Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 3, 374 – 381

Побудова нарізно неперервних функцій від n змінних з даним звуженням

Володимир В. Михайлюк

(Представлена М. М. Маламудом)

Анотація. Розв'язується задача про побудову нарізно неперервних функцій на добутку n топологічних просторів з даним звуженням. Зокрема, показано, що для довільних топологічного простору X і функції $g : X \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-го класу Бера існує нарізно неперервна функція $f : X^n \to \mathbb{R}$ така, що $f(x, x, \dots, x) = g(x)$ для кожного $x \in X$.

2000 MSC. 54C08, 54C30.

Ключові слова та фрази. Нарізно неперервні функції, функції n-го класу Бера.

1. Для довільної множини X і натурального числа $n \geq 2$ відображення $d_n : X \to X^n$, $d_n(x) = (x, \dots, x)$, називатимемо *діагональним відображенням*, множину $\Delta_n = d_n(X)$ — *діагоналлю простору* X, а композицію $g = f \circ d_n : X \to Y$ — *діагоналлю відображення* $f : X^n \to Y$.

Нехай X — топологічний простір. Відображення $f : X \to \mathbb{R}$ називається *функцією першого класу Бера*, якщо існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, яка поточково на X збігається до функції f, тобто $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Нехай $2 \leq \alpha < \omega_1$. Відображення $f : X \to \mathbb{R}$ називається *функцією α-го класу Бера*, якщо існує поточково збіжна до f послідовність (f_n) функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, кожна з яких належить класу Бера, меншого, ніж α.

Р. Бер в [1] показав, що діагоналі нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних, тобто функцій, неперервних відносно кожної змінної, зокрема, є в точності функціями першого класу Бера. А. Лебег в [2] довів, що кожна нарізно неперервна функція n дійсних змінних належить до $(n-1)$-го класу Бера, зокрема, і її діагональ є такого ж класу. І навпаки, в [3, 4] показано, що довільна дійсна функція

Стаття надійшла в редакцію 13.02.2006

$(n-1)$-го класу Бера є діагоналлю деякої нарізно неперервної функції n дійсних змінних.

Починаючи з другої половини XX століття, берівська класифікація нарізно неперервних відображень та їх аналогів досить активно вивчається багатьма математиками [5–10]. Зауважимо, що В. Рудін вперше використав розбиття одиниці для встановлення належності до першого класу Бера нарізно неперервних відображень, визначених на добутку метризовного і топологічного просторів, зі значеннями в локально опуклих просторах. Розвиток методу Рудіна на випадок неметризовних просторів привів до виникнення наступного поняття [11].

Топологічний простір X називається *PP-простором*, якщо існують послідовності локально скінченних покриттів $(U(n,i) : i \in I_n)$ функціонально відкритих в X множин $U(n,i)$ і сімей $(x(n,i) : i \in I_n)$ точок $x(n,i) \in X$ такі, що для для довільних $x \in X$ і околу U точки x існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $x(n,i) \in U$ для всіх $n \geq n_0$ та $i \in I_n$ з $x \in U(n,i)$.

Клас PP-просторів досить обширний. Він містить σ-метризовні паракомпакти, топологічні векторні простори, які подаються у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх метризовних підпросторів, площину Немицького і пряму Зорґенфрея. З [12] (див. також [8, теорема 3.14]) випливає, що для довільних $n \geq 2$ і PP-простору X кожна нарізно неперервна функція $f : X^n \to \mathbb{R}$ є функцією $(n-1)$-го класу Бера, і, зокрема, її діагональ також є функцією $(n-1)$-го класу Бера.

Обернена задача про побудову нарізно неперервних функцій з даною діагоналлю впродовж тривалого часу залишалася поза увагою і її дослідження було відновлено з ініціативи В. Маслюченка. Найбільш загальний результат для нарізно неперервних функцій n змінних одержано в [13]. Там встановлено (див. також [8, теорема 3.24]), що для довільної функції g, яка належить $(n-1)$-му класу Бера, на топологічному просторі X з нормальним n-м степенем і G_δ-діагоналлю Δ_n існує нарізно неперервна функція $f : X^n \to \mathbb{R}$ з діагоналлю g.

З іншого боку, при дослідженні нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, визначених на добутку топологічних просторів X і Y, природним чином виникають дві топології: топологія нарізної неперервності σ, тобто найслабша топологія, відносно якої всі функції f є неперервними і хрест-топологія γ, що складається з усіх множин G, для яких всі x-розрізи $G^x = \{y \in Y : (x,y) \in G\}$ та y-розрізи $G_y = \{x \in X : (x,y) \in G\}$ є відкритими в Y та X відповідно (див. [14]). Аналогічно вводиться топологія нарізної неперервності σ і хрест-топологія γ на добутку $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ топологічних просторів $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Оскільки діагональ $\Delta = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ є замкненою дискретною множиною в $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ чи $(\mathbb{R}^2, \gamma)$ і далеко не кожна функція на Δ продовжується до нарізно неперервної на $\mathbb{R}^2$, то навіть у випадку $n = 2$ і $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ топології σ і γ не є нормальними (більше того, γ не є регулярною [14,15]). Таким чином, побудова нарізно неперервних функцій з даною діагоналлю є частинним випадком наступної більш загальної задачі: встановити, для якої підмножини E добутку $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ топологічних просторів $X_1, X_2, \ldots, X_n$ і σ-неперервної чи γ-неперервної функції $g : E \to \mathbb{R}$ існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, для якої звуження $f|_E$ збігається з g.

В [16] вивчалося це питання для функцій двох змінних, і, зокрема, було встановлено, що для довільних топологічного простору X і функції $g : X \to \mathbb{R}$ першого класу Бера існує нарізно неперервна функція $f : X^2 \to \mathbb{R}$ з діагоналлю g.

В даній роботі ми, аналогічно, як в [16], будемо розв'язувати задачу про побудову нарізно неперервної функції $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ з даним звуженням на спеціального вигляду множину $E \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$. Переходячи до неперервного образу множини E на діагональ n-го степеня метризовного простору, і, використовуючи вищезгадану теорему з [13], ми отримаємо результат, з якого випливає, що для довільних топологічного простору X і функції $g : X \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-го класу Бера існує нарізно неперервна функція $f : X^n \to \mathbb{R}$ з діагоналлю g.

2. Спочатку нагадаємо деякі означення і доведемо допоміжне твердження.

Множина $A \subseteq X$ *має властивість продовження в топологічному просторі* X, якщо кожна неперервна функція $g : A \to [0, 1]$ може бути продовжена до неперервної функції $f : X \to [0, 1]$. Згідно з теоремою Тітце–Урисона [17, с. 116] кожна замкнена множина в нормальному просторі має властивість продовження.

Для відображення $f : X \to Y$ і множини $A \subseteq X$ через $f|_A$ ми позначаємо звуження відображення f на A.

Множина A в топологічному просторі X називається *функціонально замкненою*, якщо існує неперервна функція $f : X \to [0, 1]$ така, що $A = f^{-1}(0)$.

Топологічний простір X називається *псевдокомпактним*, якщо кожна неперервна функція на X є обмеженою.

Множину E в добутку $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ топологічних просторів $X_1, X_2, \ldots X_n$ називатимемо *проективно гомеоморфною*, якщо для кожного $1 \le i \le n$ проекція $p_i : E \to X_i$, $p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$, є гомеоморфним вкладенням.

Множину E в добутку $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ називатимемо *проектив-*

но ін'єктивною, якщо $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$, $\ldots$, $x_n \neq y_n$ для довільних різних точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E$, тобто всі проекції множини E на осі X_i є ін'єктивними, і *локально проективно ін'єктивною*, якщо для довільної точки $x \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ існує такий її окіл W, що множина $E \cap W$ проективно ін'єктивна.

Для функції $f : X \to \mathbb{R}$ через $\mathrm{supp} f$ позначатимемо множину $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

Твердження 1. *Нехай A — функціонально замкнена множина, яка володіє властивістю продовження в топологічному просторі X, $1 \leq \alpha < \omega_1$ і $g : A \to \mathbb{R}$ – функція α-го класу Бера. Тоді функція $f : X \to \mathbb{R}$, яка означається наступним чином: $f(x) = g(x)$ для кожного $x \in A$ і $f(x) = 0$ для кожного $x \in X \setminus A$, також є функцією α-го класу Бера.*

Доведення. З означення функції α-го класу Бера випливає, що досить довести твердження для випадку $\alpha = 1$.

Нехай $\alpha = 1$ і $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність неперервних функцій $g_n : A \to [-n, n]$, яка поточково збігається до функції g. Оскільки множина A володіє властивістю продовження в топологічному просторі X, то існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ така, що $f_n|_A = g_n$.

Візьмемо неперервну функцію $\varphi : X \to [0, 1]$ таку, що $A = \varphi^{-1}(0)$ і для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$ покладемо $\varphi_n(x) = 1 - \min\{1, n\varphi(x)\}$. Зрозуміло, що всі функції φ_n неперервні на X, $A = \varphi_n^{-1}(1)$ і для кожного $x \in X \setminus A$ існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що $\varphi_n(x) = 0$ для кожного $n \geq m$. Тоді послідовність неперервних функцій $f_n \cdot \varphi_n$ поточково збігається до функції f. □

3. Переходимо до викладу основного результату.

Теорема 1. *Нехай E — проективно гомеоморфна множина в добутку $X_1 \times \cdots \times X_n$ топологічних просторів $X_1, \ldots, X_n$, причому проекції $E_1, \ldots, E_n$ множини E мають властивість продовження в просторах $X_1, \ldots, X_n$ відповідно і $g : E \to \mathbb{R}$ — функція $(n-1)$-го класу Бера. Тоді, якщо E псевдокомпактна або всі множини $E_1, \ldots, E_n$ функціонально замкнені в $X_1, \ldots, X_n$, то існує нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ така, що $f|_E = g$.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли всі множини $E_1, \ldots, E_n$ функціонально замкнені в $X_1, \ldots, X_n$ відповідно.

Нехай $f_0^{(1)} : X_1 \to [0, 1]$, $\ldots$, $f_0^{(n)} : X_n \to [0, 1]$ такі неперервні функції, що $E_i = (f_0^{(i)})^{-1}(0)$ для кожного $1 \leq i \leq n$. Для кожного

$i = 1, \dots, n$ і $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ покладемо $h_i(x_i) = x$. Зрозуміло, що h_i гомеоморфізм множини E_i на множину E. Оскільки g функція $(n-1)$-го класу Бера на E, то існує сім'я $(g_{k_1,\dots,k_{n-1}} : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N})$ неперервних функцій $g_{k_1,\dots,k_{n-1}} : E \to [-k_{n-1}, k_{n-1}]$ така, що

$$g(x) = \lim_{k_1\to\infty} \lim_{k_2\to\infty} \dots \lim_{k_{n-1}\to\infty} g_{k_1,k_2,\dots,k_{n-1}}(x)$$

для кожного $x \in E$. Для довільних $k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}$ та $1 \le i \le n$ через $g^{(i)}_{k_1,\dots,k_{n-1}}$ позначимо неперервну функцію $g^{(i)}_{k_1,\dots,k_{n-1}} : E_i \to [-k_{n-1}, k_{n-1}]$, $g^{(i)}_{k_1,\dots,k_{n-1}}(x_i) = g_{k_1,\dots,k_{n-1}}(h_i(x_i))$, і виберемо неперервну функцію $f^{(i)}_{k_1,\dots,k_{n-1}} : X_i \to \mathbb{R}$ таку, що $f^{(i)}_{k_1,\dots,k_{n-1}}|_{E_i} = g^{(i)}_{k_1,\dots,k_{n-1}}$.

Покладемо $S = \{0\} \cup \mathbb{N}^{n-1}$. Далі для кожного $s = (k_1, \dots, k_{n-1}) \in S$ та $1 \le i \le n$ функції $f^{(i)}_{k_1,\dots,k_{n-1}}$, $g^{(i)}_{k_1,\dots,k_{n-1}}$ та $g_{k_1,\dots,k_{n-1}}$ позначатимемо також $f^{(i)}_s$, $g^{(i)}_s$ та g_s.

Розглянемо неперервні відображення $\varphi_i = \Delta_{s\in S} f^{(i)}_s : X_i \to \mathbb{R}^S$, $\varphi_i(x_i) = (f^{(i)}_s(x_i))_{s\in S}$. Позначимо $Z = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(X_i)$. Зауважимо, що Z метризовний простір, і для довільних $1 \le i \le n$, $s \in \mathbb{N}^{n-1}$ і $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ маємо $f^{(i)}_s(x_i) = g^{(i)}_s(x_i) = g_s(x)$. Крім того, для кожного $1 \le i \le n$ точка x_i з простору X_i належить множині E_i тоді і тільки тоді, коли $\varphi_i(x_i)(0) = f^{(i)}_0(x_i) = 0$. Тому $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2) = \dots = \varphi_n(x_n)$ для кожної точки $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$, причому множина $A = \varphi_1(E_1) = \dots = \varphi_n(E_n)$ функціонально замкнена в Z.

Розглянемо функцію $\tilde{g} : A \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}(z) = g(h_1(x_1))$, де $x_1 \in E_1$ і $z = \varphi_1(x_1)$. Зауважимо, що для довільних $x_1, y_1 \in E_1$ з рівності $\varphi_1(x_1) = \varphi_1(y_1)$ випливає, що $g^{(1)}_s(x_1) = g^{(1)}_s(y_1)$ для кожного $s \in S$. Тоді $g_s(h_1(x_1)) = g_s(h_1(y_1))$ для кожного $s \in \mathbb{N}^{n-1}$ і $g(h_1(x_1)) = g(h_1(y_1))$. Отже, означення функції $\tilde{g}$ є коректним.

Для кожного $s = (k_1, \dots, k_{n-1}) \in S$ функція $\tilde{f}_s : Z \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}_s(z) = z(s)$, є неперервною. Тоді для кожного $z \in A$, взявши $x_1 \in E_1$ так, що $\varphi_1(x_1) = z$, одержимо

$$\tilde{f}_s(z) = z(s) = f^{(1)}_s(x_1) = g^{(1)}_s(x_1) = g_s(h_1(x_1)),$$

тому

$$\lim_{k_1\to\infty} \dots \lim_{k_{n-1}\to\infty} \tilde{f}_s(z) = \lim_{k_1\to\infty} \dots \lim_{k_{n-1}\to\infty} g_s(h_1(x_1)) = g(h_1(x_1)) = \tilde{g}(z).$$

Отже, функція $\tilde{g}$ є функцією $(n-1)$-го класу Бера на A. Згідно з твердженням 1, якщо ми покладемо $\tilde{g}(z) = 0$ для кожного $z \in Z \setminus A$, то одержимо функцію $\tilde{g}$ $(n-1)$-го класу Бера на Z. З [13, теорема 2] випливає, що існує нарізно неперервна функція $\tilde{f} : Z^n \to \mathbb{R}$, діагональ якої дорівнює $\tilde{g}$.

Розглянемо функцію $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{f}(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n))$, яка, зрозуміло, є нарізно неперервною. Нехай $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$. Тоді $\varphi_1(x_1) = \cdots = \varphi_n(x_n) \in A$ і

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{f}(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)) = \tilde{g}(\varphi_1(x_1)) = g(h_1(x_1)) = g(x).$$

Отже, g є діагоналлю відображення f.

У випадку, коли множина E псевдокомпактна, міркуємо аналогічно. Розглядаючи множину $S = \mathbb{N}^{n-1}$, одержимо неперервні відображення $\varphi_i : E_i \to \mathbb{R}^S$. Тоді множина $A = \varphi_1(E_1) = \cdots = \varphi_n(E_n)$ також буде функціонально замкненою, оскільки вона є псевдокомпактною в метризовному просторі Z. □

У випадку, коли $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$ і $E = \Delta_n$, одержується наступний результат.

Теорема 2. *Нехай X — довільний топологічний простір і $g : X \to \mathbb{R}$ — функція $(n-1)$-го класу Бера. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X^n \to \mathbb{R}$ з діагоналлю g.*

4. Тепер перейдемо до розгляду випадку, коли простори X_1, $X_2, \ldots, X_n$ задовольняють умови типу компактності.

Теорема 3. *Нехай $X_1, \ldots, X_n$ — компакти, E — замкнена проективно ін'єктивна множина в $X_1 \times \cdots \times X_n$ і $g : E \to \mathbb{R}$ — функція $(n-1)$-го класу Бера. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$, для якої $f|_E = g$.*

Доведення. Оскільки множина E проективно ін'єктивна, то проектування множини E на осі $X_1, X_2, \ldots, X_n$ є неперервними ін'єктивними відображеннями компактної множини E, а значить, є гомеоморфними вкладеннями. Залишилось використати теорему 1. □

Теорема 4. *Нехай $X_1, \ldots, X_n$ — локально компактні простори такі, що $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ — паракомпакт, $E \subseteq X$ — замкнена локально проективно ін'єктивна множина і $g : E \to \mathbb{R}$ — функція $(n-1)$-го класу Бера. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$, для якої $f|_E = g$.*

Доведення. Для кожної точки $p = (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ виберемо такі відкриті околи $U_p^{(1)}, \ldots, U_p^{(n)}$ точок $x_1, \ldots, x_n$ в просторах $X_1, \ldots, X_n$ відповідно, що замикання $X_p^{(1)} = \overline{U}_p^{(1)}, \ldots, X_p^{(n)} = \overline{U}_p^{(n)}$ є компактами і множина $E_p = E \cap (X_p^{(1)} \times \cdots \times X_p^{(n)})$ є проективно ін'єктивною. Згідно з теоремою 3 існує нарізно неперервна функція $f_p : X_p^{(1)} \times \cdots \times X_p^{(n)} \to \mathbb{R}$, для якої $f_p|_{E_p} = g|_{E_p}$. Оскільки простір X є паракомпактом, то існує розбиття одиниці $(\varphi_i : i \in I)$ на X, підпорядковане відкритому покриттю $(W_p = U_p^{(1)} \times \cdots \times U_p^{(n)} : p \in X)$ простору X [17, с. 447]. Для кожного $i \in I$ виберемо таке $p_i \in X$, що $\mathrm{supp}\varphi_\mathrm{i} \subseteq \mathrm{W_{p_i}}$, і покладемо

$$g_i(x) = \begin{cases} f_{p_i}(x), & \text{якщо } x \in W_{p_i}, \\ 0, & \text{якщо } x \notin W_{p_i}. \end{cases}$$

Зауважимо, що функції $\varphi_i \cdot g_i$ є нарізно неперервними на X і $(\varphi_i g_i)|_E = (\varphi_i|_E)g$. Тоді функція $f = \sum\limits_{i\in I} \varphi_i g_i$ є шуканою. □

Література

[1] R. Baire, *Sur les fonctions de variables reelles* // Annali di mat. pura ed appl., ser. **3** (1899), N 3, 1–123.

[2] H. Lebesgue, *Sur l'aproximation des fonctions* // Bull. Sci. Math. **22** (1898), 278–287.

[3] H. Lebesgue, *Sur les fonctions representables analytiquement* // Journ. de Math., ser. **6 1** (1905), 139–216.

[4] H. Hahn, *Reelle Funktionen.* 1. Teil. Punktfunktionen. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., 1932, 416 p.

[5] W. Moran, *Separate continuity and support of measures* // J. London. Math. Soc. **44** (1969), 320–324.

[6] W. Rudin, *Lebesgue's first theorem* // Math. Analysis and Applications, Part B. Adv. in Math. Supplem. Studies. **7B** (1981), 741–747.

[7] G. Vera, *Baire measurability of separately continuous functions* // Quart. J. Math. Oxford. **39** (1988), N 153, 109–116.

[8] O. V. Maslyuchenko, V.K. Maslyuchenko, V. V. Mykhaylyuk, O. V. Sobchuk, *Paracompactness and separately continuous mappings* // General Topology in Banach spaces, Nova Sci. Publ., Nantintong, New-York. (2001), 147–169.

[9] T. O. Banakh, (*Metrically*) *quarter-stratifiable spaces and their applications in the theory of separately continuous functions* // Mat. studii. **18** (2002), N 1, 10–28.

[10] M. Burke, *Borel measurability of separately continuous functions II* // Top. Appl. **134** (2003), N 3, 159–188.

[11] O. Sobchuk, *PP-spaces and Baire classification* // International Conference on Functional Analysis and its Applications, dedicated to the 110th anniversary of Stefan Banach. Book of abstracts (May 28–31, 2002). Lviv, 2002. P. 189.

[12] О. В. Собчук, *Берівська класифікація і простори Лебега* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. (2001), вип. 111, 110–113.

[13] В. К. Маслюченко, В. В. Михайлюк, О. В. Собчук, *Побудова нарізно неперервної функції від n змінних з даною діагоналлю* // Мат. студії. **12** (1999), N 1, 101–107.

[14] M. Henriksen, R. G. Woods, *Separate versus joint continuity: A tale of four topologies* // Top. Appl. **97** (1999), N 1–2, 175–205.

[15] В. В. Михайлюк, *Топологія нарізної неперервності та одне узагальнення теореми Серпінського* // Мат. студії. **14** (2000), N 2, 193–196.

[16] В. В. Михайлюк, *Побудова нарізно неперервних функцій з даним звуженням* // Укр. мат. журн. **55** (2003), N 5, 716–721.

[17] Р. Энгелькинг, *Общая топология.* М.: Мир, 1986, 752 с.

Відомості про авторів

Володимир Васильович Михайлюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського, 2
58012 Чернівці
Україна
E-Mail: mathan@chnu.cv.ua