Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 2, 212 – 241

О суммарном времени пребывания в интервале однородных процессов с независимыми приращениями

Виктор Ф. Каданков и Татьяна В. Каданкова

(*Представлена В. С. Королюком*)

Аннотация. Для ряда однородных процессов с независимыми приращениями получены интегральные преобразования распределений суммарного времени пребывания в интервале. Для симметричного процесса Винера получено распределение суммарного времени пребывания процесса в интервале.

2000 MSC. 60G40, 60K20.

Ключевые слова и фразы. Процессы с независимыми приращениями, двухграничные функционалы, выход из интервала, суммарное время пребывания в интервале, последовательные итерации.

Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями [1] и кумулянтой

$$k(p) = \frac{1}{2}\,p^2\sigma^2 - \alpha p + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{-px} - 1 + \frac{px}{1+x^2}\Big)\Pi(dx), \qquad \mathrm{Re}(p) = 0. \quad (0.1)$$

Будем предполагать, что выборочные траектории процесса непрерывные справа и $\xi(0) = 0$. Отметим, что процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$ является строго марковским и однородным по пространству [2]. Зафиксируем $B > 0$, пусть $\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_A(\omega)$ — индикатор события A, и для всех $y \in \mathbb{R}$ введем случайную величину

$$\sigma_y(t) = \int\limits_0^t \mathbf{I}_{\{y+\xi(u)\in(0,B)\}}\,du, \qquad y \in \mathbb{R} \ —$$

Статья поступила в редакцию 18.05.2006

суммарное время пребывания процесса $y+\xi(\cdot)$ в интервале $(0,B)$ на временном отрезке $[0,t]$. Через ν_s обозначим независимую от процесса, показательно распределенную с параметром $s>0$ случайную величину: $\mathbf{P}\,[\,\nu_s>t\,]=\exp\{-st\}$. В этой работе, для ряда однородных процессов с независимыми приращениями, мы определим двухграничный функционал

$$C_a^s(y)=\mathbf{E}\exp\{-a\sigma_y(\nu_s)\}= s\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{E}\exp\{-a\sigma_y(t)\}\,dt, \qquad y\in\mathbb{R},\ a\ge 0\ -$$

преобразование Лапласа суммарного времени пребывания процесса $y+\xi(\cdot)$ в интервале $(0,B)$ на показательно распределенном временном отрезке $[0,\nu_s]$. Для этого нам понадобятся распределения ряда случайных величин, к определению которых мы переходим.

1. Выход процесса из интервала

Для $x\ge 0$ введем случайные величины:

$$\begin{aligned}\tau^x&=\inf\{t:\ \xi(t)\ge x\,\},\quad T^x=\xi(\tau^x)-x,\\ \tau_x&=\inf\{t:\ \xi(t)\le -x\,\},\quad T_x=-\xi(\tau_x)-x\end{aligned}\quad -$$

момент и величина первого пересечения верхнего уровня x процессом, и момент и величина первого пересечения процессом нижнего уровня $-x$. На событии $\{\tau^x=\infty\}$, $(\{\tau_x=\infty\})$ положим по определению $T^x=\infty$, $(T_x=\infty)$. Для интегральных преобразований совместных распределений $\{\,\tau^x,T^x\,\}$, $\{\,\tau_x,T_x\,\}$ при всех $s\ge 0$, $\mathrm{Re}(p)\ge 0$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\big[\exp\{-s\tau^x-pT^x\};\,\tau^x<\infty\big]\\&\qquad=\big(\mathbf{E}\,e^{-p\xi^+(\nu_s)}\big)^{-1}\mathbf{E}\big[e^{-p(\xi^+(\nu_s)-x)};\,\xi^+(\nu_s)\ge x\big],\\&\mathbf{E}[\exp\{-s\tau_x-pT_x\};\,\tau_x<\infty]\\&\qquad=\big(\mathbf{E}\,e^{p\xi^-(\nu_s)}\big)^{-1}\mathbf{E}\big[e^{p(\xi^-(\nu_s)+x)};\,-\xi^-(\nu_s)\ge x\big],\end{aligned}\tag{1.1}$$

где: $\xi^+(t)=\sup_{u\le t}\xi(u)$, $\xi^-(t)=\inf_{u\le t}\xi(u)$ — *supremum*, *infimum* процесса $\xi(\cdot)$ на интервале $[0,t]$,

$$\mathbf{E}\exp\{-p\,\xi^\pm(\nu_s)\,\}=\exp\left\{\int_0^\infty\frac{1}{t}\,e^{-st}\,\mathbf{E}\,[\,e^{-p\xi(t)}-1;\ \pm\xi(t)>0\,]\,dt\right\},$$
$$\pm\,\mathrm{Re}(p)\ge 0.$$

Равенства (1.1) получены Е. А. Печерским и Б. А. Рогозиным [3]. Простое доказательство этих равенств приведено в [12].

Пусть $y \in (0, B)$, $x = B - y$, $\xi(0) = 0$ и введем случайную величину

$$\chi(y) = \inf\{\, t : \ y + \xi(t) \notin (0, B)\,\} \ -$$

момент первого выхода процесса $y + \xi(t)$ из интервала $(0, B)$. Случайная величина $\chi(y)$ является марковским моментом процесса $\xi(t)$, $t \geq 0$ [2, с. 194], и $\mathbf{P}\,[\,\chi(y) < \infty\,] = 1$. Выход процесса из интервала $(0, B)$ может произойти либо через верхнюю границу B, либо через нижнюю 0. Введем события:

$A^x = \{\,\xi(\chi(y)) \geq B\,\}$ — выход процесса из интервала произошел через верхнюю границу;

$A_y = \{\,\xi(\chi(y)) \leq 0\,\}$ — выход процесса из интервала произошел через нижнюю границу.

Определим случайную величину

$$X(y) = (\xi(\chi(y)) - B)\,\mathbf{I}_{A^x} + (-\xi(\chi(y)))\,\mathbf{I}_{A_y}, \qquad \mathbf{P}\,[\,A^x + A_y\,] = 1,$$

величину пересечения границы процессом в момент первого выхода из интервала. Для всех $x \geq 0$ введем обозначения

$$f_+^s(x, du) = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^x};\ T^x \in du,\ \tau^x < \infty\right],$$
$$f_-^s(x, du) = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau_x};\ T_x \in du,\ \tau_x < \infty\right].$$

Преобразования Лапласа этих функций определены равенствами (1.1). Для $y \in (0, B)$, $x = B - y$ введем функции

$$F_+^s(x, du) = f_+^s(x, du) - \int_0^\infty f_-^s(y, dv)\, f_+^s(v + B, du)$$

$$F_-^s(y, du) = f_-^s(y, du) - \int_0^\infty f_+^s(x, dv)\, f_-^s(v + B, du).$$

Теорема 1.1 ([12]). *Пусть* $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, — *однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой* (0.1), $B > 0$ *фиксировано,* $y \in (0, B)$, $x = B - y$, $\xi(0) = 0$ *и*

$$\chi(y) = \inf\{\, t : \ y + \xi(t) \notin (0, B)\,\},$$
$$X(y) = (\xi(\chi(y)) - B)\,\mathbf{I}_{A^x} + (-\xi(\chi(y)))\,\mathbf{I}_{A_y} \quad -$$

момент первого выхода процесса $y+\xi(t)$ из интервала $(0,B)$ и величина пересечения границы в момент первого выхода. Тогда, для преобразований Лапласа совместного распределения случайных величин $\{\chi(y), X(y)\}$ при $s \geq 0$ справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{E}\,[e^{-s\chi(y)};\ X(y)\in du,\ A^x] = F_+^s(x,du) + \int\limits_0^\infty F_+^s(x,dv)\,\mathbf{K}_+^s(v,du),$$
$$\mathbf{E}\,[\,e^{-s\chi(y)};\ X(y)\in du,\ A_y] = F_-^s(y,du) + \int\limits_0^\infty F_-^s(y,dv)\,\mathbf{K}_-^s(v,du), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{K}_\pm^s(v,du) = \sum_{n=1}^\infty K_\pm^{(n)}(v,du,s)$, $v \geq 0$ — ряд из последовательных итераций;

$$K_\pm^{(1)}(v,du,s) = K_\pm(v,du,s),$$
$$K_\pm^{(n+1)}(v,du,s) = \int\limits_0^\infty K_\pm^{(n)}(v,dl,s)\,K_\pm(l,du,s) \quad — \tag{1.3}$$

последовательные итерации ($n \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$) ядер $K_\pm(v,du,s)$, которые определены равенствами

$$K_+(v,du,s) = \int\limits_0^\infty f_-^s(v+B,dl)\,f_+^s(l+B,du),$$
$$K_-(v,du,s) = \int\limits_0^\infty f_+^s(v+B,dl)f_-^s(l+B,du). \tag{1.4}$$

Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, — полунепрерывный снизу однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой

$$k(p) = \frac{1}{2}\,p^2\sigma^2 - \alpha p + \int\limits_0^\infty \Big(e^{-px} - 1 + \frac{px}{1+x^2}\Big)\Pi(dx), \qquad \mathrm{Re}(p) \geq 0. \tag{1.5}$$

Мы исключаем из рассмотрения монотонные неубывающие процессы. Тогда нижний уровень достигается процессом непрерывным образом и для интегральных преобразований распределений нижних граничных функционалов τ_x, $\xi^-(\nu_s)$ справедливы следующие формулы:

$$\mathbf{E}\,[\,e^{-s\tau_x};\ T_x\in du, \tau_x<\infty] = e^{-xc(s)}\delta(u)\,du,$$
$$\mathbf{E}\,e^{-p\xi^-(\nu_s)} = \frac{c(s)}{c(s)-p}, \qquad \mathrm{Re}(p) \leq 0,$$

где $c(s) > 0$ — единственный корень в правой полуплоскости $\mathrm{Re}(p) > 0$ уравнения $k(p) - s = 0$, а $\delta(u)$ — обобщенная дельта-функция. Используя факторизационное тождество Спицера–Рогозина

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\exp\{\,-p\,\xi(\nu_s)\,\} &= \frac{s}{s-k(p)}\\ &= \mathbf{E}\exp\{\,-p\,\xi^{+}(\nu_s)\,\}\,\mathbf{E}\exp\{\,-p\,\xi^{-}(\nu_s)\,\}, \qquad \mathrm{Re}(p)=0,\end{aligned}$$

и первое равенство (1.1), находим

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty e^{-px}\,\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^x-\lambda\xi(\tau^x)};\,\tau^x<\infty\big]dx\\ = \frac{1}{p}\Big(1-\frac{p+\lambda-c(s)}{k(p+\lambda)-s}\,\frac{k(\lambda)-s}{\lambda-c(s)}\Big), \quad (1.6)\end{aligned}$$

интегральное преобразование совместного распределения $\{\,\tau^x,\,\xi(\tau^x)\,\}$ момента первого пересечения верхнего уровня x процессом $\xi(t)$ и значения процесса в момент первого пересечения. Пусть $B > 0$ фиксировано, $y \in (0, B)$, $x = B - y$, $\xi(0) = 0$ и

$$\begin{aligned}\chi(y) &= \inf\{\,t:\; y+\xi(t)\notin(0,B)\,\},\\ X(y) &= (\xi(\chi(y))-B)\,\mathbf{I}_{A^x}+(-\xi(\chi(y)))\,\mathbf{I}_{A_y}\end{aligned} \quad -$$

момент первого выхода процесса $y + \xi(\cdot)$ из интервала $(0, B)$ и величина перескока процессом границы в момент выхода, где $A^x = \{\xi(\chi(y)) \ge B\,\}$, $A_y = \{\xi(\chi(y)) = 0\}$.

Следствие 1.1. *Пусть $\xi(t) \in R$, $t \ge 0$, — полунепрерывный снизу однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой* (1.5). *Тогда*

1) *для интегральных преобразований совместных распределений случайных величин $\{\chi(y), X(y)\}$ справедливы следующие равенства*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[e^{-s\chi(y)};\,X(y)\in du,\,A_y\big] &= \frac{1-G_x^s(c(s))}{1-G_B^s(c(s))}\,e^{-yc(s)}\,\delta(u)\,du\\ \mathbf{E}\big[e^{-s\chi(y)};\,X(y)\in du,\,A^x\big] &= \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^x};\,T^x\in du,\,\tau^x<\infty\big]\\ &\quad-\mathbf{E}\big[e^{-s\chi(y)};A_y\big]\,\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^B};\,T^B\in du,\,\tau^B<\infty\big],\end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$G_x^s(\lambda) = \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^x-\lambda\xi(\tau^x)};\,\tau^x<\infty\big], \qquad x \ge 0,$$

и интегральное преобразование этой функции определено равенством (1.6)*;*

2) *для интегральных преобразований моментов выхода из интервала справедливо следующее резольвентное представление*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\,[e^{-s\chi(y)}; A_y] &= \frac{R_x(s)}{R_B(s)}, \\
\mathbf{E}\,[e^{-s\chi(y)}; A^x] &= 1 - \frac{R_x(s)}{R_B(s)} \\
&\qquad - s\frac{R_x(s)}{R_B(s)} \int_0^B R_u(s)\,du + s\int_0^x R_u(s)\,du,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где [6]

$$R_x(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{xp}\,\frac{1}{k(p)-s}\,dp, \qquad \gamma > c(s) \quad - \tag{1.9}$$

резольвента полунепрерывного процесса с независимыми приращениями.

3) *для функции* $G_x^{s+a}(c(s+b))$, $x \geq 0$ *справедливо резольвентное представление*

$$\begin{aligned}
G_x^{s+a}(c(s+b)) &= 1 - \frac{a-b}{c(s+a)-c(s+b)}\,R_x(s+a)\,e^{-xc(s+b)} \\
&\qquad + (a-b)\int_0^x e^{-uc(s+b)} R_u(s+a)\,du, \qquad a, b \geq 0.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Доказательство. Впервые интегральные преобразования распределений момента $\chi(y)$ первого выхода из интервала полунепрерывного процесса, разными методами были получены в работах D. J. Emery [4] и Е. А. Печерского [5]. В. М. Шуренковым предложено для определения преобразований Лапласа распределений $\chi(y)$, $\{\chi(y), X(y)\}$ использовать формулы Е. Б. Дынкина. Равенства (1.8) были получены В. М. Шуренковым и В. Н. Супруном в работах [7, 8]. В работе [9] было определено преобразование Лапласа совместного распределения $\{\chi(y), X(y)\}$ в терминах совместного распределения $\{\xi^-(\nu_s), \xi(\nu_s), \xi^+(\nu_s)\}$ и меры $\Pi(A)$. Для процесса Пуассона с положительными скачками и отрицательным течением, равенства (1.8) приведены в [10].

Формулы (1.7), в которые входит и распределение величины пересечения процессом верхней границы, были получены в работах [13, 16]. В этих формулах величина пересечения $X(y)$ верхней границы интервала в момент выхода выражается через величину пересечения процессом верхнего уровня T^x. Именно это обстоятельство позволило решить ряд двухграничных задач [13–16] для полунепрерывного процесса с независимыми приращениями.

Получим равенства (1.7), исходя из равенств теоремы, которые для полунепрерывного процесса существенно упрощаются. В этом случае ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} K_-^{(n)}(v, du, s) &= e^{vc(s)} G^s_{v+B}(c(s))\, G^s_B(c(s))^{n-1}\, \delta(u)\, du, \\ \mathbf{K}^s_-(v, du) &= \frac{e^{vc(s)} G^s_{v+B}(c(s))}{1 - G^s_B(c(s))}\, \delta(u)\, du. \end{aligned}$$

Подставляя выражение для функции $\mathbf{K}^s_-(v, du)$ во вторую формулу теоремы, находим

$$\mathbf{E}\left[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in du, A_y \right] = \frac{1 - G^s_x(c(s))}{1 - G^s_B(c(s))}\, e^{-yc(s)}\, \delta(u)\, du \quad - \tag{1.11}$$

первое равенство (1.7). Аналогичным образом вычисляем ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} K_+^{(n)}(v, du, s) &= e^{-c(s)(v+B)}\, G^s_B(c(s))^{n-1}\, \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^B};\ T^B \in du,\ \tau^B < \infty\big], \\ \mathbf{K}^s_+(v, du) &= \frac{e^{-c(s)(v+B)}}{1 - G^s_B(c(s))}\, \mathbf{E}\big[\, e^{-s\tau^B};\ T^B \in du,\ \tau^B < \infty\big]. \end{aligned}$$

Подставляя выражение для функции $\mathbf{K}^s_+(v, du)$ в первую формулу теоремы, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\big[e^{-s\chi(y)};\ X(y) \in du,\ A^x\big] &= \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^x};\ T^x \in du,\ \tau^x < \infty\big] \\ &- e^{-yc(s)}\, \frac{1 - G^s_x(c(s))}{1 - G^s_B(c(s))}\, \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^B};\ T^B \in du,\ \tau^B < \infty\big] \quad - \end{aligned} \tag{1.12}$$

второе равенство (1.7). Интегрируя равенства (1.11), (1.12) по всем $u \in \mathbb{R}_+$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[e^{-s\chi(y)}; A_y\right] &= \frac{1 - G^s_x(c(s))}{1 - G^s_B(c(s))}\, e^{-yc(s)}, \\ \mathbf{E}\left[e^{-s\chi(y)}; A^x\right] &= \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^x}; \tau^x < \infty\big] \\ &\qquad - \frac{1 - G^s_x(c(s))}{1 - G^s_B(c(s))}\, e^{-yc(s)}\, \mathbf{E}\big[e^{-s\tau^B}; \tau^B < \infty\big]. \end{aligned}$$

Используя определение резольвенты (1.9), интегральное преобразование совместного распределения $\{\tau^x, T^x\}$ (1.6), получим резольвентные представления

$$G^s_x(c(s)) = 1 - k'(c(s))\, e^{-xc(s)}\, R_x(s),$$
$$\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^x}; \tau^x < \infty\big] = 1 - \frac{s}{c(s)}\, R_x(s) + s\int\limits_0^x R_u(s)\, du$$

функций $G^s_x(c(s))$, $\mathbf{E}\big[e^{-s\tau^x}; \tau^x < \infty\big]$, где $k'(c(s)) = \frac{d}{dp}k(p)\big|_{p=c(s)}$. Подставляя эти выражения в предыдущие равенства, получим

$$\mathbf{E}[e^{-s\chi(y)}; A_y] = \frac{R_x(s)}{R_B(s)},$$
$$\mathbf{E}[e^{-s\chi(y)};\ A^x] = 1 - \frac{R_x(s)}{R_B(s)} - s\frac{R_x(s)}{R_B(s)}\int\limits_0^B R_u(s)\, du + s\int\limits_0^x R_u(s)\, du$$

равенства (1.8) следствия. Равенство (1.10) следует из определения резольвенты (1.9) и формулы (1.6) для интегрального преобразования совместного распределения $\{\tau^x, T^x\}$ (см. также [16]). $\square$

2. Вхождение процесса в интервал

Положим по определению $\chi(y) = 0$, при $y \notin (0, B)$, и для всех $y \in \mathbb{R}$ введем случайные величины

$$\overline{\chi}(y) = \inf\{\, t > \chi(y) :\ y + \xi(t) \in (0, B)\,\},$$
$$\overline{X}(y) = y + \xi(\overline{\chi}(y)) \in (0, B)$$

— момент первого вхождения процесса $y + \xi(t)$ в интервал $(0, B)$, и значение процесса в момент вхождения. Отметим, что момент первого вхождения $\overline{\chi}(y)$ является марковским [2]. Обозначим $\sigma_y = \sigma_y(\overline{\chi}(y))$ и приведем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой* (0.1),

$$c(y, du, s, a) = \mathbf{E}\,[\exp\{\, -s\overline{\chi}(y) - a\sigma_y\,\};\ \overline{X}(y) \in du\,], \qquad y \in (0, B),$$
$$c^v(du, s) = \mathbf{E}\,[\exp\{\, -s\overline{\chi}(v + B)\,\};\ \overline{X}(v + B) \in du\,], \qquad v \geq 0, \ —$$
$$c_v(du, s) = \mathbf{E}\,[\exp\{\, -s\overline{\chi}(-v)\,\};\ \overline{X}(-v) \in du\,], \qquad v \geq 0$$

интегральные преобразования совместного распределения $\{\,\overline{\chi}(y),\ \sigma_y,\ \overline{X}(y)\,\}$ момента первого вхождения процесса в интервал, времени *пребывания в интервале до момента вхождения, и значения процесса в момент первого вхождения в интервал,* $y \in \mathbb{R}$. *Тогда для функций* $c^v(du,s)$, $c_v(du,s)$, $c(y,du,s,a)$ *при всех* $s>0$, $a\ge 0$, $v\ge 0$ *справедливы следующие равенства*

$$
\begin{aligned}
c^v(du,s) &= \int\limits_0^\infty \mathbf{Q}_+^s(v,dl)\,\mathbf{E}\,[e^{-s\tau_l}; B-T_l\in du] \\
&\quad + \int\limits_0^\infty \mathbf{Q}_+^s(v,dl)\int_0^\infty \mathbf{E}\,[\,e^{-s\tau_l}; T_l-B\in d\nu]\,\mathbf{E}\,[\,e^{-s\tau^\nu}; T^\nu\in du], \\
c_v(du,s) &= \int\limits_0^\infty \mathbf{Q}_-^s(v,dl)\,\mathbf{E}\,[e^{-s\tau^l}; T^l\in du] \\
&\quad + \int\limits_0^\infty \mathbf{Q}_-^s(v,dl)\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\,[e^{-s\tau^l}; T^l-B\in d\nu]\,\mathbf{E}\,[e^{-s\tau_\nu}; B-T_\nu\in du], \\
c(y,du,s,a) &= \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\,[e^{-(s+a)\chi(y)}; X(y)\in dv, A^x]\,c^v(du,s) \\
&\quad + \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\,[e^{-(s+a)\chi(y)}; X(y)\in dv, A_y]\,c_v(du,s), \qquad y\in(0,B),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где $\mathbf{Q}_\pm^s(v,du) = \sum_{n=0}^\infty Q_\pm^{(n)}(v,du,s)$ — *ряд Неймана из итераций* $Q_\pm^{(n)}(v,du,s)$;

$$
\begin{aligned}
Q_\pm^{(0)}(v,du,s) &= \delta(u-v)\,du; \\
Q_\pm^{(n)}(v,du,s) &= \int\limits_0^\infty Q_\pm^{(n-1)}(v,dl,s)\;Q_\pm(l,du,s), \quad n\in\mathbb{N} \quad —
\end{aligned}
$$

последовательные итерации ядер $Q_\pm(v,du,s)$, *которые определены равенствами*

$$
\begin{aligned}
Q_+(v,du,s) &= \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\,[\,e^{-s\tau_v};\ T_v-B\in dl\,]\,\mathbf{E}\,[\,e^{-s\tau^l};\ T^l-B\in du\,]; \\
Q_-(v,du,s) &= \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\,[\,e^{-s\tau^v};\ T^v-B\in dl\,]\,\mathbf{E}\,[\,e^{-s\tau_l};\ T_l-B\in du\,].
\end{aligned}
$$

Доказательство. Для функций $c^v(du,s)$, $c_v(du,s)$, $v \geq 0$ согласно формуле полной вероятности, однородности по пространству и свойству строгой марковости процесса, справедлива следующая система уравнений:

$$c^v(du,s) = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau_v}; B - T_v \in du\right] + \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl\right] c_l(du,s),$$

$$c_v(du,s) = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^v}; T^v \in du\right] + \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^v}; T^v - B \in dl\right] c^l(du,s).$$

Эта система линейных интегральных уравнений вполне аналогична системе линейных уравнений с двумя неизвестными. Подставляя из правой части второго уравнения выражение для функции $c_v(du,s)$ в первое уравнение, получим

$$\begin{aligned} c^{\,v}(du,s) &= \mathbf{E}\left[e^{-s\tau_v}; B - T_v \in du\right] \\ &\quad + \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl\right] \mathbf{E}[e^{-s\tau^l}; T^l \in du] \\ &\quad + \int\limits_{l=0}^\infty \mathbf{E}\left[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl\right] \int\limits_{\nu=0}^\infty \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^l}; T^l - B \in d\nu\right] c^{\,\nu}(du,s). \end{aligned}$$

Изменяя в третьем слагаемом правой части этого уравнения порядок интегрирования, для функции $c^{\,v}(du,s)$, $v \geq 0$ получим

$$\begin{aligned} c^{\,v}(du,s) &= \int\limits_0^\infty Q_+(v,d\nu,s)\, c^{\,\nu}(du,s) + \mathbf{E}\left[e^{-s\tau_v}; B - T_v \in du\,\right] \\ &\quad + \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl\right] \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^l}; T^l \in du\right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

линейное интегральное уравнение с ядром

$$Q_+(v,du,s) = \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\left[e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl\right] \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^l}; T^l - B \in du\right], \qquad v \geq 0.$$

Покажем, что при всех $v, u \geq 0$, $s > s_0$, для этого ядра справедлива оценка

$$Q_+(v,du,s) \leq \lambda = \mathbf{E}\, e^{-s_0\tau_B}\, \mathbf{E}\, e^{-s_0\tau^B} < 1, \qquad s_0 > 0.$$

Действительно, при $s > 0$ из очевидного равенства

$$\mathbf{E}\,[e^{-s\tau^{v+B}}; T^{v+B} \in du] = \mathbf{E}\,[e^{-s\tau^{v}}; T^{v} - B \in du] + \int\limits_0^B \mathbf{E}\,[e^{-s\tau^{v}}; T^{v} \in dl]\,\mathbf{E}\,[e^{-s\tau^{B-l}}; T^{B-l} \in du],$$

следует цепочка неравенств

$$\mathbf{E}\,[e^{-s\tau^{v}}; T^{v} - B \in du] \le \mathbf{E}\,[e^{-s\tau^{v+B}}; T^{v+B} \in du] \le \mathbf{E}\,e^{-s\tau^{v+B}} \le \mathbf{E}\,e^{-s\tau^{B}}.$$

Аналогичным образом устанавливаем, что

$$\mathbf{E}\,[e^{-s\tau_{v}}; T_{v} - B \in du] \le \mathbf{E}\,[e^{-s\tau_{v+B}}; T_{v+B} \in du] \le \mathbf{E}\,[e^{-s\tau_{v+B}}] \le \mathbf{E}\,e^{-s\tau_{B}}.$$

Из этих двух цепочек неравенств, для ядра $Q_+(v, du, s)$, при всех $v, u \ge 0$, $s > s_0$ получаем следующую оценку:

$$Q_+(v, du, s) = \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\,[e^{-s\tau_{v}}; T_{v} - B \in dl]\,\mathbf{E}\,[e^{-s\tau^{l}}; T^{l} - B \in du] \le \mathbf{E}\,e^{-s\tau_{B}}\,\mathbf{E}\,e^{-s\tau^{B}} < \lambda = \mathbf{E}\,e^{-s_0\tau_{B}}\,\mathbf{E}\,e^{-s_0\tau^{B}} < 1, \qquad s_0 > 0.$$

Используя полученную оценку ядра и метод математической индукции, нетрудно установить, что для последовательных итераций $Q_+^{(n)}(v, du, s)$ ядра $Q_+(v, du, s)$, при всех $v, u \ge 0$, $s > s_0$ справедлива оценка

$$Q_+^{(n+1)}(v, du, s) = \int\limits_0^\infty Q_+^{(n)}(v, dl, s)\,Q_+(l, du, s) < \lambda^{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, ряд из последовательных итераций $\sum_{n\in\mathbb{N}} Q_+^{(n)}(v,du,s) < \lambda(1-\lambda)^{-1}$ сходится равномерно по всем $v, u \ge 0$, $s > s_0$. Применяя для решения линейного интегрального уравнения (2.2) метод последовательных итераций [17], получим первое равенство теоремы. Справедливость второго равенства теоремы устанавливается аналогичным образом. Третье равенство теоремы является следствием формулы полной вероятности и того факта, что $\chi(y)$ — марковский момент. $\square$

Нам понадобятся также следующие распределения и математические ожидания

$$\begin{aligned}
\overline{c}^v(s) &= \mathbf{P}\,[\overline{\chi}(v+B) > \nu_s],\\
\overline{c}_v(s) &= \mathbf{P}\,[\overline{\chi}(-v) > \nu_s], \qquad v \ge 0,\\
\overline{c}(y,s,a) &= \mathbf{E}\,[\,\exp\{-a\sigma_y(\nu_s)\}; \overline{\chi}(y) > \nu_s\,], \qquad y \in (0,B).
\end{aligned}$$

Следствие 2.1. *Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \ge 0$, — однородный процесс с независимыми приращениями и кумулянтой* (0.1). *Тогда для функций $\overline{c}^v(s)$, $\overline{c}_v(s)$, $\overline{c}(y,s,a)$ выполняются равенства*

$$\begin{aligned}
\overline{c}_v(s) &= 1 - \mathbf{E}\exp\{\,-s\overline{\chi}(-v)\,\}, \qquad v \ge 0,\\
\overline{c}^v(s) &= 1 - \mathbf{E}\exp\{\,-s\overline{\chi}(v+B)\,\}, \qquad v \ge 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{c}(y,s,a) = \frac{s}{s+a} + \frac{a}{s+a}\,\mathbf{E}\exp\{\,-(s+a)\chi(y)\,\}&\\
- \mathbf{E}\exp\{\,-s\overline{\chi}(y) - a\sigma_y\,\}&, \qquad y \in (0,B),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\exp\{\,-s\overline{\chi}(v+B)\,\} &= \int_0^B c^v(du,s),\\
\mathbf{E}\exp\{\,-s\overline{\chi}(-v)\,\} &= \int_0^B c_v(du,s), \qquad v \ge 0,\\
\mathbf{E}\exp\{\,-s\overline{\chi}(y) - a\sigma_y\,\} &= \int_0^B c(y,du,s,a), \qquad y \in (0,B),
\end{aligned}$$

а функции $c^v(du,s)$, $c_v(du,s)$, $c(y,du,s,a)$ определены в теореме 2.1 *равенствами* (2.1).

Доказательство. Для функций $\overline{c}^v(s)$, $\overline{c}_v(s)$, $v \ge 0$, согласно формуле полной вероятности и свойству строгой марковости процесса, справедлива система уравнений

$$\begin{aligned}
\overline{c}^v(du,s) &= 1 - \mathbf{E}\,e^{-s\tau_v} + \int_0^\infty \mathbf{E}[\,e^{-s\tau_v}; T_v - B \in dl]\,\overline{c}_l(du,s),\\
\overline{c}_v(du,s) &= 1 - \mathbf{E}\,e^{-s\tau^v} + \int_0^\infty \mathbf{E}[\,e^{-s\tau^v}; T^v - B \in dl]\,\overline{c}^l(du,s).
\end{aligned}$$

Эта система уравнений вполне аналогична системе уравнений из предыдущей теоремы. Применяя для ее решения метод последовательных итераций, получим

$$
\begin{aligned}
\overline{c}^v(s) &= \int_0^\infty \mathbf{Q}^s_+(v,du)\,(1-\mathbf{E}\,e^{-s\tau_u})\\
&\qquad + \int_0^\infty \mathbf{Q}^s_+(v,dl)\int_0^\infty \mathbf{E}[\,e^{-s\tau_l};\ T_l - B\in du\,]\,(1-\mathbf{E}\,e^{-s\tau^u}),\\
\overline{c}_v(s) &= \int_0^\infty \mathbf{Q}^s_-(v,du)\,(1-\mathbf{E}\,e^{-s\tau^u})\\
&\qquad + \int_0^\infty \mathbf{Q}^s_-(v,dl)\int_0^\infty \mathbf{E}[\,e^{-s\tau^l};\ T^l - B\in du\,]\,(1-\mathbf{E}\,e^{-s\tau_u}).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Поскольку

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathbf{Q}^s_+(v,du) - \int_0^\infty \mathbf{Q}^s_+(v,dl)\int_0^\infty \mathbf{E}\,[\,e^{-s\tau_l};\ T_l - B\in du\,]\,\mathbf{E}\,e^{-s\tau^u}\\
&= 1 - \int_0^\infty \mathbf{Q}^s_+(v,du)\int_0^\infty \mathbf{E}\,[\,e^{-s\tau_u};\ T_u - B\in dl\,]\,\mathbf{E}\,[\,e^{-s\tau^l};\ T^l\in(0,B)\,],
\end{aligned}
$$

то из первого равенства (2.3) получим первое равенство следствия. Аналогичным образом устанавливается справедливость второго равенства следствия. Третье равенство следствия, при $y\in(0,B)$, следует из соотношения

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\,[\,\exp\{\,-a\sigma_y\,\};\ \overline{\chi}(y) > \nu_s\,]\\
&\qquad = \frac{s}{s+a}\,(1-\mathbf{E}\,[\,\exp\{\,-(s+a)\chi(y)\,\}\,])\\
&\qquad + \int_0^\infty \mathbf{E}\,[e^{-(s+a)\chi(y)}; X(y)\in dv, A^x]\,\overline{c}^v(s)\\
&\qquad\qquad + \int_0^\infty \mathbf{E}\,[e^{-(s+a)\chi(y)}; X(y)\in dv, A_y]\,\overline{c}_v(s)
\end{aligned}
$$

и первых двух равенств следствия. □

3. Время пребывания в интервале обобщенного процесса Пуассона

Мы определили интегральные пребразования распределений вспомогательных функционалов, и теперь приведем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, — обобщенный процесс Пуассона с кумулянтой*

$$k(p) = \alpha\, p + c \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{-px} - 1)\, d\Phi(x), \qquad \alpha \geq 0,\ c > 0, \quad \mathrm{Re}(p) = 0.$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения величины скачка процесса. Тогда для интегральных преобразований распределения случайной величины $\sigma_y(t)$

$$C_a^s(y) = \mathbf{E} \exp\{\, -a\sigma_y(\nu_s)\,\}, \qquad y \in \mathbb{R}$$

выполняются следующие равенства:

$$C_a^s(y) = 1 - \frac{a}{s+a} \int\limits_0^B \mathbf{C}_a^s(y, du)\bigl(1 - \mathbf{E} \exp\{-(s+a)\chi(u)\}\bigr), \qquad y \in (0, B),$$

$$C_a^s(y) = 1 - \frac{a}{s+a} \int\limits_0^B \mathbf{E}\, [e^{-s\overline{\chi}(y)}; \overline{X}(y) \in du] \times \int\limits_0^B \mathbf{C}_a^s(u, dv)\, \bigl(1 - \mathbf{E}\, e^{-(s+a)\chi(v)}\bigr), \qquad y \notin (0, B),$$

где $\mathbf{C}_a^s(y, du) = \sum_{n=0}^{\infty} c^{(n)}(y, du, s, a)$ — ряд Неймана из итераций $c^{(n)}(y, du, s, a)$;

$$c^{(0)}(y, du, s, a) = \delta(y - u)\, du,$$
$$c^{(n)}(y, du, s, a) = \int\limits_0^B c^{(n-1)}(y, dv, s, a)\, c(v, du, s, a),$$

последовательные итерации $(n \in \mathbb{N})$ ядер

$$c(y, du, s, a) = \mathbf{E}\, [\exp\{-s\overline{\chi}(y) - a\sigma_y\}; \overline{X}(y) \in du], \qquad y \in (0, B),$$

которые, вместе с функциями

$$\mathbf{E}\,[e^{-s\overline{\chi}(y)}; \overline{X}(y) \in du], \qquad y \notin (0,B),$$

определены равенствами (2.1) *теоремы* 2.1.

Доказательство. Так как $\overline{\chi}(y)$ марковский момент, то согласно формуле полной вероятности, для функций $C_a^s(y),\ y \in (0,B)$ справедливо следующее уравнение:

$$C_a^s(y) = \mathbf{E}\,[\exp\{-a\sigma_y(\nu_s)\}; \overline{\chi}(y) > \nu_s] \\ + \int_0^B \mathbf{E}[\exp\{-s\overline{\chi}(y) - a\sigma_y\}; \overline{X}(y) \in du]\, C_a^s(u).$$

Используя равенства теоремы 2.1 и ее следствия, из этого уравнения получим

$$C_a^s(y) = \frac{s}{s+a} + \frac{a}{s+a}\,\mathbf{E}\,e^{-(s+a)\chi(y)} - c_a^s(y,\mathbb{B}) + \int_0^B c(y,du,s,a)\mathbf{C}_a^s(u), \tag{3.1}$$

где

$$c_a^s(y,\mathbb{B}) = \int_0^B c(y,du,s,a) = \mathbf{E}\,\exp\{-s\overline{\chi}(y) - a\sigma_y\}.$$

В условиях теоремы $\mathbf{P}\,[\overline{\chi}(y) > 0\,] = 1$, при $y \in (0,B)$, и для всех $s > s_0$

$$\sup_{y\in(0,B)} \mathbf{E}\exp\{-s\overline{\chi}(y)\} \le \lambda = \sup_{y\in(0,B)} \mathbf{E}\exp\{-s_0\overline{\chi}(y)\} < 1, \qquad s_0 > 0.$$

Поэтому для всех $y \in (0,B),\ u, a \ge 0,\ s > s_0$

$$c(y,du,s,a) = \mathbf{E}[\,\exp\{\,-s\overline{\chi}(y) - a\sigma_y\,\};\ \overline{X}(y) \in du\,] \\ \le \mathbf{E}\exp\{\,-s\overline{\chi}(y)\,\} \le \lambda.$$

По индукции устанавливаем, что для всех $y \in (0,B),\ u, a \ge 0,\ s > s_0$

$$c^{(n+1)}(y,du,s,a) = \int_0^B c^{(n)}(y,dv,s,a)c(v,du,s,a) \le \lambda^{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Положим по определению $c^{(0)}(y,du,s,a) = \delta(y-u)\,du$ и введем функцию

$$\mathbf{C}_a^s(y,du) = \sum_{n=0}^{\infty} c^{(n)}(y,du,s,a), \qquad y \in (0,B)\ \ -$$

сумму равномерно сходящегося ряда. Применяя для решения интегрального уравнения (3.1) метод последовательных итераций, находим

$$C_a^s(y) = 1 - \frac{a}{s+a} \int\limits_0^B \mathbf{C}_a^s(y, du) \left(1 - \mathbf{E} \exp\{-(s+a)\chi(u)\}\right), \quad - \qquad y \in (0, B)$$

первое равенство теоремы. Второе равенство теоремы является следствием формулы полной вероятности. $\square$

Для полунепрерывного процесса с независимыми приращениями и кумулянтой (1.5), интегральные преобразования распределения суммарного времени пребывания процесса в интервале и предельное распределение суммарного времени пребывания процесса в интервале, другими методами получено в работе [16]. Перейдем к примерам применения формул, полученных в предыдущих теоремах и следствиях, для конкретных процессов с независимыми приращениями.

Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, — процесс Пуассона с положительными скачками, отрицательным течением и кумулянтой

$$k(p) = \alpha\, p + c\left(\mathbf{E}\, e^{-p\eta} - 1\right), \qquad \alpha, c > 0, \quad \eta \in (0, \infty). \tag{3.2}$$

Тогда, согласно равенствам (1.8) следствия 1.1, справедливы формулы

$$\varphi_y^{s+a} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\,[e^{-(s+a)\chi(y)}; A_y] = \frac{R_x(s+a)}{R_B(s+a)},$$

$$\mathbf{E}\, e^{-(s+a)\chi(y)} = 1 - (s+a)\,\frac{R_x(s+a)}{R_B(s+a)} \int\limits_0^B R_u(s+a)\, du + (s+a) \int\limits_0^x R_u(s+a)\, du. \tag{3.3}$$

Из равенств (1.7)–(1.10) следствия 1.1 вытекает следующая формула ($x = B - y$):

$$\Phi_y^{s+a}(c(s)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\,[e^{-(s+a)\chi(y) - c(s)X(y)}; A^x] = e^{xc(s)} V(x) - \varphi_y^{s+a}\, e^{c(s)B}\, V(B), \tag{3.4}$$

где непрерывная функция $V(x)$, $x \in \mathbb{R}$ определена равенствами

$$V(x) = 1 + a \int_0^x e^{-uc(s)} R_u(s+a)\, du, \quad x \geq 0; \qquad V(x) = 1, \quad x < 0.$$

Далее, из равенств теоремы 2.1 следует, что в случае процесса Пуассона с течением

$$\mathbf{Q}_{\pm}^{s}(v, du) = \delta(u - v)\, du, \qquad c^v(du, s) = e^{-vc(s)} \delta(B - u)\, du, \qquad v \geq 0,$$

$$c_v(du, s) = \mathbf{E}\,[\, e^{-s\tau^v};\ T^v \in du\,] \\ + e^{c(s)B} \mathbf{E}\,[\, e^{-s\tau^v} e^{-c(s)T^v};\ T^v > B\,]\, \delta(B-u)\, du, \qquad v \geq 0,$$

$$c(y, du, s, a) = \varphi_y^{s+a} m_0^s(du) \\ + \big(\Phi_y^{s+a}(c(s)) + \varphi_y^{s+a}\, e^{c(s)B}\, \hat{\Psi}_0^s(c(s))\big) \delta(B-u)\, du, \qquad y \in (0, B),$$

где

$$m_0^s(du) = \mathbf{E}\,[\, e^{-s\tau^0};\ T^0 \in du\,], \quad \hat{\Psi}_0^s(c(s)) = \mathbf{E}\,[\, e^{-s\tau^0} e^{-c(s)T^0};\ T^0 > B\,].$$

Используя равенства следствия 2.1, находим

$$\overline{c}^v(s) = \mathbf{P}\,[\, \overline{\chi}(v+B) > \nu_s\,] = 1 - e^{-vc(s)}, \qquad v \geq 0,$$
$$\overline{c}_v(s) = \mathbf{P}\,[\, \overline{\chi}(-v) > \nu_s\,] = 1 - \check{m}_v^s - e^{c(s)B}\, \hat{\Psi}_0^s(c(s)), \qquad v \geq 0,$$

$$\overline{c}(y, s, a) = \mathbf{E}\,[\, e^{-a\sigma_y(\nu_s)};\ \overline{\chi}(y) > \nu_s\,] = \frac{s}{s+a} + \frac{a}{s+a}\, \mathbf{E}\, e^{-(s+a)\chi(y)} \\ - \varphi_y^{s+a}\, \check{m}_0^s - \big(\Phi_y^{s+a}(c(s)) + \varphi_y^{s+a}\, e^{c(s)B}\, \hat{\Psi}_0^s(c(s))\big), \qquad y \in (0, B),$$

где $\check{m}_0^s = \mathbf{E}\,[\, e^{-s\tau^0};\ T^0 < B\,]$. Вспомогательные функции определены, и теперь мы приведем следствие теоремы 3.1.

Следствие 3.1. *Пусть $\xi(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, — процесс Пуассона с кумулянтой* (3.2) *и*

$$\sigma_y(t) = \int_0^t \mathbf{I}_{\{y+\xi(u) \in (0,B)\}}\, du, \qquad y \in \mathbb{R} \quad -$$

суммарное время пребывания процесса в интервале $(0, B)$ до момента времени t. Тогда для интегральных преобразований распределения случайной величины $\sigma_y(t)$ выполняются следующие равенства:

$$\mathbf{E}\,\{\, -a\sigma_y(\nu_s)\,\} = v(B - y) - C_B^*(s, a)\, V(B-y)\, e^{-yc(s)}, \qquad y \in (0, B),$$
$$\mathbf{E}\,\{\, -a\sigma_y(\nu_s)\,\} = 1 - C_B^*(s, a)\, e^{-yc(s)}, \qquad y \geq B,$$

$$\mathbf{E}\{\,-a\sigma_{-y}(\nu_s)\,\} = 1 + a\int\limits_0^B m_y^s(du)\int\limits_0^{B-u} R_v(s+a)\,dv$$
$$- C_B^*(s,a)\biggl(\Psi_y^s(c(s)) + a\int\limits_0^B m_y^s(du)\,e^{-uc(s)}\int\limits_0^{B-u} e^{-vc(s)}R_v(s+a)\,dv\biggr),$$
$$y \ge 0 \quad (3.5)$$

где функции $v(x)$, $V(x)$; $x \ge 0$ *определены равенствами*

$$v(x) = 1 + a\int\limits_0^x R_u(s+a)\,du, \qquad V(x) = 1 + a\int\limits_0^x e^{-uc(s)}R_u(s+a)\,du,$$

а

$$C_B^*(s,a) = \frac{a}{c(s)}\bigl(V(B)e^{c(s)B} - v(B)\bigr)\biggl(k'(c(s)) + a\int\limits_0^B V(x)\,dx\biggr)^{-1},$$

$$\begin{aligned} m_y^s(du) &= \mathbf{E}\,[\,e^{-s\tau^y};\ T^y \in du\,],\\ \Psi_y^s(c(s)) &= \mathbf{E}\,\exp\{\,-s\tau^y - c(s)T^y\,\}, \end{aligned} \qquad y \ge 0.$$

Доказательство. Согласно равенству (3.1) и предыдущим вычислениям, для функции $C_a^s(y)$, $y \in (0,B)$ справедливо уравнение

$$C_a^s(y) = \frac{s}{s+a} + \frac{a}{s+a}\mathbf{E}\,e^{-(s+a)\chi(y)} - \varphi_y^{s+a}\,\check{m}_0^s - c(y)$$
$$+ \varphi_y^{s+a}\int\limits_0^B m_0^s(du)\,C_u^s(a) + c(y)\,C_B^s(a), \qquad y \in (0,B), \quad (3.6)$$

где

$$c(y) = \Phi_y^{s+a}(c(s)) + \varphi_y^{s+a}\,e^{c(s)B}\,\hat{\Psi}_0^s(c(s)), \qquad C_B^s(a) = \lim_{y\uparrow B} C_a^s(y).$$

Обозначим

$$\mathbf{\Psi}(y,du,s,a) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi^{(n)}(y,du,s,a),$$

$$\psi^{(0)}(y,du,s,a) = \delta(y-u)\,du,$$
$$\psi^{(n)}(y,du,s,a) = \int\limits_0^B \psi^{(n-1)}(y,dv,s,a)\,\varphi_v^{s+a}m_0^s(du), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Выполняя необходимые вычисления, находим

$$\mathbf{\Psi}(y, du, s, a) = \delta(y-u)\,du + \frac{R_{B-y}(s+a)}{R_0(s+a)}\;\frac{e^{-c(s)B}}{V(B)}\;m_0^s(du),$$

где

$$V(x) = 1 + s\int\limits_0^x e^{-uc(s)} R_u(s+a)\,du, \qquad x \ge 0.$$

Решая уравнение (3.6) методом последовательных итераций, получим

$$C_a^s(y) = v(B-y) + \frac{a}{c(s)}\,R_{B-y}(s+a)\,\frac{e^{-c(s)B}}{V(B)}\,\bigl(v(B) - V(B)\,e^{c(s)B}\bigr) \\ - C(y) + C_B^s(a)C(y), \qquad y \in (0,B), \quad (3.7)$$

где

$$v(x) = 1 + a\int\limits_0^x R_u(s+a)\,du, \qquad x \ge 0,$$

$$C(y) = \int\limits_0^B \mathbf{\Psi}(y, du, s, a)\,c(u) \\ = V(B-y)\,e^{c(s)(B-y)} + \frac{R_{B-y}(s+a)}{V(B)}\left(k'(c(s)) + a\int\limits_0^B V(x)\,dx\right).$$

Полагая в равенстве (3.7) $y \uparrow B$, получим уравнение для функции $C_B^s(a)$, решая которое, находим

$$C_B^s(a) = \mathbf{E}\,\exp\{\,-a\sigma_B(\nu_s)\,\} = 1 - \frac{a}{c(s)}\;\frac{V(B) - v(B)\,e^{-c(s)B}}{k'(c(s)) + a\int_0^B V(x)\,dx}$$

Подставляя это выражение для функции $C_B^s(a)$ в равенство (3.7), находим

$$C_a^s(y) = v(B-y) - \frac{a}{c(s)}\;\frac{V(B)\,e^{c(s)B} - v(B)}{k'(c(s)) + a\int_0^B V(x)\,dx}\;V(B-y)\,e^{-yc(s)}, \\ y \in (0,B)$$

первое равенство следствия. Два остальных равенства следуют из первого и формулы полной вероятности. □

4. Время пребывания в интервале процесса Винера

Пусть $w(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, — симметричный процесс Винера с кумулянтой $k(p) = \frac{1}{2}\,p^2$. В этом случае

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{P}[\,T^x = T_x = 0\,] = 1, \\ &\mathbf{E}\,[e^{-s\tau^x}; T^x \in du] = e^{-x\sqrt{2s}}\,\delta(u)\,du = \mathbf{E}\,[e^{-s\tau_x}; T_x \in du], \end{aligned}\right. \qquad x \geq 0.$$

Из равенств теоремы 1.1 следуют формулы

$$K_-^{(n)}(v, du, s) = e^{-v\sqrt{2s}}e^{-2Bn\sqrt{2s}}\,\delta(u)\,du = K_+^{(n)}(v, du, s), \qquad v \geq 0,$$

$$\mathbf{K}_-^s(v, du) = e^{-v\sqrt{2s}}\,\frac{e^{-2B\sqrt{2s}}}{1 - e^{-2B\sqrt{2s}}}\,\delta(u)\,du = \mathbf{K}_+^s(v, du), \qquad v \geq 0,$$

$$\mathbf{E}\,[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in du, A^x] = \frac{\operatorname{sh}(y\sqrt{2s})}{\operatorname{sh}(B\sqrt{2s})}\,\delta(u)\,du, \qquad y \in (0, B),$$

$$\mathbf{E}\,[e^{-s\chi(y)}; X(y) \in du, A_y] = \frac{\operatorname{sh}(x\sqrt{2s})}{\operatorname{sh}(B\sqrt{2s})}\,\delta(u)\,du, \qquad x = B - y,$$

где $\operatorname{sh}(x)$ — гиперболический синус. Используя равенства теоремы 2.1, следствия 2.1 и предыдущие формулы, находим

$$\left.\begin{aligned} &c^v(du, s) = e^{-v\sqrt{2s}}\,\delta(B - u)\,du, \\ &c_v(du, s) = e^{-v\sqrt{2s}}\,\delta(u)\,du, \end{aligned}\right. \qquad v \geq 0,$$

$$c(y, du, s, a) = \frac{\operatorname{sh}(y\sqrt{2(s+a)})}{\operatorname{sh}(B\sqrt{2(s+a)})}\,\delta(B - u)\,du + \frac{\operatorname{sh}(x\sqrt{2(s+a)})}{\operatorname{sh}(B\sqrt{2(s+a)})}\,\delta(u)\,du,$$

$$\overline{c}^v(s) = \overline{c}_v(s) = 1 - e^{-v\sqrt{2s}}, \qquad v \geq 0,$$

$$\overline{c}(y, s, a) = \frac{s}{s+a}\left(1 - \frac{\operatorname{sh}(\frac{x-y}{2}\,\sqrt{2(s+a)})}{\operatorname{ch}(\frac{B}{2}\,\sqrt{2(s+a)})}\right), \qquad y \in (0, B).$$

где $\operatorname{ch}(x)$ — гиперболический косинус. Следующее следствие выполняется.

Следствие 4.1. *Пусть $w(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, — симметричный процесс Винера,*

$$C_a^s(y) = s\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{E}\exp\left\{-a\int_0^t \mathbf{I}_{\{y+w(u)\in(0,B)\}}\,du\right\}dt, \qquad y \in \mathbb{R} \quad —$$

интегральное преобразование распределения суммарного времени пребывания процесса Винера в интервале $(0, B)$. *Тогда при* $s > 0$, $a \geq 0$ *справедливы следующие равенства:*

$$C_a^s(y) = 1 - \frac{a}{\sqrt{s+a}} \, \frac{\mathrm{sh}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a}) \, \exp\{-(y-B)\sqrt{2s}\}}{\sqrt{s+a}\ \mathrm{sh}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a}) + \sqrt{s}\ \mathrm{ch}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}, \qquad y \geq B,$$

$$C_a^s(y) = \frac{s}{s+a}\left(1 + \frac{a}{\sqrt{s}} \, \frac{\mathrm{ch}(\frac{B-2y}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}{\sqrt{s+a}\ \mathrm{sh}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a}) + \sqrt{s}\ \mathrm{ch}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}\right), \qquad y \in (0, B),$$

$$C_a^s(y) = 1 - \frac{a}{\sqrt{s+a}} \, \frac{\mathrm{sh}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a}) \, \exp\{y\sqrt{2s}\}}{\sqrt{s+a}\ \mathrm{sh}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a}) + \sqrt{s}\ \mathrm{ch}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}, \qquad y \leq 0. \tag{4.1}$$

Доказательство. Используя определенные в начале этого пункта функции $c(y, du, s, a)$, $\overline{c}(y, s, a)$, равенство (3.1), для функций $C_a^s(y)$, $y \in (0, B)$ получим уравнение

$$C_a^s(y) = \frac{s}{s+a}\left(1 - \frac{\mathrm{ch}(\frac{B-2y}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}{\mathrm{ch}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}\right) + \frac{\mathrm{sh}(y\sqrt{2(s+a)})}{\mathrm{sh}(B\sqrt{2(s+a)})}\, C_B^s(a) + \frac{\mathrm{sh}(x\sqrt{2(s+a)})}{\mathrm{sh}(B\sqrt{2(s+a)})}\, C_0^s(a), \qquad y \in (0, B).$$

Для определения функций $C_0^s(a)$, $C_B^s(a)$ воспользуемся следующими соображениями. Во-первых, согласно симметрии процесса $C_0^s(a) = C_B^s(a)$ и тогда, согласно формуле полной вероятности, выполняется система уравнений

$$C_a^s(y) = 1 - e^{-(y-B)\sqrt{2s}} + e^{-(y-B)\sqrt{2s}}\, C_B^s(a), \qquad y \geq B,$$

$$C_a^s(y) = \frac{s}{s+a}\left(1 - \frac{\mathrm{ch}(\frac{B-2y}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}{\mathrm{ch}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}\right) + \frac{\mathrm{ch}(\frac{B-2y}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}{\mathrm{ch}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}\, C_B^s(a), \qquad y \in (0, B). \tag{4.2}$$

Во-вторых, согласно [1, с. 178], функция $C_a^s(y)$, $y \in \mathbb{R}$ имеет непрерывную первую производную. Дифференцируя уравнения (4.2) по переменой y, затем полагая $y \to B$, получим

$$\frac{d}{dy} C_a^s(y)\Big|_{y=B} = \sqrt{2s} - \sqrt{2s}\, C_B^s(a),$$
$$\frac{d}{dy} C_a^s(y)\Big|_{y=B} = -\frac{s\sqrt{2}}{\sqrt{s+a}} \frac{\operatorname{sh}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}{\operatorname{ch}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})} + \sqrt{2(s+a)}\, \frac{\operatorname{sh}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}{\operatorname{ch}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}\, C_B^s(a)$$

систему уравнений относительно функций $\frac{d}{dy} C_a^s(y)\big|_{y=B}$, $C_B^s(a)$. Решая эту систему уравнений, находим

$$C_B^s(a) = 1 - \frac{a}{\sqrt{s+a}} \frac{\operatorname{sh}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}{\sqrt{s+a}\ \operatorname{sh}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a}) + \sqrt{s}\ \operatorname{ch}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s+a})}.$$

Подставляя выражения для функции $C_B^s(a)$ в уравнения (4.2), получим два первых равенства следствия. Третье равенство следует из симметрии процесса и двух предыдущих. □

Обращая преобразования Лапласа в равенствах (4.1), можно определить распределения случайной величины $\sigma_y(t)$. В следующей теореме мы приведем эти распределения для случая $y \in (0, B)$.

Теорема 4.1. *Пусть $w(t)$, $t \geq 0$, — симметричный процесс Винера и*

$$\sigma_y(t) = \int_0^t \mathbf{I}_{\{y+w(u)\in(0,B)\}}\, du, \qquad \overline{\sigma}_y(t) = \int_0^t \mathbf{I}_{\{y+w(u)\notin(0,B)\}}\, du, \qquad y \in (0,B) \ —$$

суммарные времена пребывания процесса $y + w(\cdot)$ в интервале и вне интервала $(0, B)$ до момента времени t. Тогда для распределений случайных величин $\sigma_y(t)$, $\overline{\sigma}_y(t)$ выполняются следующие равенства:

$$\mathbf{P}\left[\sigma_y(t) < u\right] = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^u \exp\Big(-\frac{(y+nB)^2}{2v}\Big) K_n\Big(\frac{t-u}{t-v}\Big)\, d_v \arcsin\sqrt{\frac{v}{t}}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^u \exp\Big(-\frac{(x+nB)^2}{2v}\Big)\,K_n\Big(\frac{t-u}{t-v}\Big)\,d_v \arcsin\sqrt{\frac{v}{t}},$$

$$u\in(0,t),$$

$$\mathbf{P}\,[\overline{\sigma}_y(t)<u]$$

$$=1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^{t-u} \exp\Big(-\frac{(y+nB)^2}{2v}\Big)\,K_n\Big(\frac{u}{t-v}\Big)\,d_v \arcsin\sqrt{\frac{v}{t}}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^{t-u} \exp\Big(-\frac{(x+nB)^2}{2v}\Big)\,K_n\Big(\frac{u}{t-v}\Big)\,d_v \arcsin\sqrt{\frac{v}{t}},$$

$$u\in(0,t),$$

где $x=B-y$,

$$K_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}^2 x^k\,(1-x)^{n-k},\qquad x\in[0,1].$$

В частности,

$$\mathbf{P}\,[\,\overline{\sigma}_y(t)=0\,]$$

$$=1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^{t} \exp\Big(-\frac{(y+nB)^2}{2v}\Big)\,d_v \arcsin\sqrt{\frac{v}{t}}$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^{t} \exp\Big(-\frac{(x+nB)^2}{2v}\Big)\,d_v \arcsin\sqrt{\frac{v}{t}}$$

$$=\mathbf{P}\,[\,\sigma_y(t)=t\,].$$

Доказательство. Так как $\sigma_y(t)+\overline{\sigma}_y(t)=t$, то справедливо равенство

$$\mathbf{E}\,\exp\{-a\sigma_y(\nu_s)\}\big|_{s=:s+b,\;a=:a-b}=\frac{s+b}{s}\,\mathbf{E}\,\exp\{-a\sigma_y(\nu_s)-b\overline{\sigma}_y(\nu_s)\},$$

где символ $=:$ означает соответствующую замену переменных. Выполняя во втором равенстве из (4.1) замену переменных $s=:s+b$, $a=:a-b$, находим

$$\mathbf{E}\,\exp\{-a\sigma_y(\nu_s)-b\overline{\sigma}_y(\nu_s)\}$$

$$=\frac{s}{s+a}\bigg(1+\frac{a-b}{\sqrt{s+b}}\;\frac{\mathrm{ch}(\frac{B-2y}{\sqrt2}\sqrt{s+a})}{\sqrt{s+a}\;\mathrm{sh}(\frac{B}{\sqrt2}\sqrt{s+a})+\sqrt{s+b}\;\mathrm{ch}(\frac{B}{\sqrt2}\sqrt{s+a})}\bigg),$$

$$y\in(0,B)\qquad(4.3)$$

интегральные преобразования совместного распределения $\{\sigma_y(t), \overline{\sigma}_y(t)\}$. Полагая в этом равенстве $a = 0$, получим

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{E}\,e^{-b\overline{\sigma}_y(t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{s}\biggl(1 - \frac{b}{\sqrt{s+b}}\;\frac{\operatorname{ch}(\frac{B-2y}{\sqrt{2}}\sqrt{s})}{\sqrt{s}\;\operatorname{sh}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s}) + \sqrt{s+b}\;\operatorname{ch}(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s})}\biggr). \quad (4.4)$$

Поскольку

$$\sqrt{s}\;\operatorname{sh}\biggl(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s}\biggr) + \sqrt{s+b}\;\operatorname{ch}\biggl(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s}\biggr)$$

$$= \sqrt{b}\;\operatorname{ch}\left(\frac{B}{\sqrt{2}}\sqrt{s} + \ln\left(\sqrt{1+\frac{s}{b}} + \sqrt{\frac{s}{b}}\right)\right),$$

и

$$(\operatorname{ch} x)^{-1} = 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \exp\{-(2n+1)x\},$$

то из (4.4) получим

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{E}\,e^{-b\overline{\sigma}_y(t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\;\frac{b}{\sqrt{s+b}}\;\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{b^n}{(\sqrt{s+b}+\sqrt{s})^{2n+1}}\;e^{-(y+nB)\sqrt{2s}}$$

$$- \frac{1}{s}\;\frac{b}{\sqrt{s+b}}\;\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{b^n}{(\sqrt{s+b}+\sqrt{s})^{2n+1}}\;e^{-(x+nB)\sqrt{2s}}. \quad (4.5)$$

Согласно [18], имеют место следующие соответствия между функцией-оригиналом и ее трансформацией Лапласа

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\;\exp\Bigl(-\frac{\lambda^2}{4t}\Bigr) \overset{\mathbf{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{s}}\;\exp(-\lambda\sqrt{s}),$$

$$\exp\Bigl(-\frac{bt}{2}\Bigr)\;J_{n+\frac{1}{2}}\Bigl(\frac{bt}{2}\Bigr) \overset{\mathbf{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{s(s+b)}}\;\;\frac{b^{n+\frac{1}{2}}}{(\sqrt{s+b}+\sqrt{s})^{2n+1}},$$

где $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ — функция Бесселя с полуцелым индексом. Используя эти соответствия, из (4.5) находим

$$\frac{1}{b}\;\mathbf{E}\,e^{-b\overline{\sigma}_y(t)} = \frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{b}}\;\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \left(\exp\Bigl(-\frac{bt}{2}\Bigr) J_{n+\frac{1}{2}}\Bigl(\frac{bt}{2}\Bigr)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&* \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(y+nB)^2}{2t} \right) \right) \\
&- \frac{1}{\sqrt{b}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\exp\Bigl(-\frac{bt}{2}\Bigr) J_{n+\frac{1}{2}}\Bigl(\frac{bt}{2}\Bigr) \right) \\
&\qquad\qquad * \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x+nB)^2}{2t} \right) \right), \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

где символ $*$ означает операцию свертки соответствующих функций. Согласно [18], справедливо соответствие

$$
\frac{1}{b^{n+\frac{1}{2}}} \exp\Bigl(-\frac{bt}{2}\Bigr) J_{n+\frac{1}{2}}\Bigl(\frac{bt}{2}\Bigr) \xleftrightarrow{\mathbf{L}} \begin{cases} 0, & u > t, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \frac{(tu-u^2)^n}{n!\, t^n}, & 0 < u < t. \end{cases}
$$

Для функции

$$
k_n(u,t) = \frac{(tu-u^2)^n}{n!\, t^n}, \qquad u \in (0,t)
$$

легко устанавливаются следующие свойства

$$
\begin{aligned}
\frac{d^m}{du^m} k_n(u,t)\Big|_{u=0} &= 0, \qquad m = 0,1,\dots,n-1; \\
\frac{d^n}{du^n} k_n(u,t) &= K_n\Bigl(\frac{u}{t}\Bigr), \qquad u \in [0,t],
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 x^k\, (1-x)^{n-k}, \qquad x \in [0,1], \\
&K_n(0) = 1, \qquad K_n(1) = (-1)^n.
\end{aligned}
$$

Используя теорему о дифференцировании функции-оригинала и свойства функции $k_n(u,t)$, получим новое соответствие

$$
\frac{1}{\sqrt{b}} \exp\Bigl(-\frac{bt}{2}\Bigr) J_{n+\frac{1}{2}}\Bigl(\frac{bt}{2}\Bigr) \xleftrightarrow{\mathbf{L}} \begin{cases} 0, & u > t, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, K_n\Bigl(\frac{u}{t}\Bigr), & u \in [0,t]. \end{cases}
$$

Переходя в равенстве (4.6) к функциям-оригиналам и выполняя операцию свертки, получим распределение случайной величины $\overline{\sigma}_y(t)$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\,[\overline{\sigma}_y(t) < u] \\
&= 1 - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{t-u} \exp\left(-\frac{(y+nB)^2}{2v} \right) K_n\Bigl(\frac{u}{t-v}\Bigr) \frac{dv}{\sqrt{v(t-v)}}
\end{aligned}
$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{t-u} \exp\Big(-\frac{(x+nB)^2}{2v}\Big) K_n\Big(\frac{u}{t-v}\Big) \frac{dv}{\sqrt{v(t-v)}},$$
$$u \in (0,t). \quad (4.7)$$

Поскольку $\mathbf{P}[\,\sigma_y(t) < u\,] = \mathbf{P}[\,\overline{\sigma}_y(t) > t-u\,] = 1 - \mathbf{P}[\,\overline{\sigma}_y(t) < t-u\,]$, то из (4.7) получим

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[\,\sigma_y(t) < u\,] &\\ = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{u} &\exp\Big(-\frac{(y+nB)^2}{2v}\Big) K_n\Big(\frac{t-u}{t-v}\Big) \frac{dv}{\sqrt{v(t-v)}} \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{u} &\exp\Big(-\frac{(x+nB)^2}{2v}\Big) K_n\Big(\frac{t-u}{t-v}\Big) \frac{dv}{\sqrt{v(t-v)}}, \\ & u \in (0,t).\end{aligned}$$

В частности, если случайный процесс $w(t),\ t \geq 0$ начинает эволюцию из середины интервала $(0,B)$, то для $u \in (0,t)$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[\,\overline{\sigma}_{B/2}(t) < u\,] &\\ = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{t-u} &\exp\Big(-\frac{B^2(2n+1)^2}{8v}\Big) K_n\Big(\frac{u}{t-v}\Big) \frac{dv}{\sqrt{v(t-v)}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[\,\sigma_{B/2}(t) < u\,] &\\ = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{u} &\exp\Big(-\frac{B^2(2n+1)^2}{8v}\Big) K_n\Big(\frac{t-u}{t-v}\Big) \frac{dv}{\sqrt{v(t-v)}}.\end{aligned}$$

Вычисляя пределы в обеих частях (4.7) при $u \to 0$ и учитывая, что $K_n(0) = 1$, находим

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[\,\overline{\sigma}_y(t) = 0\,] = 1 &- \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{t} \exp\Big(-\frac{(y+nB)^2}{2v}\Big) \frac{dv}{\sqrt{v(t-v)}} \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{t} \exp\Big(-\frac{(x+nB)^2}{2v}\Big) \frac{dv}{\sqrt{v(t-v)}}.\end{aligned}$$

$\square$

Распределения, приведенные в теореме 4.1, являются предельными для распределений суммарного времени пребывания в интервале однородных процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий (при соответствующей нормировке пространства и времени). Такая предельная теорема доказана в [16] для полунепрерывного процесса с независимыми приращениями. Кроме того, из равенств теоремы 4.1 легко получить распределения времени пребывания винеровского процесса в полуплоскости. Справедливо следующее следствие.

Следствие 4.2. *Пусть $w(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ — симметричный процесс Винера, $y \geq 0$ и*

$$\alpha_y(t) = \lim_{B\to\infty} \sigma_y(t) = \int_0^t \mathbf{I}_{\{y+w(u)>0\}}\, du,$$

$$\overline{\alpha}_y(t) = \lim_{B\to\infty} \overline{\sigma}_y(t) = \int_0^t \mathbf{I}_{\{y+w(u)\leq 0\}}\, du$$

суммарное время, проведенное процессом $y + w(\cdot)$ в верхней полуплоскости до момента t и суммарное время, проведенное процессом $y+w(\cdot)$ в нижней полуплоскости до момента t соответственно. Тогда для распределений случайных величин $\alpha_y(t)$, $\overline{\alpha}_y(t)$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\,[\,\alpha_y(t) < u\,] &= \frac{2}{\pi}\int_0^u \exp\left(-\frac{y^2}{2v}\right)\, d_v \arcsin\sqrt{\frac{v}{t}}, \qquad u \in (0,t),\\ \mathbf{P}\,[\,\overline{\alpha}_y(t) < u\,] &= 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{t-u} \exp\left(-\frac{y^2}{2v}\right)\, d_v \arcsin\sqrt{\frac{v}{t}}, \qquad u \in (0,t). \end{aligned} \tag{4.8}$$

В частности, [11]

$$\mathbf{P}\,[\,\alpha_0(t) < u\,] = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{u}{t}}, \qquad u \in (0,t).$$

Доказательство. Вычисляя в равенствах теоремы 4.1 пределы при $B \to \infty$, получим равенства (4.8) следствия. Полагая в первой формуле $y = 0$, находим

$$\mathbf{P}\,[\,\alpha_0(t) < u\,] = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{u}{t}}, \qquad u \in (0,t)$$

закон арксинуса, полученный П. Леви [11] для распределения времени пребывания винеровского процесса в верхней полуплоскости. Равенства (4.8) можно получить также исходя из формулы (4.3). Так, полагая в (4.3) $b = 0$ и вычисляя пределы при $B \to \infty$, для $y \geq 0$ находим

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{E}\exp\left(-a\,\alpha_y(t)\right)\,dt$$
$$= \frac{1}{s+a}\left(1 - e^{-y\sqrt{2(s+a)}}\right) + \frac{1}{\sqrt{s(s+a)}}\,e^{-y\sqrt{2(s+a)}}.$$

Выполняя обращение преобразований Лапласа [18], находящихся в правой части этого равенства, получим

$$\mathbf{P}\left[\,\alpha_y(t) = t\,\right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^y \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right)\,du,$$
$$\mathbf{P}\left[\,\alpha_y(t) < u\,\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^u \exp\left(-\frac{y^2}{2v}\right)\,d_v \arcsin\sqrt{\frac{v}{t}}, \qquad u \in (0,t)$$

распределения времени пребывания процесса $y+w(t),\ t \geq 0$ в верхней полуплоскости. Проводя аналогичные вычисления, из формулы (4.3) находим

$$\mathbf{P}\left[\,\overline{\alpha}_y(t) = 0\,\right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^y \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right)\,du,$$
$$\mathbf{P}\left[\,\overline{\alpha}_y(t) < u\,\right] = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{t-u} \exp\left(-\frac{y^2}{2v}\right)\,d_v \arcsin\sqrt{\frac{v}{t}}, \qquad u \in (0,t)$$

распределения времени пребывания процесса $y+w(t),\ t \geq 0$ в нижней полуплоскости. $\square$

Литература

[1] А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Москва, Наука, 1964, 280 с.

[2] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов.* Т 2. Москва: Наука, 1973, 639 с.

[3] Е. А. Печерский, Б. А. Рогозин, *О совместных распределениях случайных величин, связанными с флуктуациями процесса с независимыми приращениями* // Теория вероятностей и ее применение. **14** (1969), N 3, 431–444.

[4] D. J. Emery, *Exit problem for a spectrally positive process.* Adv. Appl. Prob. 1973, 498–520.

[5] Е. А. Печерский, *Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и из полуинтервала* // Теория вероятностей и ее применения, **19** (1974), N 1, 104–119.

[6] Ю. В. Боровских, *Полные асимптотические разложения для резольвенты полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с поглощением и распределения вероятности разорения.* В кн.: Асимптотические методы в теории вероятностей. Киев, 1979, 10–21.

[7] В. Н. Супрун, В. М. Шуренков, *О резольвенте процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось.* В кн.: Исследования по теории случайных процессов. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1975, 170–174.

[8] В. Н. Супрун. *Задача о разорении и резольвента обрывающегося процесса с независимыми приращениями* // УМЖ, **1** (1976), N 28, 53–61.

[9] В. М. Шуренков, *Предельное распределение момента выхода и положения в момент выхода из широкого интервала для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака* //Теория вероятностей и ее применения, **23** (1978), N 2, 419–425.

[10] В. С. Королюк, *Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.* Киев: Наук. Думка, 1975, 240 с.

[11] P. Levy. *Sur certain processes stochastiques homogenes* // Compositio math. **7** (1939), 283–339.

[12] В. Ф. Каданков, Т. В. Каданкова, *О распределении момента первого выхода из интервала и величины перескока границы для процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий* // Укр. мат. журн. **57** (2005), N 10, 1359–1384.

[13] Tatiana V. Kadankova, *On the distribution of the number of the intersections of a fixed interval by the semi-continuous process with independent increments* //Theory of Stochastic Processes. (2003), N 1–2, 73–81.

[14] Т. В. Каданкова, *Про сумісний розподіл supremum'a, infimum'a та значення напівнеперервного процесу з незалежними приростами* // ТІМС, (2004), Вип. 70, 56–65.

[15] Т. В. Каданкова, *Граничные функционалы полунепрерывного процесса с независимыми приращениями в интервале* // УМЖ, (2004), N 3, 381–398.

[16] V. F. Kadankov, T. V. Kadankova, *On the disribution of duration of stay in an interval of the semi-continuous process with independent increments* // Random Oper. and Stoch. Equ. (ROSE), **12** (2004), N 4, 365–388.

[17] И. Г. Петровский, *Лекции по теории интегральных уравнений.* М.: Наука, 1965, 127 с.

[18] В. А. Диткин, П. И. Кузнецов, *Справочник по операционному исчислению.* М.-Л. ГИТТЛ, 1951, 256 с.

Сведения об авторах

Виктор Федорович Каданков
Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская, 3
01601, Киев-4,
Украина
E-Mail: kadankov@voliacable.com

Татьяна Викторовна Каданкова
Mathematical Statistics Center
for Statistics
Limburgs Universitair Centrum,
Universitaire Campus, b.D, B-3590
Diepenbeek,
Belgium
E-Mail: tetyana.kadankova@uhasselt.be