Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 4, 443 – 466

Об оптимальной регулярности решений первой краевой задачи для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений

Сергей П. Дегтярев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Изучается первая краевая задача для вырождающегося эллиптического уравнения, возникающая, в частности, при изучении движения жидкости в морях или озерах. Указаны естественные весовые пространства Гельдера и Соболева, в которых оператор задачи является фредгольмовым и получены точные коэрцитивные оценки решения в указанных классах. Отмечено, в частности, что задача обладает свойством предельной гладкости решения даже при бесконечно гладких данных.

2000 MSC. 35J25, 35J70.

Ключевые слова и фразы. Вырождающееся эллиптическое уравнение, предельная регулярность, точные оценки.

1. Введение

При изучении геофизической модели, описывающей движение жидкости в морях или озерах (Lake equation — см. [1,2] и имеющуюся там библиографию) для функции тока $\Psi(x)$, $x \in \Omega \subset R^2$ возникает эллиптическая краевая задача вида

$$\nabla\Big(\frac{1}{h(x)}\nabla\Psi(x)\Big) = g(x), \quad x \in \Omega; \qquad \Psi = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.1}$$

где Ω — заданная область, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$, $g(x), h(x)$ — заданные функции, причем функция $h(x) \geq 0$ моделирует глубину моря или озера в соответствующей точке с координатой x. Ранее в ряде работ по изучению математических моделей в океанографии предполагалось, что $h(x) > 0$ в $\overline{\Omega}$, чтобы избежать изучения уравнений с особенностью. В работах [1,2] впервые был рассмотрен тот естественный случай, когда, в соответствии с реальным физическим смыслом, глубина

ISSN 1810 – 3200.

$h(x) \to 0$ при $x \to \partial\Omega$. При этом коэффициенты в уравнении (1.1) становятся неограниченными при $x \to \partial\Omega$. В работе [2] было доказано существование решения задачи (1.1) в пространстве $W_2^1(\Omega)$ с весом, а именно в пространстве

$$H(\Omega) = \{\Psi \in L_2(\Omega) : h^{-1/2}\nabla\Psi \in L_2(\Omega);\ \Psi = 0,\ x \in \partial\Omega\}. \tag{1.2}$$

Функция $h(x)$ предполагалась имеющей порядок расстояния до $\partial\Omega$ в окрестности $\partial\Omega$.

В работе [1] рассмотрено, в частности, более общее уравнение вида

$$-\nabla(\varphi^{-a}(x)\nabla\Psi(x)) = f(x), \quad x \in \Omega; \qquad \Psi = 0, \quad x \in \partial\Omega;\ a > 0, \tag{1.3}$$

где $\varphi(x)$ — достаточно гладкая функция, имеющая порядок расстояния до границы в окрестности $\partial\Omega$, $\varphi = 0$, $x \in \partial\Omega$, а функция $f \in L_p(\Omega)$.

Легко видеть, что уравнение в этой задаче можно записать в виде

$$-\varphi\triangle\Psi + a\nabla\varphi\nabla\Psi = g(x) \equiv \varphi^{a+1}f, \quad a > 0. \tag{1.4}$$

В соответствии с этим в упомянутой работе рассмотрена задача Дирихле с нулем на границе для более общего уравнения вида

$$\varphi(x)\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i\partial x_j} + a\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} = \varphi^{a+1}f, \tag{1.5}$$

где коэффициенты уравнения (1.5) удовлетворяют условиям типа (2.5), (2.6) и имеющим тот же смысл, $f \in L_p(\Omega)$. Для $p > 2$ была получена априорная оценка решения в некотором весовом пространстве Соболева в терминах функции $f(x)$ из (1.5). При этом принципиальным моментом в изучении уравнения (1.5) являлось то, что правая часть уравнения имеет специальный вид $g = \varphi^{a+1}f$ и, следовательно, имеет определенный (достаточно большой) порядок обращения в нуль на границе $\partial\Omega$. Это позволило произвести замену неизвестной функции $\Psi(x) = \varphi^{a+1}\Phi(x)$, что сводит уравнение (1.5) локально вблизи границы области к уравнению типа

$$-\varphi\triangle\Phi - b\nabla\varphi\nabla\Phi = f, \tag{1.6}$$

где $b = a + 2 > 0$.

Уравнение типа (1.6), отличающееся от (1.4) знаком коэффициента при $\nabla\varphi\nabla\Psi$, изучалось в [3]. Отметим, что уравнения (1.4) и (1.6), хотя и аналогичны по виду, принципиально отличаются по постановке краевых задач: для уравнения (1.6) нельзя задавать краевые условия Дирихле на $\partial\Omega$, тогда как их необходимо задавать для уравнения (1.4) (см. условия Фикеры в [4]).

Другим важным отличием краевых задач для уравнений (1.4) и (1.6) является то, что, как оказалось, уравнение (1.4) не может, вообще говоря, повысить гладкость решения выше, чем до $H^{1+a}(\overline{\Omega})$ (a — константа из (1.3), (1.4)) даже при бесконечно дифференцируемой границе, граничных данных и правой части уравнения, если эта правая часть не имеет указанного выше специального вида. (Здесь и ниже $H^l(\overline{\Omega}), l > 0$ — обычные пространства Гельдера.)

Целью данной работы является систематическое изучение свойств задачи Дирихле для уравнений типа (1.1), (1.4), (1.5) в классах гладких функций (весовых классах Гельдера) и весовых классах W_p^k, $p > 1$, при общей правой части уравнения (не имеющей специального вида (1.4), (1.5)), при которой решения краевой задачи сохраняют регулярность. Для уравнения (1.1) это, в частности, означает, что мы рассматриваем правую часть, удовлетворяющей условию $h^2(x)g(x) \in L_2(\Omega)$, а для уравнения (1.3) мы рассматриваем правую часть $f(x)$ такой, что $\varphi^{a+1}(x)f(x) \in W_p^k(\Omega), k \geq 0$ или $\varphi^{a+1}(x)f(x) \in H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$.

2. Постановка задачи и основной результат

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с границей класса $H^{k+2+\alpha}$. Здесь и всюду ниже $k \in N \cup \{0\}$, $\alpha \in (0,1)$. В области Ω рассмотрим следующую краевую задачу для нахождения неизвестной функции $u(x)$ $(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega)$:

$$Lu \equiv \varphi(x) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$u(x) = \psi(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Здесь $f(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции. Коэффициенты оператора L из (2.1) предполагаются принадлежащими классу $H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|_{\Omega}^{(k+\alpha)} + \sum_{i=1}^{n} |a_i|_{\Omega}^{(k+\alpha)} + |c|_{\Omega}^{(k+\alpha)} \leq C,$$

$$C^{-1}\xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq C\xi^2, \quad \xi \in R^n,$$

где здесь и ниже через C мы обозначаем все константы, которые либо являются абсолютными, либо зависят от параметров задачи (2.1), (2.2), но не зависят от f и ψ.

Функция $\varphi(x)$ предполагается имеющей следующие свойства:

$$\varphi \in H^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega}); \quad \varphi = 0,\ x \in \partial\Omega; \quad \varphi > 0,\ x \in \Omega; \quad |\nabla\varphi| > 0,\ x \in \partial\Omega, \tag{2.3}$$

то есть, в частности, функция $\varphi(x)$ имеет порядок расстояния до границы $\partial\Omega$.

Введем следующую функцию, определенную в окрестности границы $\partial\Omega$:

$$Z(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\varphi_{x_i}(x)}{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\varphi_{x_i}(x)\varphi_{x_j}(x)}. \tag{2.4}$$

Относительно коэффициентов уравнения (2.1) мы предполагаем, что выполнены условия (ср. [1,3])

$$\max_{x\in\partial\Omega} Z(x) = -a_0 < 0, \tag{2.5}$$

$$a_j(x) - Z(x)\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(x)\varphi_{x_i}(x) = O(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)) = O(\varphi). \tag{2.6}$$

Отметим, что эти условия инвариантны относительно гладкой замены координат в уравнении (2.1) и их смысл состоит в том, что оператор L в (2.1) локально вблизи границы $\partial\Omega$ после подходящей замены переменных близок к более простому оператору вида оператора уравнения (1.4) (для оператора в (1.4) $Z(x) \equiv -a$), и который в каждой данной точке границы в соответствующих локальных координатах в этой точке близок к оператору L_0 из (5.1). Отметим также и то, что, поскольку уравнение (2.1) вырождается на всей границе $\partial\Omega$ ввиду свойств функции $\varphi(x)$, то выражения типа (2.4) с необходимостью должны быть приняты во внимание при постановке краевой задачи (см. [4]). В нашем случае, когда выполнено (2.5) с $a_0 > 0$, мы задаем условие Дирихле на всей границе $\partial\Omega$.

Определим теперь весовые пространства функций, в которых мы будем рассматривать оператор L из (2.1). Пусть $H_{\varphi}^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$ — банахово пространство непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций, для которых конечна норма

$$|u|_{\varphi,\Omega}^{(k+2+\alpha)} \equiv |u|_{\Omega}^{(k+1+\alpha)} + |\varphi u|_{\Omega}^{(k+2+\alpha)}, \tag{2.7}$$

где $|u|_{\Omega}^{l}$ — обычная норма в пространстве Гельдера $H^l(\overline{\Omega})$. Пусть, далее, $W_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$ — банахово пространство измеримых в Ω функций с конечной нормой

$$\|u\|_{p,\varphi,\Omega}^{(k+2)} = \|u\|_{p,\Omega}^{(k+1)} + \|\varphi u\|_{p,\Omega}^{(k+2)}, \tag{2.8}$$

где $\|u\|_{p,\Omega}^{(k)}$ и $\|u\|_{p,\Omega}$ — обычные нормы в пространствах $W_p^k(\Omega)$ и $L_p(\Omega)$.

Через $\dot{H}_\varphi^{k+2+\alpha}(\Omega)$ и $\dot{W}_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$ мы будем обозначать замкнутые подпространства пространств $H_\varphi^{k+2+\alpha}(\Omega)$ и $W_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$ соответственно, состоящие из функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$.

Примем также следующее соглашение. Символом L в зависимости от контекста мы будем обозначать как дифференциальное выражение в (2.1), так и оператор, определенный на функциях из функциональных пространств (2.7) или (2.8), и ставящий им в соответствие значение выражения (2.1) и их граничные значения на $\partial\Omega$. Легко видеть, что L является линейным непрерывным оператором в пространствах

$$W_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega) \to W_p^k(\Omega) \times W_p^{k+1-1/p}(\partial\Omega),$$

$$H_\varphi^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega}) \to H^{k+\alpha}(\overline{\Omega}) \times H^{k+1+\alpha}(\partial\Omega).$$

Сужение оператора L на $\dot{H}_\varphi^{k+2+\alpha}(\Omega)$ и на $\dot{W}_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$ мы будем рассматривать как оператор из $\dot{W}_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$ в $W_{p,\varphi}^{k}(\Omega)$ и из $\dot{H}_\varphi^{k+2+\alpha}(\Omega)$ в $H_\varphi^{k+\alpha}(\Omega)$ соответственно.

Сформулируем теперь основные утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены сформулированные выше условия на коэффициенты оператора L из (2.1), в том числе условия (2.5), (2.6). Пусть $\alpha \in (0,1) \cap (0, a_0)$, где a_0 — число из условия (2.5). Пусть, далее, выполнено условие на коэффициент $c(x)$ в уравнении (2.1):*

$$c(x) \le -c_0 < 0, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{2.9}$$

Тогда, если k таково, что $k < a_0$, то при любой правой части $f \in W_p^k(\Omega)$ в (2.1) и любых граничных данных $\psi \in W_p^{k+1-1/p}(\partial\Omega)$ в (2.2) задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение из пространства $W_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$, причем справедлива оценка

$$\|u\|_{p,\varphi,\Omega}^{(k+2)} \le C\left(\|f\|_{p,\Omega}^{(k)} + \|\psi\|_{p,\partial\Omega}^{(k+1-1/p)}\right). \tag{2.10}$$

Если же $k \ge a_0$, то последнее утверждение неверно.

Далее, если k и α таковы, что $k+\alpha < a_0$, то при любой правой части $f \in H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ в (2.1) и любых граничных данных $\psi \in H^{k+1+\alpha}(\partial\Omega)$ в (2.2) задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение из пространства $H_\varphi^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$, причем справедлива оценка

$$|u|_{\varphi,\Omega}^{(k+2+\alpha)} \le C\left(|f|_{\Omega}^{(k+\alpha)} + |\psi|_{\partial\Omega}^{(k+1+\alpha)}\right). \tag{2.11}$$

Если же $k+\alpha \ge a_0$, то это утверждение неверно.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *за исключением условия* (2.9), *и пусть* $k+\alpha < a_0$. *Тогда существует такой не более чем счетный набор комплексных чисел* λ_i, $\lambda_i \to \infty$ *при* $i \to \infty$, *что при* $\lambda \neq \lambda_i$ *задача*

$$Lu - \lambda u = f, \quad x \in \Omega; \qquad u = \psi, \quad x \in \partial\Omega \tag{2.12}$$

однозначно разрешима в описанных выше пространствах при f *и* ψ *из соответствующих классов, причем справедливы оценки* (2.10), (2.11).

Если же $\lambda = \lambda_i$, *то оператор* $L - \lambda I$ *является фредгольмовым в описанных выше пространствах, то есть имеет нетривиальное конечномерное ядро и конечномерное коядро, причем их размерности совпадают.*

При этом сам набор чисел λ_i, *а также размерности ядра и коядра оператора* $L - \lambda I$ *не зависят от того, в каком из пространств* $W^{k+2}_{p,\varphi}(\Omega)$ *или* $H^{k+2+\alpha}_{\varphi}(\overline{\Omega})$ *мы его рассматриваем (в частности, они не зависят от* k, p *и* α*).*

При любом λ *справедливы следующие априорные оценки решения задачи* (2.12):

$$\begin{aligned} \|u\|^{(k+2)}_{p,\varphi,\Omega} &\leq C_\lambda \left(\|f\|^{(k)}_{p,\Omega} + \|\psi\|^{(k+1-1/p)}_{p,\partial\Omega} + \|u\|_{p,\Omega} \right), \\ |u|^{(k+2+\alpha)}_{\varphi,\Omega} &\leq C_\lambda \left(|f|^{(k+\alpha)}_{\Omega} + |\psi|^{(k+1+\alpha)}_{\partial\Omega} + |u|_{0,\Omega} \right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

3. О граничных условиях (2.2)

Несложно указать такой линейный непрерывный оператор P (оператор продолжения функций с границы $\partial\Omega$ внутрь Ω), что при $\partial\Omega \in H^{k+2+\alpha}$ и $\varphi \in H^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$

$$P : W^{k+1-1/p}(\partial\Omega) \to W^{k+2}_{p,\varphi,\Omega}(\Omega),\ H^{k+1+\alpha}(\partial\Omega) \to H^{k+2+\alpha}_{\varphi}(\overline{\Omega});$$

$$P\psi = \psi, x \in \partial\Omega.$$

Действительно, для любой ψ из соответствующего класса положим по определению $P\psi = w(x)$, где $w(x)$ — решение следующей задачи Дирихле

$$\triangle w(x) = 0, \quad x \in \Omega; \qquad w = \psi, \quad x \in \partial\Omega.$$

Как хорошо известно из теории эллиптических уравнений, такая задача имеет единственное решение, причем

$$\|w\|^{(k+1)}_{p,\Omega} \leq C\,\|\psi\|^{(k+1-1/p)}_{p,\partial\Omega}, \qquad |w|^{(k+1+\alpha)}_{\Omega} \leq C\,|\psi|^{(k+1+\alpha)}_{\partial\Omega}. \tag{3.1}$$

Функция $\varphi(x)w(x)$ при этом удовлетворяет задаче

$$\triangle(\varphi w) = F \equiv 2\nabla\varphi\nabla w + w\triangle\varphi, \quad x \in \Omega; \qquad \varphi w = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

причем

$$\|F\|_{p,\Omega}^{(k)} \le C\,\|w\|_{p,\Omega}^{(k+1)} \le C\,\|\psi\|_{p,\partial\Omega}^{(k+1-1/p)},$$
$$|F|_{\Omega}^{(k+\alpha)} \le C\,|w|_{\Omega}^{(k+1+\alpha)} \le C\,|\psi|_{\partial\Omega}^{(k+1+\alpha)}.$$

Поэтому

$$\|\varphi w\|_{p,\Omega}^{(k+2)} \le C\,\|\psi\|_{p,\partial\Omega}^{(k+1-1/p)}, \; |\varphi w|_{\Omega}^{(k+2+\alpha)} \le C\,|\psi|_{\partial\Omega}^{(k+1+\alpha)}.$$

Вместе с неравенствами (3.1) это по определению означает ограниченность оператора P в указанных пространствах.

В силу наличия такого оператора P, задача (2.1), (2.2) сводится к задаче с нулевыми граничными данными. При этом, как легко видеть, все утверждения теорем 2.1 и 2.2 эквивалентны таким же утверждениям об операторе L, действующем в пространствах $\dot{W}_{p,\phi}^{k+2}(\Omega)$ или $\dot{H}_{\varphi}^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать оператор L именно в этих пространствах и считать $\psi = 0$ в (2.2).

4. О предельной гладкости решений задачи (2.1), (2.2)

Рассмотрим несколько примеров, моделирующих задачу (2.1), (2.2) в простейшем случае и показывающих необходимость требования $k + \alpha < a_0$ в теоремах 1.1 и 1.2.

Пусть в этом пункте x — одномерная переменная (число), $x \in [0, 1]$. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ следующую краевую задачу:

$$xu''(x) - au'(x) = f(x), \quad x \in (0, 1); \qquad u(0) = u(1) = 0, \tag{4.1}$$

где $a = \mathrm{const} > 0$.

Пусть сначала $f(x) = f_1(x) \equiv 1$. Тогда, умножая уравнение (4.1) на $x^{-(a+1)}$ и интегрируя, находим соответствующее решение рассматриваемой краевой задачи:

$$u_1(x) = -\frac{x}{a} + \frac{1}{a}x^{a+1}.$$

Следовательно, при нецелом $a > 0$ и $f(x) \in C^\infty([0, 1])$ решение $u_1(x)$ имеет гладкость не выше, чем $H^{1+a}([0, 1])$.

Покажем теперь, что предельная гладкость $H^{1+a}([0, 1])$ недостижима, вообще говоря, при $f(x)$ из “соответствующего” класса

$H^a([0,1])$. Положим $f(x) = f_2(x) = x^a$. Тогда соответствующее решение $u_2(x)$ есть

$$u_2(x) = \int\limits_0^x \xi^a \ln \xi d\xi + C_2 x^{a+1}, \qquad C_2 = -\int\limits_0^1 \xi^a \ln \xi d\xi,$$

$$u_2'(x) = x^a \ln x + (a+1) C_2 x^a,$$

и мы видим, что при правой части в (4.1) из $H^a([0,1])$ решение не принадлежит $H^{1+a}([0,1])$, но принадлежит $H^{k+1+\alpha}([0,1])$ при любых $k+\alpha < a$. Это справедливо независимо от того, является ли a целым или нет. При целом $a > 0$ функция $f_2(x) \in C^\infty([0,1])$, поэтому этот же пример показывает, что при целом a и при $f(x) \in C^\infty([0,1])$ решение задачи (4.1) принадлежит классу $H^{k+1+\alpha}([0,1])$ при $k+\alpha < a$, но не принадлежит, вообще говоря, даже классу $H^{1+a}([0,1])$.

Нетрудно видеть, что рассмотренные примеры могут служить также примерами ограниченной параметром a гладкости решений задачи (4.1) в классах $W_p^k([0,1])$ (функция $f_1(x)$, например, принадлежит $W_p^k([0,1])$ при всех p и k), хотя можно привести и другие примеры.

Таким образом, все вышесказанное показывает, что требование $k+\alpha < a_0$, $\alpha \in (0,1) \cap (0,a_0)$, в теоремах 1.1 и 1.2 является существенным и не может быть ослаблено.

5. Модельная задача в полупространстве

Обозначим $R_+^n = \{x = (x', x_n) \in R^n : x_n > 0\}$. Пусть $a > 0$ фиксировано и пусть k и α таковы, что $k+\alpha < a$. Пусть, далее, $f(x)$ — функция с ограниченным носителем, определенная в $\overline{R_+^n}$. Рассмотрим в $\overline{R_+^n}$ следующую задачу для неизвестной функции $u(x)$:

$$L_0 u \equiv x_n \triangle u - a u_{x_n} = f(x), \quad x \in R_+^n; \tag{5.1}$$

$$u(x',0) = 0, \quad x_n = 0, \qquad \big(x' \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\big)\,;$$

$$|u(x)| \le C, \quad |x| \to \infty.$$

Лемма 5.1. *Если $f(x) \in C_0^\infty(\overline{R_+^n})$, то существует решение задачи (5.1) и оно представимо в виде*

$$u(x) = \int\limits_{R_+^n} G(x,y) f(y)\, dy, \tag{5.2}$$

где

$$G(x,y)=Cx_n^{1+a}\int\limits_0^1 \frac{[\theta(1-\theta)]^{a/2}\,d\theta}{\left(|y-x|^2+4x_ny_n\theta\right)^{\frac{n+a}{2}}}. \tag{5.3}$$

Доказательство этого утверждения, по существу, содержится в [3]. В этой работе получено представление решения задачи типа (5.1) с заменой оператора L_0 на оператор $M_0u\equiv x_n\triangle u+bu_{x_n}$, $b>0$. В случае, когда $f\in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$, замена неизвестной функции $u(x)=x_n^{a+1}v(x)$ сводит уравнение в (5.1) к уравнению $M_0v=fx_n^{-(a+1)}\in C_0^\infty(\overline{R^n_+})$ с $b=a+2$. Отсюда следует представление (5.2).

Лемма 5.2. *Для функции* $G(x,y)$ *из* (5.3) *справедливы оценки:*

$$|G(x,y)|\le C_\omega x_n^{-1+\omega}\,|y-x|^{-(n-2+\omega)},\ \omega\in(0,2+a]; \tag{5.4}$$

$$|\nabla_xG|+|\nabla_yG|\le C_\omega x_n^{-1+\omega}\,|y-x|^{-(n-1+\omega)},\ \omega\in[0,1+a]; \tag{5.5}$$

$$\left|\frac{\partial^2G}{\partial x_j\partial x_i}\right|+\left|\nabla_y\frac{\partial G}{\partial x_k}\right|\le C_\omega x_n^{-1+\omega}\,|y-x|^{-(n+\omega)}, \tag{5.6}$$

$$i<n,\quad j,k=\overline{1,n},\quad \omega\in[0,1+a];$$

$$\left|\frac{\partial^2G}{\partial x_n\partial x_n}\right|\le C_{\omega_1}x_n^{-2+\omega_1}\,|y-x|^{-(n-1+\omega_1)}+C_{\omega_2}x_n^{-1+\omega_2}\,|y-x|^{-(n+\omega_2)}, \tag{5.7}$$

$$\omega_1,\omega_2\in[0,1+a];$$

$$\left|\frac{\partial^3G}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\right|+\left|\frac{\partial^3G}{\partial x_i\partial x_j\partial y_k}\right|\le C_\omega x_n^{-1+\omega}\,|y-x|^{-(n+1+\omega)}, \tag{5.8}$$

$$i,j<n,\ k=\overline{1,n},\ \omega\in[0,1+a].$$

Доказательство. Докажем оценку (5.4). Если $\frac12x_n\le|y-x|$, то для $\omega\le2+a$

$$|G(x,y)|\le Cx_n^{1+a}\,|y-x|^{-n-a}\int\limits_0^1[\theta(1-\theta)]^{a/2}\,d\theta$$
$$=Cx_n^{-1+\omega}\left(x_n^{2+a-\omega}\,|y-x|^{-n-a}\right)\le Cx_n^{-1+\omega}\,|y-x|^{-(n-2+\omega)}.$$

Если же $|y-x|\le\frac12x_n$, то, как легко видеть, $C^{-1}\le x_n/y_n\le C$ и для $\omega\in(0,2+a]$ мы имеем, так как $x_ny_n\ge C^{-1}x_n^2$:

$$|G| = Cx_n^{1+a}\left|\int\limits_0^1 \frac{[\theta(1-\theta)]^{a/2}\,d\theta}{\Big(|y-x|^2+4x_ny_n\theta\Big)^{\frac{n-2+\omega}{2}}\Big(|y-x|^2+4x_ny_n\theta\Big)^{\frac{2-\omega+a}{2}}}\right|$$

$$\le Cx_n^{1+a}\,|y-x|^{-(n-2+\omega)}\,x_n^{-(2-\omega+a)}\int\limits_0^1 \theta^{-1+\omega/2}(1-\theta)^{a/2}d\theta$$

$$= Cx_n^{-1+\omega}\,|y-x|^{-(n-2+\omega)}\,.$$

Таким образом, оценка (5.4) доказана. Оценки (5.5)–(5.8) доказываются аналогично путем непосредственного дифференцирования функции $G(x,y)$. Лемма доказана. □

Заметим, что функция $G(x,y)$ интегрируема по y на бесконечности. Более точно, если $R>0$, то при $|x|\le R$ и $|y|\ge 2R$

$$|G(x,y)| + |\nabla_x G(x,y)| \le C_R\,|y|^{-(n+a)}\,.$$

Заметим также, что ввиду последней оценки и в силу оценки (5.4) с $\omega = 1+\alpha$, интеграл в представлении (5.2) существует при любой ограниченной гладкой функции f и удовлетворяет граничному условию в (5.1). Кроме того, оценка (5.5) означает, в частности, что интеграл

$$\nabla u(x) = \int\limits_{R_+^n} \nabla_x G(x,y) f(y)\,dy$$

является интегралом со слабой особенностью при x, лежащих строго внутри R_+^n. Эти обстоятельства позволяют несложными рассуждениями с помощью обращения к понятию обобщенного решения уравнения (5.1) и предельного перехода доказать, что интеграл (5.2) с ограниченной $f\in C^\infty(\overline{R_+^n})$ удовлетворяет уравнению (5.1) внутри R_+^n. Если, кроме того, функция $f(x)$ финитна по x_n, то есть $\operatorname{supp} f\subset\{0\le x_n\le R\}$, то интеграл (5.2) удовлетворяет и условию ограниченности на бесконечности из (5.1), и, таким образом, представление (5.2) для решения задачи (5.1) справедливо не только для $f\in C_0^\infty$, но и для ограниченных $f\in C^\infty$ с носителем в $\{0\le x_n\le R\}$. Сформулируем это утверждение в виде леммы.

Лемма 5.3. *Представление* (5.2) *для решения задачи* (5.1) *справедливо для любой ограниченной* $f(x)\in C^\infty(\overline{R_+^n})$ *такой, что* $\operatorname{supp} f\subset\{0\le x_n\le R\}$ *с некоторым* $R>0$.

Рассмотрим свойства потенциала (5.2) в пространствах Гельдера. Пусть для $R>0$ здесь и далее $B_R=\{x\in R^n : |x|\le R, x_n\ge 0\}$ — замкнутый полушар в пространстве $\overline{R_+^n}$ с центром в нуле.

Лемма 5.4. *Пусть в* (5.1) $f(x)$ *имеет ограниченный в* $\overline{R^n_+}$ *носитель,* $supp f \subset B_{R_0}, R_0 > 0$, *и* $f \in H^{k+\alpha}(\overline{R^n_+})$, $k+\alpha < a$. *Тогда задача* (5.1) *имеет решение, которое представляется в виде* (5.2), *и при любом* $R \geq R_0$ *для функции* $u(x)$, *определенной потенциалом* (5.2), *справедлива оценка*

$$|u|^{(k+2+\alpha)}_{x_n, R^n_+\cap B_{2R}} \equiv |u|^{(k+1+\alpha)}_{R^n_+\cap B_{2R}} + |x_n u|^{(k+2+\alpha)}_{R^n_+\cap B_{2R}} \leq C_R\, |f|^{(k+\alpha)}_{R^n_+}\,. \tag{5.9}$$

Доказательство. Ввиду леммы 5.3 и возможности предельного перехода, достаточно, очевидно, доказать оценку (5.9). Пусть сначала $k = 0$, то есть $f \in H^\alpha(\overline{R^n_+})$. Оценим константы Гельдера производных $u_{x_i}(x)$. Ввиду оценки (5.5) мы можем дифференцировать $u(x)$ под знаком интеграла в (5.2), то есть

$$u_{x_i}(x) = \int\limits_{R^n_+} G_{x_i}(x,y) f(y)\, dy.$$

Пусть $\eta(r)$ — функция класса $C^\infty([0,\infty))$ такая, что $\eta(r) \equiv 1$ при $0 \leq r \leq R$ и $\eta(r) \equiv 0$ при $r \geq 2R$. Тогда, так как $\eta(y_n) \equiv 1$ на носителе $f(y)$, имеем

$$u_{x_i}(x) = \int\limits_{R^n_+} G_{x_i}(x,y)\,[f(y) - f(x)]\,\eta(y_n)\, dy + f(x) F_i(x_n) \equiv I(x) + J(x), \tag{5.10}$$

где

$$F_i(x_n) \equiv \int\limits_{R^n_+} G_{x_i}(x,y)\eta(y_n)\, dy = \frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_{R^n_+} G(x,y)\eta(y_n)\, dy \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(x_n),$$

так как, в силу определения $G(x,y)$, легко видеть, что функция $\Phi(x_n)$ $= \int_{R^n_+} G(x,y)\eta(y_n)\, dy$ не зависит от "касательных" переменных x'.

В силу леммы 5.3, функция $\Phi(x_n)$ является решением задачи (5.1) с правой частью уравнения $f(x) = \eta(x_n)$. Поскольку эта функция зависит только от x_n, то уравнение в (5.1) превращается в обыкновенное и легко может быть проинтегрировано (умножением обеих частей уравнения на $x_n^{-(a+1)}$). С учетом граничных условий и условия на бесконечности это дает

$$\Phi(x_n) = -\int\limits_0^{x_n} \zeta^a d\zeta \int\limits_\zeta^{2R} \eta(\xi)\xi^{-a-1} d\xi. \tag{5.11}$$

Следовательно, для $i < n$, $F_i = \partial\Phi/\partial x_i \equiv 0$, а для $i = n$

$$F_n(x_n) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_n} = -\frac{1}{a}\eta(x_n) - \frac{x_n^a}{a}\int\limits_{x_n}^{2R}\eta'(\xi)\xi^{-a}d\xi,$$

где было применено интегрирование по частям.

Легко видеть, что $F_n(x_n) \in H^\alpha$ для любого $\alpha \le a$, но показатель a при нецелом a является предельным для гладкости $F_n(x_n)$, так как при $x_n < R$ выполнено $\eta'(x_n) \equiv 0$ и, следовательно,

$$F_n(x_n) = -\frac{1}{a} - C_n x_n^a, \qquad C_n \equiv \frac{1}{a}\int\limits_{R}^{2R}\eta'(\xi)\xi^{-a}d\xi. \tag{5.12}$$

Таким образом, в силу свойств $F_i(x_n)$ и условия $\alpha < a$, для функции $J(x)$ в представлении (5.10), очевидно, выполнено

$$|J(x)|^{(\alpha)}_{B_{2R}} \le C\,|f(x)|^{(\alpha)}_{R^n_+}. \tag{5.13}$$

Рассмотрим теперь $I(x)$ из (5.10). Оценим сначала $|I(x)|$. Имеем для $x_n > 0$:

$$I(x) = \int\limits_{|x-y|<x_n} G_{x_i}(x,y)\,[f(y)-f(x)]\,\eta\,dy + \int\limits_{|x-y|>x_n} G_{x_i}(x,y)\,[f(y)-f(x)]\,\eta\,dy \equiv I_1 + I_2.$$

Для I_1, пользуясь оценкой (5.5) с $\omega = 1$, ввиду свойств $f(x)$ получаем

$$|I_1| \le C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\int\limits_{|x-y|<x_n}|x-y|^{-n+\alpha}\,dy \le C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,x_n^\alpha.$$

Для оценки I_2 воспользуемся той же оценкой (5.5), но с $\omega = 1+\beta$, где β выберем из интервала $(\alpha, \min\{1,a\})$ (это возможно, так как $\alpha < a$). Имеем

$$|I_2| \le C x_n^\beta\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\int\limits_{|x-y|>x_n}|x-y|^{-n-(\beta-\alpha)}\,dy \le C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,x_n^\beta x_n^{-(\beta-\alpha)} = C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,x_n^\alpha.$$

Из полученных оценок для I_1 и I_2 следует, что

$$|I(x)| \leq C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\, x_n^\alpha. \tag{5.14}$$

Пусть теперь $x, \overline{x} \in R^n_+$ — две произвольные точки, причем, не ограничивая общности, $\overline{x}_n \geq x_n$. Оценивая константу Гельдера $I(x)$, рассмотрим две возможности. Пусть сначала $|x-\overline{x}| \geq \frac{1}{2}x_n$. Тогда, если $x_n \geq \frac{1}{2}\overline{x}_n$, то $|x-\overline{x}| \geq \frac{1}{4}\overline{x}_n$. Если же $x_n < \frac{1}{2}\overline{x}_n$, то $\overline{x}_n - x_n > \frac{1}{2}\overline{x}_n$ и тем более $|x-\overline{x}| \geq \frac{1}{2}\overline{x}_n$. Таким образом, в этом случае $|x-\overline{x}| \geq \frac{1}{4}\overline{x}_n$ и мы имеем

$$\frac{|I(\overline{x})-I(x)|}{|x-\overline{x}|^\alpha} \leq \frac{|I(\overline{x})|}{|x-\overline{x}|^\alpha} + \frac{|I(x)|}{|x-\overline{x}|^\alpha} \leq C\left(\frac{|I(\overline{x})|}{\overline{x}_n^\alpha} + \frac{|I(x)|}{x_n^\alpha}\right) \leq C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}$$

в силу оценки (5.14).

Пусть теперь $|x-\overline{x}| < \frac{1}{2}x_n$. Представим разность $I(\overline{x}) - I(x)$ в следующем виде

$$\begin{aligned}
I(\overline{x}) - I(x) = {} & [f(x) - f(\overline{x})]\,\frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}\int\limits_{R^n_+} G(\overline{x},y)\eta\,dy \\
& + \int\limits_{|x-y|>2|x-\overline{x}|}\left[\frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}G(\overline{x},y) - \frac{\partial}{\partial x_i}G(x,y)\right][f(y)-f(x)]\,\eta\,dy \\
& + [f(\overline{x}) - f(x)]\int\limits_{|x-y|<2|x-\overline{x}|}\frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}G\eta\,dy \\
& + \int\limits_{|x-y|<2|x-\overline{x}|}\frac{\partial}{\partial \overline{x}_i}G(\overline{x},y)\,[f(y)-f(\overline{x})]\,\eta\,dy \\
& - \int\limits_{|x-y|<2|x-\overline{x}|}\frac{\partial}{\partial x_i}G(x,y)\,[f(y)-f(x)]\,\eta\,dy \\
& \equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждый из интегралов I_k в отдельности. Для I_1, ввиду указанных выше свойств функции $F_i(x_n)$, выполнено

$$|I_1| \leq |f(x) - f(\overline{x})|\,|F_i(\overline{x}_n)| \leq C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,|x-\overline{x}|^\alpha\,.$$

Для оценки I_2 мы, в зависимости от того $i \neq n$ или $i = n$, пользуемся либо оценкой (5.6) с $\omega = 1$, либо оценкой (5.7) с $\omega_1 = 1+\beta$, $\omega_2 = 1$, причем β выбираем из интервала $(\alpha, min\{1, a\})$. В любом из этих случаев по теореме о среднем имеем с некоторым $x_\theta \in [x, \overline{x}]$:

$$|I_2| \le C\,|x-\overline{x}| \int\limits_{|x-y|>2|x-\overline{x}|} \left|\nabla_x \frac{\partial}{\partial x_i} G(x_\theta, y)\right| |f(y)-f(x)|\;dy$$

$$\le C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,|x-\overline{x}| \int\limits_{|x-y|>2|x-\overline{x}|} \Big\{ \left[(x_\theta)_n\right]^{-1+\beta} |x_\theta - y|^{-(n+\beta)}$$

$$+\,|x_\theta - y|^{-(n+1)} \Big\}\,|x-y|^\alpha\;dy \equiv C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,(I_2^{(1)} + I_2^{(2)}).$$

Заметим, что, в силу условия $|x-\overline{x}| < \frac{1}{2}x_n$, выполнено $C^{-1} \le x_\theta/x_n \le C$, и на множестве $\left\{y \in R^n_+ : |x-y| > 2\,|x-\overline{x}|\right\}$ величины $|x_\theta - y|$ и $|x-y|$ эквивалентны, то есть $C^{-1} \le |x_\theta - y|\,/\,|x-y| \le C$. Поэтому для $I_2^{(1)}$ справедлива оценка

$$I_2^{(1)} \le C x_n^{-1+\beta}\,|x-\overline{x}| \int\limits_{|x-y|>2|x-\overline{x}|} |x-y|^{-n-(\beta-\alpha)}\,dy$$

$$= C x_n^{-1+\beta}\,|x-\overline{x}|^{1-(\beta-\alpha)} = C\left(\frac{|x-\overline{x}|}{x_n}\right)^{1-\beta} |x-\overline{x}|^\alpha \le C\,|x-\overline{x}|^\alpha\,.$$

Аналогично для интеграла $I_2^{(2)}$

$$I_2^{(2)} \le C\,|x-\overline{x}| \int\limits_{|x-y|>2|x-\overline{x}|} |x-y|^{-n-(1-\alpha)}\,dy = C\,|x-\overline{x}|^\alpha\,.$$

Таким образом, для I_2 выполнено неравенство

$$|I_2| \le C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,|x-\overline{x}|^\alpha\,.$$

Далее, для интеграла I_3, в силу оценки (5.5) с $\omega = 1-\beta$, $\beta \in (0,1)$, имеем

$$|I_3| \le C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,|x-\overline{x}|^\alpha\,x_n^{-\beta} \int\limits_{|x-y|<2|x-\overline{x}|} |x-y|^{-n+\beta}\,dy$$

$$= C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,|x-\overline{x}|^\alpha \left(\frac{|x-\overline{x}|}{x_n}\right)^\beta \le C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,|x-\overline{x}|^\alpha\,.$$

Интегралы I_4 и I_5 оцениваются аналогично. Оценим, например, I_4:

$$|I_4| \le C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+} \int\limits_{|x-y|<2|x-\overline{x}|} |\overline{x}-y|^{-n+\alpha}\,dy$$

$$\le C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\int\limits_{|\overline{x}-y|<3|x-\overline{x}|}|\overline{x}-y|^{-n+\alpha}\,dy=C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,|x-\overline{x}|^{\alpha}\,,$$

где мы воспользовались оценкой (5.5) с $\omega=1$.

Таким образом, объединяя полученные оценки для $I_k, k=\overline{1,5}$, получаем

$$|I(\overline{x})-I(x)|\le C\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,|x-\overline{x}|^{\alpha}\,,$$

что означает оценку константы Гельдера функции $I(x)$. Так как, в силу (5.14), $I(x)=0$ при $x_n=0$, то

$$|I(x)|^{(\alpha)}_{B_{2R}\cap R^n_+}\le C_R\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,,$$

что, вместе с неравенством (5.13) и условием $u(x',0)=0$, означает, что

$$|u(x)|_{0,B_{2R}\cap R^n_+}+|u_{x_i}(x)|^{(\alpha)}_{B_{2R}\cap R^n_+}\le C_R\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,,\tag{5.15}$$

то есть оценку первого слагаемого в левой части (5.9) при $k=0$.

Оценки вторых производных с весом x_n также можно получить непосредственно из потенциала (5.2), используя лемму 5.2 и представление

$$u_{x_ix_j}(x)=\int\limits_{R^n_+}G_{x_ix_j}(x,y)\,[f(y)-f(x)]\,\eta(y_n)\,dy+f(x)\frac{\partial}{\partial x_j}F_i(x_n),$$

которое следует из (5.10) дифференцированием при достаточно гладкой f и предельным переходом. Но проще поступить по-другому. Пусть $\zeta(x)$ — срезающая функция, причем $\zeta(x)\equiv 1$ на B_{2R}, $\zeta(x)\equiv 0$ вне B_{3R}. Тогда, как нетрудно видеть, функция $v(x)=x_nu(x)\zeta(x)$ удовлетворяет задаче

$$\triangle v=F(x)\equiv x_nu\triangle\zeta+2\nabla\zeta\nabla(x_nu)+(a+2)u_{x_n}\zeta+\zeta f,\quad x\in R^n_+;$$

$$v=0,\quad x_n=0;\qquad |v|\le C,\quad |x|\to\infty;$$

причем $F(x)$ финитна и

$$|F(x)|^{(\alpha)}_{R^n_+}\le C\left(|u|^{(\alpha)}_{B_{3R}\cap R^n_+}+|\nabla u|^{(\alpha)}_{B_{3R}\cap R^n_+}+|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\right)\le C_R\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}$$

по доказанному в (5.15). Следовательно, как это хорошо известно для оператора Лапласа,

$$|v|^{(2+\alpha)}_{B_{3R}\cap R^n_+}\le C_R\,|F(x)|^{(\alpha)}_{R^n_+}\le C_R\,|f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,.$$

То есть, в частности,

$$|x_n u(x)|^{(2+\alpha)}_{B_{2R}\cap R^n_+} \leq C_R\, |f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,, \tag{5.16}$$

что завершает доказательство (5.9) при $k=0$.

Доказательство оценки (5.9) при $0<k<a$ получается по индукции. Пусть $k=1<a$, то есть $f\in H^{1+\alpha}(\overline{R^n_+})$. Если $i\neq n$, то функция $u_{x_i}(x)$ удовлетворяет тому же уравнению (5.1), но с правой частью $f_{x_i}(x)$ (так как строго внутри R^n_+ уравнение (5.1) невырождено и гладкость решения определяется гладкостью правой части), граничному условию $u_{x_i}=0$ при $x_n=0$ и ограничена на бесконечности (последнее легко следует, как отмечалось выше, из свойств потенциала (5.2) с финитной плотностью). Следовательно, по уже доказанному, для функции $v_i(x)=u_{x_i}(x)$ справедливы оценки (5.15) и (5.16) с заменой f на f_{x_i}.

Если же $i=n$, то функция $v_n(x)=u_{x_n}(x)$ удовлетворяет, как легко убедиться дифференцированием, уравнению

$$x_n\triangle v_n-(a-1)(v_n)_{x_n}=\widetilde{f}\equiv f_{x_n}-\sum_{i=1}^{n-1}(v_i)_{x_i}, \tag{5.17}$$

где, по доказанному выше,

$$\left|\widetilde{f}\right|^{(\alpha)}_{B_{2R}\cap R^n_+} \leq C_R\, |f|^{(\alpha)}_{R^n_+}\,.$$

Кроме того, из представления (5.10) с учетом (5.12) и оценки (5.14), следует, что при $x_n=0$

$$v_n(x',0)=-\frac{1}{a}f(x).$$

То есть функция v_n удовлетворяет уравнению (5.17) типа (5.1) и имеет граничные условия при $x_n=0$ из класса $H^{1+\alpha}$. При этом правая часть $\widetilde{f}$ в (5.17), вообще говоря, не финитна. Рассматривая, как и выше, срезку $w(x)=\zeta(x)v_n(x)$ и снимая граничные условия способом, указанным в пункте 3, мы приходим к задаче для $w(x)$ вида (5.1). Это дает оценки (5.15) и (5.16) для функции $v_n(x)=u_{x_n}(x)$ и, таким образом, оценку (5.9) с $k=1$.

Ясно, что шаг за шагом мы можем продолжить повышение гладкости в соответствии с гладкостью правой части в (5.1) пока величина $a-k>0$, то есть $k<a$. Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим теперь свойства потенциала (5.2) в пространствах Соболева. При этом отметим, что в этом случае удается воспользоваться теорией Кальдерона–Зигмунда и общими свойствами сингулярных интегралов, действующих в пространстве L_p. В частности, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.5. *Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ сингулярный интегральный оператор K, задаваемый ядром $K(x,y)$, $x,y \in \Omega$:*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} K(x,y) f(y)\, dy.$$

Пусть ядро $K(x,y)$ является гладким при $x \neq y$ и имеют место оценки

$$|K(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-n}\,, \qquad |\nabla_x K(x,y)| + |\nabla_y K(x,y)| \leq C\,|x-y|^{-n-1}\,. \tag{5.18}$$

Тогда, если известно, что оператор K ограничен из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, то он ограничен как оператор из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ при любом $p > 1$.

По поводу несложного доказательства этой леммы, основанного на известной теории сингулярных интегралов, см. доказательство предложения 6.3 в [1], а также [5].

Лемма 5.6. *Пусть в* (5.1) $f(x) \in W_p^k(R_+^n)$, $k < a$, $p > 1$, *и имеет компактный носитель в B_R. Тогда потенциал* (5.2) *дает решение задачи* (5.1) *и справедливы оценки*

$$\|u\|^{(k+1)}_{p,B_{2R}\cap R_+^n} + \|x_n u\|^{(k+2)}_{p,B_{2R}\cap R_+^n} \leq C_R\, \|f\|^{(k)}_{p,R_+^n}\,. \tag{5.19}$$

Доказательство. Ввиду плотности функций из C^∞ в $W_p^k(R_+^n \cap B_{2R})$ и в силу леммы 5.3, достаточно доказать оценку (5.19) и притом на гладких функциях. При этом достаточно рассмотреть случай $k=0$, так как на $k>0$ оценка распространяется точно так же, как в лемме 5.4.

Пусть $K(x,y)$ означает одно из ядер G_{x_i} или $x_n G_{x_i x_j}$. Покажем, что оператор K ограничен из $L_2(B_{2R})$ в $L_2(B_{2R})$, причем, как отмечено выше, оценку нормы оператора в $L_2(B_{2R})$ достаточно получить для достаточно гладких плотностей f. Для такой $f(x)$ по доказанному соответствующая ей функция $u(x)$ является некоторой производной решения задачи (5.1), поэтому достаточно получить локальные в $L_2(R_+^n)$ оценки производных решения этой задачи. Пусть $\zeta(x)$ — такая же, как и выше, срезающая функция полушара B_{2R}. Тогда функция $w(x) = u(x)\zeta(x)$ удовлетворяет в B_{3R} следующей задаче

$$x_n \triangle w - a w_{x_n} = F(x) \equiv f\zeta + 2\nabla\zeta\,(x_n \nabla u) + \triangle\zeta x_n u - a u \zeta_{x_n},\ x \in B_{3R}, \tag{5.20}$$

$$w = 0, \quad x \in \partial B_{3R}.$$

Заметим, что, в силу оценок (5.4) с $\omega = 1$ и оценок (5.5) с $\omega = 0$, потенциалы с ядрами $G(x,y)$ и $x_n \nabla_x G(x,y)$ являются интегралами со слабой особенностью, и поэтому отображения $f \to u$ и $f \to x_n \nabla u$ непрерывны из $L_p(B_{3R})$ в $L_p(B_{3R})$, $p > 1$. Следовательно, для правой части $F(x)$ в (5.20) справедлива оценка

$$\|F\|_{p,B_{3R}} \le C \|f\|_{p,R^n_+}, \quad p > 1.$$

Представляя уравнение (5.20) в дивергентном виде

$$\nabla \left(x_n^{-a} \nabla w \right) = F x_n^{-a-1},$$

умножая обе части на $x_n^a w(x)$ и интегрируя по частям по B_{3R}, получаем, с учетом граничных условий (все эти операции оправданы, так как f гладкая и $|w/x_n| \le C$),

$$-\int\limits_{B_{3R}} \nabla w \nabla w \, dx - a \int\limits_{B_{3R}} \frac{w_{x_n} w}{x_n} \, dx = \int\limits_{B_{3R}} F \frac{w}{x_n} \, dx,$$

или, представляя $w_{x_n} w = (1/2)(w^2)_{x_n}$ и интегрируя по частям во втором слагаемом слева

$$\int\limits_{B_{3R}} (\nabla w)^2 \, dx + \frac{a}{2} \int\limits_{B_{3R}} \left(\frac{w}{x_n} \right)^2 dx = -\int\limits_{B_{3R}} F \frac{w}{x_n} \, dx.$$

Замечая теперь, что для правой части этого соотношения в силу неравенства Харди справедлива оценка

$$\left| \int\limits_{B_{3R}} F \frac{w}{x_n} \, dx \right| \le C \|F\|_{2,B_{3R}} \left\| \frac{w}{x_n} \right\|_{2,B_{3R}} \le C \|F\|_{2,B_{3R}} \|\nabla w\|_{2,B_{3R}},$$

заключаем, что

$$\|\nabla w\|_{2,B_{3R}} \le C \|F\|_{2,B_{3R}} \le C \|f\|_{2,B_{3R}}. \tag{5.21}$$

Заметим, далее, что, как и в лемме 5.4, функция $x_n w(x)$, в силу (5.20), удовлетворяет уравнению

$$\triangle (x_n w) = a w_{x_n} + 2 w_{x_n} + F$$

и нулевым граничным условиям на ∂B_{3R}. Следовательно, в силу уже доказанной оценки (5.21) и свойств эллиптических краевых задач, имеем, в частности,

$$\left\| x_n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{2,B_{3R}} \le C \|f\|_{2,B_{3R}}.$$

Таким образом, все определенные выше операторы K ограничены в $L_2(B_{2R})$.

Далее, ввиду оценок (5.5) с $\omega = 1$, оценок (5.6) с $\omega = 0$ и с $\omega = 1$ и оценок (5.8) с $\omega = 0$, ядра вида G_{x_i} и $x_n G_{x_i x_j}$ при $i, j = \overline{1, n-1}$ удовлетворяют условиям леммы 5.5, и, следовательно, для решения задачи (5.20) (рассматриваемой как задачи в полупространстве с последующим сужением на B_{2R}) с $f \in L_p(B_{2R})$ справедливы оценки

$$\|w_{x_i}\|_{p,B_{3R}} + \left\|x_n w_{x_i x_j}\right\|_{p,B_{3R}} \le C \|F\|_{p,B_{3R}} \le C \|f\|_{p,R^n_+}, i, j = \overline{1, n-1}, \tag{5.22}$$

то есть часть (так как $i, j = \overline{1, n-1}$) нужной оценки (5.19) с $k = 0$.

Однако при $a < 1$, как нетрудно видеть, так как оценка (5.7) является точной, ядра G_{x_n} и $x_n G_{x_n x_n}$ не удовлетворяют условиям (5.18). Поэтому рассмотрим снова уравнение (5.20) и представим его в виде

$$x_n \frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2} - a \frac{\partial w}{\partial x_n} = \Phi \equiv F - \sum_{i=1}^{n-1} x_n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2},$$

где, по уже доказанному,

$$\|\Phi\|_{p,B_{3R}} \le C \|f\|_{p,R^n_+}.$$

Так как $w = 0$ при $x_n = 0$ и $w = w_{x_n} = 0$ при $x_n \ge 3R$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_n} w(x', x_n) = -x_n^a \int\limits_{x_n}^{3R} \xi^{-(a+1)} \Phi(x', \xi)\, d\xi \equiv -A\Phi(x', \cdot).$$

Рассмотрим линейный оператор A. Во-первых, легко видеть, что этот оператор ограничен из $L_\infty(0, 3R)$ в $L_\infty(0, 3R)$, то есть

$$\|Af\|_{\infty,[0,3R]} \le C \|f\|_{\infty,[0,3R]}.$$

Далее, рассмотрим оператор A в пространстве $L_1(0, 3R)$. Пусть $f \in L_1(0, 3R)$ неотрицательна и ограничена. Тогда $Af \ge 0$ и интегрируя по частям, получаем

$$\|Af\|_{1,[0,3R]} = \int\limits_0^{3R} x_n^a \int\limits_{x_n}^{3R} \xi^{-(a+1)} f(\xi)\, d\xi\, dx_n$$

$$= \frac{x_n^{a+1}}{a+1} \int\limits_{x_n}^{3R} \xi^{-(a+1)} f(\xi)\, d\xi \Bigg|_0^{3R} + \frac{1}{a+1} \int\limits_0^{3R} f(x_n)\, dx_n = \frac{1}{a+1} \|f\|_{1,[0,3R]}.$$

Так как оператор A линеен и ограниченные функции плотны в $L_1(0,3R)$, то для любой $f \in L_1(0,3R)$ выполнено $\|Af\|_{1,[0,3R]} \le C\|f\|_{1,[0,3R]}$, то есть оператор A ограничен из $L_1(0,3R)$ в $L_1(0,3R)$.

Следовательно, по интерполяционной теореме Рисса–Торина (см. [6]), оператор A ограничен из $L_p(0,3R)$ в $L_p(0,3R)$ при любом $p>1$. Таким образом, для $p>1$

$$\int\limits_0^{3R} \left|\frac{\partial}{\partial x_n} w(x',x_n)\right|^p dx_n \le C_{R,p} \int\limits_0^{3R} \left|\Phi(x',x_n)\right|^p dx_n.$$

Интегрируя последнее неравенство по x', получаем

$$\|w_{x_n}\|_{p,B_{3R}} \le C_R \|\Phi\|_{p,B_{3R}} \le C_R \|f\|_{p,R^n_+}.$$

Оценка $\|x_n w_{x_i x_n}\|_{p,B_{3R}}$ для $i=\overline{1,n}$ теперь аналогична оценкам $\|x_n w_{x_i x_j}\|_{p,B_{3R}}$ выше, что завершает, в силу определения w, доказательство оценки (5.19). Лемма доказана. □

6. Регуляризатор для задачи (2.1), (2.2) и доказательство теорем 2.1, 2.2

Лемма 6.1. *В условиях теоремы* 2.1 *существуют ограниченные линейные операторы* R_1 *и* R_2*, действующие каждый из пространства* $H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ *в пространство* $\dot{H}^{k+2+\alpha}_{\varphi}(\overline{\Omega})$ *и из пространства* $W^k_p(\Omega)$ *в пространство* $\dot{W}^{k+2}_{p,\varphi}(\Omega)$*, такие, что*

$$R_1 L = I + K, \qquad L R_2 = I + T, \tag{6.1}$$

где I *— тождественный оператор, а операторы* K *и* T *вполне непрерывны,* K *из пространства* $\dot{H}^{k+2+\alpha}_{\varphi}(\overline{\Omega})$ *в себя и из пространства* $\dot{W}^{k+2}_{p,\varphi}(\Omega)$ *в себя, а* T *из пространства* $H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ *в себя и из* $W^k_p(\Omega)$ *в себя, причем операторы* T *и* K *повышают гладкость, в частности, оператор* K *можно представить в виде*

$$Ku = S\{u, \varphi\nabla u\}, \tag{6.2}$$

где S *— непрерывный линейный оператор из* $H^{k+\alpha}(\overline{\Omega}) \times \left(H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})\right)^n$ *в пространство* $\dot{H}^{k+2+\alpha}_{\varphi}(\overline{\Omega})$ *и из пространства* $W^k_p(\Omega) \times \left(W^k_p(\Omega)\right)^n$ *в пространство* $\dot{W}^{k+2}_{p,\varphi}(\Omega)$.

Мы не приводим доказательство этого утверждения, так как оно аналогично [7, 8]. При этом операторы R_1 и R_2 “склеиваются” из решений модельных задач, рассмотренных в предыдущем пункте, и модельных задач во всем пространстве для невырожденного уравнения путем достаточно мелкого разбиения единицы на $\overline{\Omega}$. Единственное отличие состоит в том, что разбиение единицы внутри Ω должно быть более мелким, чем на $\partial\Omega$. При этом условия (2.5), (2.6) обеспечивают возможность локальным диффеоморфизмом привести уравнение (2.1) с зафиксированными в некоторой граничной точке коэффициентами (но не $\varphi(x)$) к простейшему виду (5.1).

Из представлений (6.1), (6.2) ввиду свойства повышения гладкости оператором K легко выводится следующее утверждение (ср. [8]).

Лемма 6.2. *В условиях теоремы* 2.1 (*кроме* (2.9)) *ядро и коядро оператора L, как оператора из $\dot{H}_{\varphi}^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$ в $H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ или из $\dot{W}_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$ в $W_p^k(\Omega)$, конечномерны и их размерность не зависит от того, в каком из указанных выше пространств мы рассматриваем оператор L (в частности, они не зависят от p, k и α).*

Справедливы априорные оценки (2.13) *решения задачи* (2.1), (2.2), *причем, если выполнено условие* (2.9), *то последние слабые слагаемые в оценках* (2.13) *можно отбросить и справедливы оценки* (2.10), (2.11).

Сделаем, ради полноты изложения, несколько замечаний по поводу доказательства леммы 6.2.

Конечномерность ядра оператора L следует из конечномерности ядра оператора R_1L, а конечномерность коядра L следует из конечномерности коядра LR_2 (см. (6.1)).

Докажем еще, например, что размерности коядра L из $\dot{H}_{\varphi}^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$ в $H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ и из $\dot{W}_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$ в $W_p^k(\Omega)$ совпадают. Пусть коядро в пространстве $W_p^k(\Omega)$ имеет размерность m и задается функционалами $g_i \in (W_p^k(\Omega))^*$, $i=\overline{1,m}$. То есть для заданной $f \in W_p^k(\Omega)$ уравнение (2.1) разрешимо в $\dot{W}_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $g_i(f)=0$, $i=\overline{1,m}$. Отметим, что g_i также определены на $H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$. Пусть $f \in H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$. Тогда, если $g_i(f)=0$, $i=\overline{1,m}$, то, так как $f \in W_p^k(\Omega)$, уравнение (2.1) имеет решение $u(x)$ из $\dot{W}_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$, которое, в силу (6.1), удовлетворяет также уравнению $u=-Ku+w$, где $w=R_1f \in \dot{H}_{\varphi}^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$. В силу свойства повышения гладкости оператором K, пошаговым процессом убеждаемся, что решение u на самом деле принадлежит $\dot{H}_{\varphi}^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$, и, таким образом, для заданной f уравнение (2.1) разрешимо в $\dot{H}_{\varphi}^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Обратно, если для заданной $f \in H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ уравнение (2.1) разрешимо в $\dot{H}_{\varphi}^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$, то тем самым оно разрешимо и в $\dot{W}_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$, и, следовательно, должно быть выполнено $g_i(f)=0$, $i=\overline{1,m}$. То есть коядро в $H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ задается в точности тем же набором функционалов g_i, что означает, в частности, совпадение размерности.

Оценки (2.13) также следуют из представления решения задачи (2.1), (2.2) в виде $u = -Ku + R_1 f$ и интерполяционных неравенств вида $\|Ku\|_{\dot{H}_\varphi^{k+2+\alpha}} \le \varepsilon \|u\|_{\dot{H}_\varphi^{k+2+\alpha}} + C_\varepsilon |u|_0$, основанных на повышении гладкости оператором K.

Отметим, наконец, что последнее утверждение леммы 6.2 следует из того, что при выполнении (2.9) ядро оператора L в пространстве $\dot{H}_\varphi^{k+2+\alpha}(\overline{\Omega})$ (а, следовательно, и в $\dot{W}_{p,\varphi}^{k+2}(\Omega)$) в силу принципа максимума состоит лишь из нуля (и L осуществляет взаимно-однозначное отображение на свой образ).

Имея, далее, в виду использовать метод продолжения по параметру для доказательства разрешимости в теореме 2.1, рассмотрим следующую краевую задачу в Ω ($a > a_0 > 0$):

$$L_1 u \equiv \psi \triangle u - a \nabla \psi \nabla u - u = f, \quad x \in \Omega; \qquad u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{6.3}$$

где функция $\psi(x)$ определяется из задачи

$$\triangle \psi = -1, \quad x \in \Omega; \qquad \psi = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

и, таким образом, $\psi(x)$ удовлетворяет всем требованиям к $\varphi(x)$, предъявляемым теоремой 2.1, $C^{-1} \le \varphi/\psi \le C$.

Запишем уравнение (6.3) в дивергентной форме

$$\nabla\left(\psi^{-a} \nabla u\right) - \psi^{-a-1} u = f \psi^{-a-1}.$$

Если $v(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, то умножая последнее уравнение на $v(x)\psi(x)^a$ и интегрируя по частям по Ω, получим

$$M(u,v) \equiv \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + a \int\limits_\Omega \nabla u \nabla \psi \frac{v}{\psi} \, dx + \int\limits_\Omega \frac{uv}{\psi} \, dx = -\int\limits_\Omega f \frac{v}{\psi} \, dx \equiv l(v). \tag{6.4}$$

Примем тождество (6.4) за определение обобщенного решения $u(x)$ задачи (6.3) из пространства $\dot{W}_2^1(\Omega)$. Нетрудно убедиться, что, в силу неравенства Харди, функционал $l(v)$ и билинейная форма $M(u,v)$ непрерывны на $\dot{W}_2^1(\Omega)$, если $f \in L_2(\Omega)$. Кроме того, форма $M(u,v)$ коэрцитивна. Действительно, для второго слагаемого в определении $M(u,u)$ имеем, интегрируя по частям

$$\int\limits_\Omega \nabla u \nabla \psi \frac{u}{\psi} \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \nabla \psi \frac{\nabla\left(u^2\right)}{\psi} \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \triangle\psi \frac{u^2}{\psi}\,dx + \int\limits_{\Omega} (\nabla\psi)^2 \left(\frac{u}{\psi}\right)^2 dx,$$

и, так как $\triangle\psi = -1$, это доказывает коэрцитивность $M(u,v)$. Следовательно, по теореме Лакса–Мильграма, для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение задачи (6.3), (6.4) из пространства $\dot{W}_2^1(\Omega)$, причем

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq C\,\|f\|_{2,\Omega}\,.$$

Так как уравнение (6.3) не вырождается строго внутри Ω, то, как хорошо известно, решение $u(x)$ из класса $\dot{W}_2^1(\Omega)$ принадлежит классу W_2^2 строго внутри Ω, и, следовательно, функция ψu удовлетворяет в Ω уравнению

$$\triangle(\psi u) = F \equiv (2+a)\nabla\psi\nabla u + u\triangle\psi + u + f$$

и нулевым граничным условиям на $\partial\Omega$. Так как, по уже доказанному, $\|F\|_{2,\Omega} \leq C\,\|f\|_{2,\Omega}$, то $\|\psi u\|_{2,\Omega}^{(2)} \leq C\,\|f\|_{2,\Omega}$, а, следовательно, и

$$\|\varphi u\|_{2,\Omega}^{(2)} \leq C\,\|f\|_{2,\Omega}\,.$$

Таким образом, задача (6.3) всегда и однозначно разрешима в $\dot{W}_{2,\varphi}^2(\Omega)$ при любой $f \in L_2(\Omega)$. В силу леммы 6.2 отсюда следует однозначная разрешимость задачи (6.3) и во всех остальных рассматриваемых нами пространствах.

Обозначим теперь

$$L_2 u \equiv \varphi\triangle u - a\nabla\varphi\nabla u - u, \qquad L_3 u \equiv \varphi\triangle u + Z(x)\nabla\varphi\nabla u - u,$$

где $Z(x)$ — какое-либо гладкое продолжение из окрестности $\partial\Omega$ внутрь области Ω функции $Z(x)$, определенной в (2.4).

Рассмотрим, наконец, при $t \in [0,3]$ однопараметрическое семейство операторов

$$\begin{aligned} L^{(t)} \equiv \bigl\{L_1(1-t) + L_2 t,\ 0 \leq t \leq 1;& \\ L_2(2-t) + L_3(t-1),\ 1 \leq t \leq 2;& \\ L_3(3-t) + L(t-2),\ 2 \leq t \leq 3\bigr\}.& \end{aligned}$$

Смысл такого тройного продолжения состоит в том, чтобы при каждом t оператор $L^{(t)}$ удовлетворял условиям (2.5), (2.6). Кроме того, равномерно по t оператор $L^{(t)}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1, включая условие (2.9), а, следовательно, и условиям леммы 6.2. Таким образом, рассматривая непрерывное по t семейство операторов

$L^{(t)}$ в любом из изучаемых нами функциональных пространств, мы получаем, что оператор $L^{(0)}$ обратим, а потому, ввиду равномерных по t оценок (2.10), (2.11), обратим и оператор $L^{(3)} \equiv L$. Это завершает доказательство теоремы 2.1.

Теорема 2.2 следует из теоремы 2.1 стандартным образом путем представления задачи (2.12), в силу теоремы 2.1, в виде операторного уравнения

$$u - (\lambda - C_0)(L - C_0 I)^{-1} u = (L - C_0 I)^{-1} f,$$

где C_0 — достаточно большое положительное число.

Литература

[1] D. Bresch and G. Metivier, *Global existence and uniqueness for the Lake equations with vanishing topography: elliptic estimates for degenerate equations* // Nonlinearity, **18** (2006), N 3, 591–610.

[2] D. Bresch, J. Lemoine, and F. Guillen-Gonzalez, *A note on a degenerate elliptic equations with applications for lakes and seas* // Electronic Journal of Differential Equations, (2004), N 42, 1–13.

[3] C. Goulaouic and N. Shimakura, *Regularite holderienne de certains problemes aux limites elliptiques degeneres* // Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, **X** (1983), N 1, 79–108.

[4] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, *Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой*, Итоги науки и техники. Мат. анализ, 1969. М.: ВИНИТИ. 1971, 252 с.

[5] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, М.: Мир, 1976, 342 с.

[6] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, М.: Мир, 1980, 664 с.

[7] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 1967, 736 с.

[8] В. А. Солонников, *Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса–Л. Ниренберга* // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **92** (1966), N 4, 233–284.

Сведения об авторах

Сергей Петрович Дегтярев

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
Р. Люксембург 74,
83114, Донецк,
Украина
E-Mail: spdeg@yahoo.com