Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 2, 268 – 274

$\mathcal{H}$-зрізи напівгрупи часткових ін'єктивних неперервних перетворень гаусдорфового простору

Василь О. Пєхтєрєв

(*Представлена І. В. Протасовим*)

Анотація. У даній роботі доводиться, що коли напівгрупа усіх ін'єктивних та неперервних часткових перетворень гаусдорфового простору X у себе відносно суперпозиції містить $\mathcal{H}$-зріз, то простір X є не більш ніж зліченим дискретним топологічним простором.

2000 MSC. 20M20, 20M10.

Ключові слова та фрази. Відношення Гріна, напівгрупи перетворень, гаусдорфовий простір, зрізи.

1. Вступ

Нехай ρ — відношення еквівалентності на напівгрупі S. Піднапівгрупа $T \subset S$ називається *зрізом* відношення ρ, якщо T містить рівно по одному елементу з кожного класу еквівалентності. Найбільш цікавими для вивчення є зрізи тих відношень еквівалентності, котрі тісно пов'язані з будовою напівгрупи S. Для напівгруп такими відношеннями є, зокрема, конгруенції та відношення Гріна.

Кажуть, що два елементи a і b напівгрупи S перебувають у відношенні $\mathcal{L}$ (відповідно $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$), коли $S^1a = S^1b$ (відповідно $aS^1 = bS^1$, $S^1aS^1 = S^1bS^1$), а інші два відношення Гріна визначаються наступним чином: $\mathcal{H} = \mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$, $\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$, де S^1 напівгрупа утворена з S за допомогою приєднання одиниці.

Зрізи $\mathcal{H}$- ($\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{D}$-, $\mathcal{J}$-) відношень Гріна часто називають просто $\mathcal{H}$- ($\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{D}$-, $\mathcal{J}$-) *зрізами.*

Зрізи відношень Гріна для конкретних напівгруп почали вивчатися порівняно недавно. Перший приклад $\mathcal{H}$-зрізу для скінченої симетричної інверсної напівгрупи IS_n був побудований у роботі [1]. А дещо

Стаття надійшла в редакцію 26.01.2005

ISSN 1810 – 3200.

пізніше в [2] був отриманий повний опис усіх $\mathcal{H}$-зрізів для напівгрупи IS_n, $n \neq 3$. Далі у роботі [3] описано усі $\mathcal{L}$- та $\mathcal{R}$-зрізи напівгрупи IS_n та їх зв'язок із $\mathcal{H}$-зрізами цієї напівгрупи. Потім в [4] та [5] був отриманий повний опис усіх $\mathcal{H}$- та $\mathcal{R}$-зрізів напівгрупи $\mathcal{T}_X$.

Через $PIC(X)$ будемо позначати напівгрупу усіх ін'єктивних та неперервних часткових перетворень гаусдорфового простору X у себе відносно суперпозиції. У даній роботі доводиться, що коли напівгрупа $PIC(X)$ містить $\mathcal{H}$-зріз, то простір X є не більш ніж зліченим дискретним топологічним простором.

2. Леми

Нехай X — гаусдорфовий топологічний простір.

Лема 2.1. *Кожний нескінченний гаусдорфовий топологічний простір X містить нескінченний дискретний підпростір.*

Доведення. Якщо множина ізольованих точок даного простору є нескінченною, то в якості шуканого підпростору можна взяти цю множину. Якщо ж простір X містить лише скінченну кількість ізольованих точок, то множина неізольованих точок даного простору є нескінченною. Розглянемо дві різні неізольовані точки x_1 та x_2 простору X. Тоді існують околи U_{x_1} та U_{x_2} цих точок, які не перетинаються. Потім розглянемо неізольовану точку x_3 із околу U_{x_2}. Тоді існують околи U_{x_3} та U'_{x_2} точок x_3 та x_2 відповідно, які не перетинаються і містяться у множині U_{x_2}. Далі візьмемо неізольовану точку x_4 із околу U_{x_3} і повторимо попередні міркування для точок x_4 та x_3. Продовжуючи цей процес нескінченно довго, отримаємо множину $\{x_i | \ i \in \mathbb{N}\}$, яка буде шуканим підпростором. $\square$

Для кожного $a \in PIC(X)$ символами $dom(a)$ та $im(a)$ будемо позначати відповідно область визначення та образ елемента a. Кардинальне число $\mathrm{rk}(a) = |dom(a)| = |im(a)|$ називається рангом перетворення a. Оскільки перетворення a є ін'єктивним, то можна говорити про обернене часткове перетворення, яке ми надалі будемо позначати через a^{-1}.

Нехай $a \in PIC(X)$ такий, що множина $im(a)$ є дискретним підпростором простору X, тоді множина $dom(a)$ теж є дискретним підпростором простору X, а також $a^{-1} \in PIC(X)$. Очевидно, що в цьому випадку $PIC(X)a = \{b \in PIC(X) | im(b) \subseteq im(a)\}$ та $aPIC(X) = \{b \in PIC(X) | dom(b) \subseteq dom(a)\}$.

Лема 2.2. *Для того, щоб елементи a і b напівгрупи $PIC(X)$ належали одному $\mathcal{H}$-класу, необхідно, щоб виконувались рівності $im(a) =$*

$im(b)$ та $dom(a) = dom(b)$. Якщо множина $im(a)$ є дискретним підпростором простору X, то ця умова є і достатньою.

Доведення. Необхідність умови випливає із того, що $a\mathcal{H}b$ тоді і тільки тоді, коли $PIC(X)a = PIC(X)b$ та $aPIC(X) = bPIC(X)$. Друга частина леми очевидна. $\square$

3. Основний результат

Із леми 2.2 випливає, що кожний $\mathcal{H}$-клас, який містить елемент напівгрупи $PIC(X)$, образ якого є дискретним підпростором простору X, однозначно визначається заданням деякої пари множин $A, B \subseteq X$, які є дискретними підпросторами простору X, такої, що $|A| = |B|$. Надалі $\mathcal{H}$-клас, який визначається даними множинами, будемо позначати $H(A, B)$.

Теорема 3.1. *Якщо напівгрупа часткових ін'єктивних неперервних перетворень гаусдорфового простору містить $\mathcal{H}$-зріз, то X — не більш ніж злічений дискретний топологічний простір.*

Доведення. Припустимо, що T — деякий $\mathcal{H}$-зріз напівгрупи $PIC(X)$. Ясно, що даний зріз містить рівно по одному елементу з кожного $\mathcal{H}$-класу вигляду $H(A, B)$. Тоді з леми 2.2 випливає наступна лема.

Лема 3.1. *Нехай $a, b \in T$ такі, що $dom(a) = dom(b)$ та $im(a) = im(b) = B$ і множина B є дискретним підпростором простору X. Тоді $a = b$.*

Зафіксуємо два елементи множини X і позначимо їх через 1 і 2. Побудуємо за зрізом T орієнтований граф K, вершинами якого є елементи множини X, а множина E стрілок визначається наступним чином: $(x, y) \in E$ тоді і тільки тоді, коли існує такий $a \in T$, що $a(1) = x, a(2) = y$. Наступні дві леми доводяться аналогічно лемам 3.3 і 3.4 із [2].

Лема 3.2. *Для кожного елемента $a \in T$ та довільних $x, y \in dom(a)$ з того, що $(x, y) \in E$, випливає, що $(a(x), a(y)) \in E$.*

Лема 3.3. *Граф K не містить циклів.*

Наслідок 3.1. *Граф K є транзитивним, тобто якщо $(x, y) \in E$ і $(y, z) \in E$, то $(x, z) \in E$.*

Лема 3.4. *Граф K не містить двох нескінченних ланцюгів, один з яких має початок, а інший — кінець.*

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай $(x_1, x_2, \ldots)$ та $(\ldots, y_{-1}, y_0)$ два таких ланцюги. За лемою 2.1 множина $\{x_i|\ i \in \mathbb{N}\}$ містить злічену дискретну підмножину. Далі з транзитивності графу K випливає, що елементи цієї підмножини також утворюють ланцюг. Тому без порушення загальності можна вважати, що множини $\{x_i|\ i \in \mathbb{N}\}$ та $\{y_i|\ i \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}\}$ є дискретними підпросторами простору X. Розглянемо елемент a з множини $T \cap H(\{x_i|\ i \in \mathbb{N}\},\ \{y_i|\ i \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}\})$ та числа k і l, котрі задовольняють наступні умови: $a(x_1) = y_k, a(x_l) = y_{k-1}$. Тоді за лемою 3.2 маємо, що $(x_l, x_1) \in E$, а це суперечить лемі 3.3. $\square$

Із попередньої леми одразу випливає, що K не містить також ланцюгів, нескінченних в обидва боки. Розглянемо тепер граф $K' = (X, E')$, який збігається з K, якщо кожен нескінченний шлях графа K має початок, і одержується з K заміною орієнтації кожної стрілки на протилежну в противному випадку. Тоді кожен нескінченний шлях графа K' має початок.

Лема 3.5. *Якщо для пари A, B підмножин із X існує такий елемент $a \in PIC(X)$, що $dom(a) = A$ і $im(a) = B$, то існує такий елемент $b \in T$, що $dom(b) = A$ і $im(b) = B$.*

Доведення. За лемою 2.2 для кожного c з $\mathcal{H}$-класу елемента a маємо, що $dom(c) = dom(a) = A$ і $im(c) = im(a) = B$. Отже, в якості b можна взяти той елемент зрізу T, що потрапляє у $\mathcal{H}$-клас елемента a. $\square$

Лема 3.6. *Якщо A — дискретний підпростір простору X і множина $B \subseteq X$ є рівнопотужною з A, то існує такий елемент $b \in T$, що $dom(b) = A$ і $im(b) = B$.*

Доведення. Оскільки довільне відображення дискретного простору є неперервним, то дане твердження одразу випливає із попередньої леми. $\square$

Для довільного елемента $x \in X$ позначимо $P_x := \{y \in X|\ (y, x) \in E'\}$.

Лема 3.7. *Якщо $|P_x| > 0$, то існує єдиний елемент $x_p \in P_x$ такий, що для довільного $y \in P_x \backslash \{x_p\}$ має місце $(y, x_p) \in E'$.*

Доведення. Розглянемо довільний елемент $x_1 \in P_x$. Далі будемо рухатись вздовж стрілок графа K' так, щоб кожна наступна вершина знову належала до множини P_x. Якщо припустити, що цей процес може тривати нескінченно довго, то ми отримаємо нескінченний ланцюг

$(x_1, x_2, x_3, \dots)$ (оскільки K не містить циклів), в якому кожна вершина належить до множини P_x. Використовуючи лему 2.1, без порушення загальності можна вважати, що множина $\{x_i |\ i \in \mathbb{N}\}$ є дискретним підпростором простору X. Тепер за лемою 3.6 існує елемент $a \in T$ такий, що $dom(a) = \{x_i |\ i \in \mathbb{N}\}$ та $im(a) = \{x_i |\ i \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Розглянемо числа k і l, котрі задовольняють наступні умови: $a(x_k) = x$, $a(x_{k+1}) = x_l$. Тоді за лемою 3.2 маємо, що $(x, x_l) \in E'$, а це суперечить тому, що $x_l \in P_x$. Звідси випливає, що на деякому кроці ми не зможемо продовжити наш шлях. Оскільки із останнього елемента цього шляху у множину P_x немає стрілок, то даний елемент задовольняє усі вимоги леми. Якби вимогам леми задовольняли два різні елементи x та y, то було б $(x, y) \in E'$ і $(y, x) \in E'$, а це суперечить лемі 3.3. $\square$

Лема 3.8. *Для довільної непорожньої підмножини $Y \subseteq X$ існує єдиний такий елемент $z \in Y$, що $(z, y) \in E'$ для кожного $y \in Y \backslash \{z\}$.*

Доведення. Припустимо, що такого елемента не існує. Тоді, стартуючи з довільного елемента множини Y, ми можемо рухатись проти стрілок графа K' як завгодно довго і таким чином побудувати нескінченний(за рахунок відсутності циклів) ланцюг без початку. А це суперечить означенню графа K'. Якби вимогам леми задовольняли два різні елементи x та z, то було б $(x, z) \in E'$ і $(z, x) \in E'$, а це суперечить лемі 3.3. $\square$

Тепер за допомогою графа K' визначимо на множині X бінарне відношення $\leq$ наступним чином: $x \leq y \iff (x = y$ або $(x, y) \in E')$

Лема 3.9. *Відношення $\leq$ є лінійним порядком.*

Доведення. Із означення графа K' випливає, що для довільних $x, y \in X$ або $x < y$, або $y < x$. Антисиметричність і транзитивність відношення випливає з леми 3.3. $\square$

Лема 3.10. *Відношення $\leq$ є досконалим порядком типу не більше ніж ω.*

Доведення. Із лем 3.8 та 3.9 випливає, що порядок $\leq$ є досконалим, а з леми 3.7 — що цей порядок не має граничних елементів. $\square$

Із леми 3.10 одразу випливає, що простір X є не більш ніж зліченим.

Лема 3.11. *Для того, щоб елементи a і b напівгрупи $PIC(X)$ належали одному $\mathcal{H}$-класу достатньо, щоб виконувались рівності $im(a) = im(b)$ та $dom(a) = dom(b)$.*

Доведення. Припустимо, що для елементів a і b напівгрупи $PIC(X)$ виконуються рівності $im(a) = im(b)$ та $dom(a) = dom(b)$, але елемент a не перебуває у відношенні $\mathcal{H}$ з елементом b. Позначимо через a' і b' такі різні елементи зрізу T, що $a'\mathcal{H}a$ і $b'\mathcal{H}b$. Тоді за лемою 2.2 $im(a') = im(b') = im(a)$ та $dom(a') = dom(b') = dom(a)$ і за лемою 3.2 перетворення a' і b' є різними ізоморфізмами цілком впорядкованих множин $dom(a)$ та $im(a)$. А це суперечить єдиності ізоморфізму між двома фіксованими цілком впорядкованими множинами. □

Припустимо, що x_0 є неізольованою точкою простору X. Тоді цей простір є зліченим та існує відмінна від x_0 точка $y \in X$. Позначимо через U_{x_0} та U_y околи точок x_0 та y відповідно, які не перетинаються, а також розглянемо підпростір $Y = y \cup U_{x_0}$. Ясно, що точка x_0 є неізольованою точкою простору Y, а точка y — ізольованою точкою цього простору, і простір Y є зліченим. За лемою 2.1 існує злічений дискретний підпростір $X' = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$ простору X. Далі розглянемо такі елементи a і b напівгрупи $PIC(X)$, що $im(a) = im(b) = Y$ та $dom(a) = dom(b) = X'$, а також $a(x_1) = b(x_2) = x_0$ і $a(x_2) = b(x_1) = y$. Тоді за лемою 3.11 $a\mathcal{H}b$, а тому $b = ac$ для деякого $c \in PIC(X)$, причому $Y \subseteq dom(c)$ та $c(Y) = Y$. Звідки випливає, що $b(x_1) = (ac)(x_1)$ та $y = c(a(x_1)) = c(x_0)$. А це суперечить ізольованості точки y, бо при неперервному ін'єктивному перетворенні c неізольована точка x_0 завжди переходить теж у неізольовану точку. Отже, усі точки простору X є ізольованими, а тому цей простір є дискретним. □

Зауваження 3.1. Якщо простір X є дискретним, то $PIC(X)$ збігається з інверсно-симетричною напівгрупою IS_X на множині X. Усі $\mathcal{H}$-зрізи напівгрупи IS_X у випадку скінченої множини X описані в [2], а для зліченої множини X $\mathcal{H}$-зрізи напівгрупи IS_X описані в [6].

Література

[1] L. E. Renner, *Analogue of Bruhat decomposition for algebraic monoids. II. The length function and the trichotomy* // J. Algebra, **175** (1995), N 2, 697–714.

[2] D. F. Cowan, N. R. Reilly, *Partial cross-sections of symmetric inverse semigroups. Internat* // J. Algebra Comput., **5** (1995), N 3, 259–287.

[3] O. Ganyushkin, V. Mazorchuk, *$\mathcal{L}$- and $\mathcal{R}$-cross-sections in IS_n* // Com. in Algebra, **31** (2003), N 9, 4507–4523.

[4] V.Pyekhtyeryev, *$\mathcal{H}$- and $\mathcal{R}$-cross-sections of the full finite semigroup T_n* // J. Algebra and Discrete Mathematics, (2003), N 3, 82–88.

[5] В. Пєхтєрєв, *$\mathcal{R}$-зрізи напівгрупи $\mathcal{T}_X$*, Математичні студії, **21** (2004), 133–139.

[6] V. Pyekhtyeryev, *$\mathcal{H}$-, $\mathcal{R}$- and $\mathcal{L}$-cross-sections of the infinite symmetric inverse semigroup IS_X* // J. Algebra and Discrete Mathematics. (2005), N 1, 92–104.

Відомості про авторів

Василь О. Пєхтєрєв

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська 64,
01033, Київ,
Україна
E-Mail: vasiliy@univ.kiev.ua