^{-(p+1)}}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}}. \quad (11)$$

Доведення. Ліва нерівність (11) очевидна. З іншого боку,

$$\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{|z|^p}{|a_k|^p(|a_k|-|z|)}\le r^p\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^p(|a_k|-|a_{n+1}|)}\le$$
$$\le r^p\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}\left(1-((n+1)/k)^{1/(p+1)}\right)}\le$$
$$\le\frac{r^p}{1-2^{-(p+1)}}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}},$$

тобто отримуємо праву нерівність (11). □

Лема 6. *Якщо $|a_n|^{p+1}/n\nearrow\infty$ $(n\to\infty)$, то існує така функція $l\in Q$, що $l(r)\asymp\dfrac{n(r)\ln n(r)}{r}$ $(r_0\le r\to+\infty)$.*

Доведення. Нехай $\lambda_n=|a_n|^{p+1}$, $n_\lambda(r)$ — лічильна функція послідовності (λ_n), $n_1(r)=r/a_1$ для $0\le r\le\lambda_1$ і $n_1(r)=n+\dfrac{r-\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$ для $\lambda_n\le r\le\lambda_{n+1}$. Тоді $n/\lambda_n\searrow 0$, $n\to\infty$, функція $n_1(r)$ неперервна, $n_\lambda(r)\le n_1(r)\le n_\lambda(r)+1$ і $n_1(r)/r\searrow 0$ при $r_0\le r\to\infty$, бо $\left(\dfrac{n_1(r)}{r}\right)'=\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}-n\right)\le 0$ для $\lambda_n<r<\lambda_{n+1}$.

Позначимо $n_*(r)=n_1(r^{p+1})$. Оскільки $n(r)=n_\lambda(r^{p+1})$, то з наведених співвідношень випливає, що $n_*(r)=n(r)$ і $n_*(r)/r^{p+1}\searrow 0$ при $r\to\infty$.

Нарешті, покладемо $l(r)=\dfrac{n_*(r)\ln n_*(r)}{r}$ $(r\le r_0)$. Оскільки $rl(r)\nearrow+\infty$, $r\to+\infty$, то для $q>0$

$$l\Big(r-\frac{q}{l(r)}\Big)\le\frac{r}{r-q/l(r)}l(r)=\frac{1}{1-q/(rl(r))}l(r)=(1+o(1))l(r),\ r\to+\infty.$$

З іншого боку,

$$n_*\Big(r-\frac{q}{l(r)}\Big)\le\frac{r^{p+1}}{(r-q/l(r))^{p+1}}n_*(r)=(1+o(1))n_*(r),\quad r\to+\infty,$$

звідки легко випливає, що $l(r+q/l(r))\le(1+o(1))l(r)$, $r\to+\infty$, а отже, $l\in Q$ і $l(r)\sim\dfrac{n(r)\ln n(r)}{r}$ $(r_0\le r\to+\infty)$. □

Тепер ми доведемо теорему, з якої легко випливає теорема 1.

Теорема 2. *Нехай* $|a_n|^{p+1}/n \nearrow \infty\,(n\to\infty)$, *а функція* $l\in Q$ *така, що* $l(r)\asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{r}\,(r_0\le r\to+\infty)$. *Для того щоб канонічний добуток* (8) *був обмеженого* l*-індексу, досить, а у випадку додатних нулів і необхідно, щоб*

$$r^{p-1}\sum_{k=1}^{n(r)}\frac{1}{|a_k|^p}+r^p\sum_{k=n(r)+1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}}=O\left(\frac{n(r)\ln n(r)}{r}\right),\quad r\to+\infty. \tag{12}$$

Доведення. Як у доведенні леми 4, маємо

$$|a_{k+1}|-|a_k|\ge|a_k|\left(1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^{1/(p+1)}\right)=$$
$$=|a_k|\left(1-\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{1/(p+1)}\right)\ge$$
$$\ge\frac{a_k}{(p+1)(k+1)}=\frac{a_k}{k\ln k}\frac{k\ln k}{(p+1)(k+1)}\ge\frac{q}{l(|a_k|)}$$

для кожного $q>0$ і всіх $k\ge k_0(q)$. Тому за лемою 2 виконується умова 2) леми 1.

Використовуючи (9), для $|a_n|\le|z|\le|a_{n+1}|, n\ge 2$, запишемо

$$\frac{\pi'(z)}{\pi(z)}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{z-a_k}+\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{z-a_{n+1}}+$$
$$+\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{1}{z-a_k}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}+\frac{z}{a_k^2}+\cdots+\frac{z^{p-1}}{a_k^p}\right)+$$
$$+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(\frac{1}{a_k}+\frac{z}{a_k^2}+\cdots+\frac{z^{p-1}}{a_k^p}\right)+\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{z^p}{a_k^p(z-a_k)}. \tag{13}$$

Оскільки

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1}\left(\frac{1}{|a_k|}+\frac{|z|}{|a_k|^2}+\cdots+\frac{|z|^{p-1}}{|a_k|^p}\right)\le\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{p}{|a_k|}\le\frac{pn}{|a_{n+1}|}\le$$
$$\le\frac{pn(r)}{r}=o\left(\frac{n(r)\ln n(r)}{r}\right),\quad r\to+\infty,$$

то за лемами 3 і 4 з (13) для $|a_n| \le |z| \le |a_{n+1}|\,(n \ge 2)$, $z \notin G_q(\pi)$, і $l(r) \asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{r}$ $(r_0 \le r \to +\infty)$ отримуємо

$$\frac{\pi'(z)}{\pi(z)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k} + \frac{z}{a_k^2} + \dots + \frac{z^{p-1}}{a_k^p}\right) + \\ + \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{z^p}{a_k^p(z-a_k)} + O(l(r)), \quad r \to +\infty. \quad (14)$$

Але

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{|a_k|} + \frac{|z|}{|a_k|^2} + \dots + \frac{|z|^{p-1}}{|a_k|^p}\right) = \\ = r^{p-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|a_k|^p}\left(1 + \frac{|a_k|}{r} + \dots + \frac{|a_k|^{p-1}}{r^{p-1}}\right) \le pr^{p-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|a_k|^p}$$

Тому з (14) і леми 5 отримуємо

$$\frac{|\pi'(z)|}{|\pi(z)|} \le pr^{p-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|a_k|^p} + \frac{r^p}{1-2^{-(p+1)}}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{p+1}} + O(l(r)),\ r \to +\infty,$$

і, якщо виконується умова (12), то для всіх $|z| \ge |a_2|$, $z \notin G_q(\pi)$, звідси маємо нерівність $|\pi'(z)|/|\pi(z)| \le P(q)l(|z|)$, $P(q) \equiv \mathrm{const} > 0$. Використовуючи принцип максимуму модуля і додатність функції l, неважко показати, що така ж нерівність (можливо, з іншою сталою $P(q)$) виконується і для $|z| \le |a_2|$, $z \notin G_q(\pi)$. Отже, умова 1) леми 1 виконується і за цією лемою канонічний добуток (8) є обмеженого l-індексу з $l(r) \asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{r}$ $(r_0 \le r \to +\infty)$. Достатність умови (12) доведено.

Нехай тепер всі $a_k > 0$ і $a_n \le |z| \le a_{n+1}$. Оскільки

$$\sum_{r/2 \le a_k \le a_n}\left(\frac{1}{a_k} + \frac{r}{a_k^2} + \dots + \frac{r^{p-1}}{a_k^p}\right) \le \\ \le \sum_{r/2 \le a_k \le a_n}\frac{r^{p-1}}{a_k^p}\left(\frac{a_k^p}{r^p} + \dots + 1\right) \le \\ \le pr^{p-1}\sum_{r/2 \le a_k \le a_n}\frac{1}{a_k^p} \le \frac{pr^{p-1}n(r)}{(r/2)^p} = \frac{p2^p n(r)}{r}$$

і

$$\frac{1}{a_k}+\frac{z}{a_k^2}+\dots+\frac{z^{p-1}}{a_k^p}=\frac{1}{a_k}\frac{(z/a_k)^p-1}{z/a_k-1}=\frac{(z/a_k)^p-1}{z-a_k},$$

то (14) можна переписати у вигляді

$$\frac{\pi'(z)}{\pi(z)}=\sum_{a_k<r/2}\frac{(z/a_k)^p-1}{z-a_k}+\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{z^p}{a_k^p(z-a_k)}+O(l(r)),\quad r\to+\infty.$$

Виберемо тут $z=-r<0$. Тоді

$$\frac{\pi'(-r)}{\pi(-r)}=\sum_{a_k<r/2}\frac{(-1)^p(r/a_k)^p-1}{-(r+a_k)}+\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{(-1)^p r^p}{-a_k^p(r+a_k)}+O(l(r))=$$

$$=(-1)^{p-1}\left(\sum_{a_k<r/2}\frac{(r/a_k)^p+(-1)^{p-1}}{r+a_k}+\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{r^p}{a_k^p(r+a_k)}\right)+O(l(r))$$

при $r\to+\infty$. Але $(r/a_k)^p+(-1)^{p-1}\geq 2+(-1)^{p-1}>0$ для $a_k<r/2$. Тому

$$\frac{|\pi'(-r)|}{|\pi(-r)|}\geq\sum_{a_k<r/2}\frac{(r/a_k)^p(1+(-1)^{p-1}(a_k/r)^p)}{r+a_k}+$$

$$+\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{r^p}{a_k^p(r+a_k)}+O(l(r))\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^p}\sum_{a_k<r/2}\frac{r^p}{a_k^p(a_k+r)}+\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{r^p}{a_k^p(r+a_k)})+O(l(r))\geq$$

$$\geq\frac{r^{p-1}}{3\,2^{p-1}}\sum_{a_k<r/2}\frac{1}{a_k^p}+\frac{r^p}{2}\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{a_k^{p+1}}+O(l(r)),\quad r\to+\infty.$$

Тому, якщо умова

$$r^{p-1}\sum_{a_k<r/2}\frac{1}{a_k^p}+r^p\sum_{k=2(n+1)}^{\infty}\frac{1}{a_k^{p+1}}=O(l(r)),\quad r\to+\infty. \tag{15}$$

не виконується, то π не є обмеженого l-індексу.

Оскільки

$$r^{p-1}\sum_{r/2\leq a_k\leq a_n}\frac{1}{a_k^p}=O\left(\frac{n(r)}{r}\right),\quad r^p\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{a_k^{p+1}}=O\left(\frac{n(r)}{r}\right)$$

при $r\to+\infty$, то умови (15) і (12) рівносильні і теорему 2 доведено. □

4. Зауваження і доповнення

Оскільки з опуклості послідовності (a_n^2) випливає умова $a_n^2/n \nearrow \infty\,(n \to \infty)$, то у випадку $p = 1$ і додатності нулів з теореми 2 як наслідок отримуємо теорему 1.

Хоч умова $|a_n|^{p+1}/n \nearrow \infty\,(n \to \infty)$ є природною в теоремі 2, проте вона не є необхідною. Наприклад, правильним є таке

Твердження 1. *Припустимо, що послідовність (a_n) роду p складається зі скінченної кількості m підпослідовностей $(a_n^{(j)})$ роду p, і нехай $n^{(j)}(r)$ — лічильна функція послідовновносі $(a_n^{(j)})$. Якщо $|a_n^{(j)}|^{p+1}/n \nearrow \infty$ $(n \to \infty)$, і для кожного j, $1 \le j \le m$, виконується умова (12) з $n^{(j)}(r)$ замість $n(r)$, то канонічний добуток (8) є функцією обмеженого l-індексу з $l(r) \asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{r}$ $(r_0 \le r \to +\infty)$.*

Справді, нехай π_j — канонічні добутки роду p, побудовані за нулями $(a_n^{(j)})$. За теоремою 2 кожний з них є обмеженого l_j-індексу з $l_j(r) \asymp \dfrac{n_j(r)\ln n_j(r)}{r}$ $(r_0 \le r \to +\infty)$ і, оскільки $n_j(r) \le n(r)$, то він є обмеженого l-індексу з $l(r) \asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{r}$ $(r_0 \le r \to +\infty)$ (відомо [1, с. 23], що якщо $l_1(r) \le l_2(r)$, то з обмеженості l_1-індексу функції f випливає обмеженість її l_2-індексу). Але $\pi(z) = \prod_{1\le j\le m} \pi_j(z)$. Тому за теоремою множення [2, 1, с. 34] добуток π є обмеженого l-індексу з $l(r) \asymp \dfrac{n(r)\ln n(r)}{r}$ $(r_0 \le r \to +\infty)$.

Умова (12) виконується для досить широкого класу послідовностей. Найпростішою з таких послідовностей є (k^α), $1/(p+1) < \alpha < 1/p$, для якої $n(r) \asymp r^{1/\alpha}$ і

$$r^{p-1}\sum_{k=1}^{n(r)} \frac{1}{|a_k|^p} \asymp r^p \sum_{k=n(r)+1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{p+1}} \asymp$$
$$\asymp r^{1/\alpha-1} = o\left(\frac{n(r)\ln n(r)}{r}\right), \quad r \to +\infty.$$

Умова (12) не виконується, якщо $a_k = (k\ln k)^{1/p}$. Для цієї послідовності $n(r) \asymp \dfrac{r^p}{\ln r}$, $\dfrac{n(r)\ln n(r)}{r} \asymp r^{p-1}$, $r^{p-1}\sum\limits_{k=1}^{n(r)} \dfrac{1}{|a_k|^p} \asymp r^{p-1}\ln\ln r$, і $r^p \sum\limits_{k=n(r)+1}^{\infty} \dfrac{1}{|a_k|^{p+1}} \asymp \dfrac{r^{p-1}}{\ln r}$ при $r \to +\infty$. Невиконання умови (12) тут забезпечується швидким зростанням першого доданка у лівому боці (12).

Приклад послідовності $a_k = (k \ln k \ln^2 \ln k)^{1/(p+1)}$ показує, що і другий доданок у лівому боці (11) може відігрівати основну роль. Для цієї послідовності $n(r) \asymp \dfrac{r^{p+1}}{\ln r \ln^2 \ln r}$, $\dfrac{n(r) \ln n(r)}{r} \asymp \dfrac{r^p}{\ln^2 \ln r}$, $r^{p-1} \sum\limits_{k=1}^{n(r)} \dfrac{1}{|a_k|^p} \asymp \dfrac{r^p}{\ln r \ln^2 \ln r}$ і $r^p \sum\limits_{k=n(r)+1}^{\infty} \dfrac{1}{|a_k|^{p+1}} \asymp \dfrac{r^p}{\ln \ln r}$ при $r \to +\infty$.

Як у доведенні леми 5, можна показати, що за умови $|a_n|^{p+1}/n \nearrow \infty$ $(n \to \infty)$, існують функції $l_1 \in Q$ і $l_2 \in Q$ такі, що при $r \to +\infty$

$$l_1(r) \asymp r^{p-1} \sum_{k=1}^{n(r)} \frac{1}{|a_k|^p}, \quad l_2(r) \asymp r^p \sum_{k=n(r)+1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{p+1}}.$$

З іншого боку, застосовуючи методику, використану у доведенні того, що з умови (1) випливає умова (2), можна показати, що якщо $\dfrac{n(r) \ln n(r)}{r} = O(l_1(r))$, $r \to +\infty$, то $r^p \sum\limits_{k=n(r)+1}^{\infty} \dfrac{1}{|a_k|^{p+1}} = o(l_1(r))$, $r \to +\infty$, а якщо $\dfrac{n(r) \ln n(r)}{r} = O(l_2(r))$, $r \to +\infty$, то $r^{p-1} \sum\limits_{k=1}^{n(r)} \dfrac{1}{|a_k|^p} = o(l_2(r))$, $r \to +\infty$. Тому, використовуючи леми 1–5, можна довести правильність двох наступних тверджень.

Твердження 2. *Нехай $|a_n|^{p+1}/n \nearrow \infty\, (n \to \infty)$, а функція $l_1 \in Q$ така, що $l_1(r) \asymp r^{p-1} \sum\limits_{k=1}^{n(r)} \dfrac{1}{|a_k|^p}$ $(r_0 \le r \to +\infty)$. Тоді, якщо $\dfrac{n(r) \ln n(r)}{r} = O(l_1(r))$ $(r \to +\infty)$, то канонічний добуток (8) є функцією обмеженого l_1-індексу.*

Твердження 3. *Нехай $|a_n|^{p+1}/n \nearrow \infty\, (n \to \infty)$, а функція $l_2 \in Q$ така, що $l_2(r) \asymp r^p \sum\limits_{k=n(r)+1}^{\infty} \dfrac{1}{|a_k|^{p+1}}$ $(r_0 \le r \to +\infty)$. Тоді, якщо $\dfrac{n(r) \ln n(r)}{r} = O(l_2(r))\, (r \to +\infty)$, то канонічний добуток (8) є функцією обмеженого l_2-індексу.*

Нарешті, з доведення теореми 2 видно, що правильним є наступне

Твердження 4. *Якщо $|a_n|^{p+1}/n \nearrow \infty$ $(n \to \infty)$, $l \in Q$, $n(r) \ln n(r) = O(rl(r))$ і*

$$r^{p-1} \sum_{k=1}^{n(r)} \frac{1}{|a_k|^p} + r^p \sum_{k=n(r)+1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{p+1}} = O(l(r)), \quad r \to +\infty,$$

то канонічний добуток (8) *є функцією обмеженого l-індексу.*

Література

[1] М. М. Шеремета, М. Т. Бордуляк, *Обмеженість l-індексу цілих функцій Лагерра-Пойа* // Укр. мат. журн. **55** (2002), No 3, 91–99.

[2] М. М. Шеремета, А. Д. Кузык, *О логарифмической производной и нулях целых функций ограниченного l-индекса* // Сиб. мат. журн. **33** 1992, No 2, 142–150.

[3] M. T. Bordulyak, M. M. Sheremeta, *Problems in the theory of entire functions of bounded index* // Inter. conf. on complex anal. and potential theory. Kyiv, 7-12 August 2001. Abstracts. Kyiv. 2001, p. 8–9.

[4] M. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index.* Lviv: VNTL Publishers. 1999, 141 p.

Відомості про авторів

Мирослав Миколайович Шеремета

Львівський національний університет,
вул. Університетська 1,
79000, Львів,
Україна
E-Mail: m_m_sheremeta@list.ru

Анатолій Асірович Гольдберг

Department of Mathematics,
Bar-Ilan University,
52900 Ramat Gan,
Israel