Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 2, 187 – 198

Про одну теорему Л. Сонс та асимптотичне поводження рядів Діріхле

Петро В. Філевич та Мирослав М. Шеремета

Анотація. У роботі встановлено співвідношення між порядком і нижнім порядком для ряду Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності.

2000 MSC. 30B50.

Ключові слова та фрази. Ряд Діріхле, порядок, нижній порядок, теорема Л. Сонс.

1. Вступ

Для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \qquad z = re^{i\theta}, \tag{1.1}$$

нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, а

$$\varrho = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}, \qquad \lambda = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} \ -$$

відповідно її порядок та нижній порядок. Дж. Уіттекер [1] довів, що

$$\lambda \le \varrho\beta, \qquad \beta := \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln \lambda_{n+1}}. \tag{1.2}$$

Для аналітичної в крузі $\{z : |z| < 1\}$ функції вигляду (1.1) порядок ϱ_0 і нижній порядок λ_0 визначаються відповідно рівностями

$$\varrho_0 = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}, \qquad \lambda_0 = \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}.$$

Стаття надійшла в редакцію 8.10.2004

ISSN 1810 – 3200.

За умови $\varrho_0 \in (0, +\infty)$ у статті [2] Л. Сонс стверджує, що

$$\lambda_0 + 1 \le (\varrho_0 + 1)\beta. \tag{1.3}$$

Тут ми покажемо, що ця нерівність є неправильною, і доведемо, що для аналітичних в одиничному крузі функцій правильним є повний аналог нерівності Уіттекера.

Оскільки ряди Діріхле з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками є безпосереднім узагальненням лакунарних степеневих рядів вигляду (1.1), то природно розглянути задачу про можливість узагальнення теореми Уіттекера для рядів Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності, а звідси отримати різні аналоги нерівності (1.2) для степеневих рядів, зокрема, для аналітичних в одиничному крузі функцій вигляду (1.1).

Отже, нехай (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), а ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it \tag{1.4}$$

має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$. Для $\sigma < A$ нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \ge 0\}$ — максимальний член ряду (1.4), а $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$.

Через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних, необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ, для яких похідна Φ' є додатною, неперервно диференційовною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функцію. Для $\Phi \in \Omega(A)$ нехай φ — функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [3,4] функція Ψ є неперервно диференційовною і зростаючою до A на $(-\infty, A)$, а функція φ є неперервно диференційовною і зростаючою до A на $(0, +\infty)$.

Для функції $\Phi \in \Omega(A)$ і чисел $0 \le a < b < +\infty$ покладемо

$$G_1(a, b, \Phi) = \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\, dt, \quad G_2(a, b, \Phi) = \Phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t)\, dt\right).$$

Тоді [5] $G_1(a, b, \Phi) < G_2(a, b, \Phi)$ і $G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi) = \Phi(\varkappa_n)$, де

$$\varkappa_n = \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \varphi(t)\, dt.$$

Основним результатом нашої статті є таке твердження.

Теорема 1.1. *Нехай ряд Діріхле* (1.4) *має абсцису абсолютної збіжності* $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$ *і* $\ln \mu(\sigma, F) \le \Phi(\sigma)$ *для всіх* $\sigma \in [\sigma_0, A)$, *де* $\Phi \in \Omega(A)$. *Тоді*

$$\varliminf_{\sigma \uparrow A} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)} \le \varliminf_{n\to\infty} \frac{G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi)}{G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi)}. \tag{1.5}$$

Якщо, крім того, функція $\Phi \in \Omega(A)$ *задовольняє умову*

$$Q(\sigma) + \Big(\frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)^2} - 1\Big) \ln \Phi(\sigma) \ge q > -\infty, \qquad \sigma \in [\sigma_0, A), \tag{1.6}$$

де $Q(\sigma) \equiv 0$, *якщо* $A < +\infty$, *і* $Q \equiv \ln \sigma$, *якщо* $A = \infty$, *то*

$$\varliminf_{\sigma \uparrow 0} \frac{\ln \ln \mu(\sigma, F)}{\ln \Phi(\sigma)} \le \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi)}{\ln G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi)}. \tag{1.7}$$

2. Спростування теореми Л. Сонс

Нехай $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^{\lambda_n} : n \ge 1\}$ — максимальний член ряду (1.1). Оскільки $\ln r = -(1+o(1))(1-r)$, $r \uparrow 1$, і для аналітичної в $\{z : |z| < 1\}$ функції (1.1) виконуються нерівності

$$\mu_f(r) \le M_f(r) \le \frac{1+r}{1-r} \mu_f\Big(\frac{r+1}{2}\Big),$$

то

$$\varrho_0 = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln \mu_f(r)}{\ln(1/|\ln r|)}, \qquad \lambda_0 = \varliminf_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln \mu_f(r)}{\ln(1/|\ln r|)}.$$

Для спростування нерівності (1.3) розглянемо степеневий ряд (1.1) з довільною послідовністю натуральних показників (λ_n) і коефіцієнтами $a_n = \exp\{\sqrt{\lambda_n}\}$. Зрозуміло, що радіус збіжності такого ряду дорівнює 1, $\ln \mu_f(r) \le \max\{\sqrt{x} + x \ln r : x \ge 0\} = 1/(4|\ln r|)$, тобто $\varrho_0 \le 1$. З іншого боку, для $r_n = \exp\{-1/(2\sqrt{\lambda_n})\}$ маємо

$$\varrho_0 \ge \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln a_n + \lambda_n \ln r_n)}{\ln(1/|\ln r_n|)} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n}/2)}{\ln(2\sqrt{\lambda_n})} = 1,$$

так що $\varrho_0 = 1$. Далі,

$$\varkappa_n = \frac{\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}} + \sqrt{\lambda_n}} \uparrow 0, \qquad n \to \infty,$$

і тому $\ln \mu_f(r) = \ln a_n + \lambda_n \ln r = \sqrt{\lambda_n} + \lambda_n \ln r$ для $r \in [e^{\varkappa_{n-1}}, e^{\varkappa_n}]$. Для таких r розглянемо функцію

$$B(\ln r) = \frac{\ln\ln \mu_f(r)}{\ln(1/|\ln r|) - \ln 4} = \frac{\ln(\sqrt{\lambda_n} + \lambda_n \ln r)}{\ln(1/|\ln r|) - \ln 4}.$$

Легко перевірити, що для $\sigma \in (\varkappa_{n-1}, \varkappa_n)$

$$B'(\sigma) = \frac{\lambda_n|\sigma|(\ln(1/|\sigma|) - \ln 4) - (\sqrt{\lambda_n} + \sigma\lambda_n)\ln(\sqrt{\lambda_n} + \sigma\lambda_n)}{|\sigma|(\sqrt{\lambda_n} + \sigma\lambda_n)(\ln(1/|\sigma|) - \ln 4)^2} = \frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}.$$

Оскільки $\varkappa_{n-1} < \sigma_n = \ln r_n = -1/(2\sqrt{\lambda_n}) < \varkappa_n$, $P(\sigma_n) = 0$ і $P'(\sigma) = -\lambda_n(\ln(1/|\sigma|) - \ln 4 + \ln(\sqrt{\lambda_n} + \sigma\lambda_n)) < 0$, то функція B на $[\varkappa_{n-1}, \varkappa_n]$ має єдину точку екстремуму (максимуму) $\sigma = \sigma_n$, а $\min\{B(\sigma) : \sigma \in [\varkappa_{n-1}, \varkappa_n]\} = \min\{B(\varkappa_{n-1}), B(\varkappa_n)\}$. Звідси випливає, що $\underline{\lim}_{\sigma\uparrow 0} B(\sigma) = \underline{\lim}_{n\to\infty} B(\varkappa_n)$ і, отже,

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \underline{\lim}_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln\mu_f(r)}{\ln(1/|\ln r|) - \ln 4} = \underline{\lim}_{r\uparrow 1} B(\ln r) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln\ln\mu_f(\exp\{\varkappa_n\})}{\ln(1/|\ln\varkappa_n|)}\\ &= \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln(\sqrt{\lambda_n} + \lambda_n\exp\{-1/(\lambda_{n+1} + \lambda_n)\})}{\ln(\lambda_{n+1} + \lambda_n)} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln\lambda_n}{\ln\lambda_{n+1}} = \beta.\end{aligned}$$

Якби нерівність (1.3) була правильною, то для побудованої функції ми мали б нерівність $\beta + 1 \le 2\beta$, що можливо тільки за умови $\beta = 1$. Отже, наведена Л. Сонс нерівність (1.3) неправильна.

3. Порівняльний ряд Діріхле і доведення теореми

Для функції $\Phi \in \Omega(A)$ з $A \in (-\infty, +\infty]$ порівняльним рядом Діріхле будемо називати ряд

$$F_c(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n)) + s\lambda_n\}. \tag{3.1}$$

Ряд (3.1), взагалі кажучи, є формальним, тобто абсциса його абсолютної збіжності може бути меншою від A і навіть дорівнювати $-\infty$, проте його максимальний член існує для будь-якого $\sigma < A$.

Правильність теореми отримаємо, використовуючи наступну лему.

Лема 3.1. *Для порівняльного ряду правильні наступні рівності*

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \frac{\ln\mu(\sigma, F_c)}{\Phi(\sigma)} = 1, \qquad \overline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \frac{\ln\ln\mu(\sigma, F_c)}{\ln\Phi(\sigma)} = 1, \tag{3.2}$$

$$\underline{\lim}_{\sigma\uparrow A} \frac{\ln\mu(\sigma, F_c)}{\Phi(\sigma)} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi)}{G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi)}, \tag{3.3}$$

а якщо

$$\ln\ln\mu(\sigma, F_c) + \Big(\frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)^2} - 1\Big)\ln\Phi(\sigma) \ge 0, \qquad \sigma \in [\sigma_0, A), \tag{3.4}$$

то

$$\varliminf_{\sigma\uparrow 0}\frac{\ln\ln\mu(\sigma,F_c)}{\ln\Phi(\sigma)}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}{\ln G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)}. \tag{3.5}$$

Доведення. Рівності (3.2) легко випливають з наступного твердження [3,4]: для того, щоб $\ln\mu(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma\in[\sigma_0,A)$, необхідно і досить, щоб $\ln|a_n|\le-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n\ge n_0$.

Далі, оскільки $(t\Psi(\varphi(t)))'=(t\varphi(t)-\Phi(\varphi(t)))'=\varphi(t)$, то для ряду (3.1)

$$\frac{\ln|a_n|-\ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}=\varkappa_n=\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\varphi(t)\,dt\uparrow A,\qquad n\to\infty.$$

Тому $\ln\mu(\sigma,F_c)=-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))+\sigma\lambda_n$ для $\sigma\in[\varkappa_{n-1},\varkappa_n]$. Для $\sigma\in(\varkappa_{n-1},\varkappa_n)$ маємо

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\ln\mu(\sigma,F_c)}{\Phi(\sigma)}\Big)'&=\frac{\lambda_n\Phi(\sigma)-\Phi'(\sigma)(-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))+\sigma\lambda_n)}{\Phi^2(\sigma)}\\&=\frac{\lambda_n\Phi'(\sigma)}{\Phi^2(\sigma)}\Big(\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}+\Psi(\varphi(\lambda_n))-\sigma\Big)\\&=\frac{\lambda_n\Phi'(\sigma)}{\Phi^2(\sigma)}(\Psi(\varphi(\lambda_n))-\Psi(\sigma)).\end{aligned}$$

Оскільки $\varphi(\lambda_n)\in(\varkappa_{n-1},\varkappa_n)$ і $\Psi(\varphi(\lambda_n))-\Psi(\sigma)$ є спадною функцією, то

$$\max\Big\{\frac{\ln\mu(\sigma,F_c)}{\Phi(\sigma)}:\sigma\in[\varkappa_{n-1},\varkappa_n]\Big\}=\frac{\ln\mu(\varphi(\lambda_n),F_c)}{\Phi(\varphi(\lambda_n))}=1,$$

а

$$\min\Big\{\frac{\ln\mu(\sigma,F_c)}{\Phi(\sigma)}:\sigma\in[\varkappa_{n-1},\varkappa_n]\Big\}=\min\Big\{\frac{\ln\mu(\varkappa_{n-1},F_c)}{\Phi(\varkappa_{n-1})},\frac{\ln\mu(\varkappa_n,F_c)}{\Phi(\varkappa_n)}\Big\},$$

тобто

$$\varliminf_{\sigma\uparrow A}\frac{\ln\mu(\sigma,F_c)}{\Phi(\sigma)}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\mu(\varkappa_n,F_c)}{\Phi(\varkappa_n)}. \tag{3.6}$$

Оскільки $\Phi(\varkappa_n)=G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)$, а

$$\begin{aligned}\ln\mu(\varkappa_n,F_c)&=-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))\\&\quad+\frac{\lambda_{n+1}\Psi(\varphi(\lambda_{n+1}))-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\lambda_n\\&=\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\Psi(\varphi(x))\Big|_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}},\end{aligned}$$

і

$$\int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{\Phi(\varphi(t)}{t^2}\,dt = \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \Phi(\varphi(x)\,d\Big(-\frac{1}{x}\Big)$$

$$= \Big(-\frac{\Phi(\varphi(x))}{t} + \varphi(x)\Big)\Big|_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} = \Psi(\varphi(x))\Big|_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}},$$

то, з огляду на означення $G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi)$, з (3.6) отримуємо (3.3).

Нарешті, для $\sigma \in (\varkappa_{n-1}, \varkappa_n)$

$$\Big(\frac{\ln\ln\mu(\sigma, F_c)}{\ln\Phi(\sigma)}\Big)' = \frac{\frac{\lambda_n \ln\Phi(\sigma)}{-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))+\sigma\lambda_n} - \frac{\Phi'(\sigma)}{\Phi(\sigma)}\ln(-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n)) + \sigma\lambda_n)}{\ln^2\Phi(\sigma)}$$

$$= \frac{\lambda_n(\Phi(\sigma)/\Phi'(s))\ln\Phi(\sigma) - \ln\mu(\sigma, F_c)\ln\ln\mu(\sigma, F_c)}{(\Phi(\sigma)/P'(s))\ln^2\Phi(\sigma)\ln\mu(\sigma, F_c)} = \frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)},$$

$$P(\varphi(\lambda_n)) = \lambda_n \frac{\Phi(\varphi(\lambda_n))}{\Phi'(\varphi(\lambda_n))}\ln\Phi(\varphi(\lambda_n))$$

$$- \ln\mu(\varphi(\lambda_n), F_c)\ln\ln\mu(\varphi(\lambda_n), F_c)$$

$$= \lambda_n \frac{\Phi(\varphi(\lambda_n))}{\lambda_n}\ln\Phi(\varphi(\lambda_n)) - \Phi(\varphi(\lambda_n))\ln\Phi(\varphi(\lambda_n)) = 0$$

і за умовою (3.4)

$$P'(\sigma) = \lambda_n \frac{\Phi'(\sigma)\ln\Phi(\sigma) + \Phi'(\sigma)\Phi'(\sigma) - \Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)\ln\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)^2}$$

$$- \lambda_n\ln\ln\mu(\sigma, F_s) - \lambda_n$$

$$= -\lambda_n\left\{\ln\ln\mu(\sigma, F_s) + \Big(\frac{\Phi''(\sigma)\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)^2} - 1\Big)\ln\Phi(\sigma)\right\} \le 0,$$

$$\sigma \in [\sigma_0, A).$$

Тому, як вище,

$$\overline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \frac{\ln\ln\mu(\sigma, F_c)}{\ln\Phi(\sigma)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\mu(\varphi(\lambda_n), F_c)}{\Phi(\varphi(\lambda_n))} = 1$$

і

$$\underline{\lim_{\sigma\uparrow A}} \frac{\ln\ln\mu(\sigma, F_c)}{\ln\Phi(\sigma)} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\ln\mu(\varkappa_n, F_c)}{\ln\Phi(\varkappa_n)} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi)}{\ln G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi)}.$$

Лему доведено. □

Доведення теореми 1.1. За наведеним вище твердженням з [3, 4] з умови $\ln\mu(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)$, $\sigma\in[\sigma_0,A)$, випливає, що $\ln|a_n|\le-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$, $n\ge n_0$. Тому для всіх досить близьких до A значень $\sigma<A$ маємо $\ln\mu(\sigma,F)\le\ln\mu(\sigma,F_c)$, а з (3.3) і (3.5) отримуємо (1.5) і (1.7).

Залишилось показати, що з умови (1.6) випливає нерівність (3.4) для всіх досить близьких до A значень $\sigma<A$.

Функція $\ln\mu(\sigma,F_c)$ зростає на $(-\infty,A)$ і, з огляду на (3.2), $\ln\mu(\sigma,F_c)\to+\infty$, $\sigma\uparrow A$. Тому у випадку, коли $-\infty<A<+\infty$, з умови (1.6) випливає нерівність (3.4) для всіх досить близьких до A значень $\sigma<A$. Якщо ж $A=\infty$, то $\ln\mu(\sigma,F_c)/\sigma\to+\infty$ при $\sigma\to+\infty$, тобто $\ln\ln\mu(\sigma,F_c)-\ln\sigma\to+\infty$ при $\sigma\to+\infty$ і знову з (1.6) випливає (3.4) для всіх досить великих значень σ. Теорему доведено. □

Зауважимо, що умова (1.6) в теоремі виникла внаслідок застосованого методу доведення. Вона не є обтяжливою у випадку, коли $A<+\infty$. Так, наприклад, якщо $A=0$, то (1.6) виконується, якщо $\Phi(\sigma)=B(1/|\sigma|)$ і

$$\frac{B(x)B''(x)}{B'(x)^2}+\frac{2B(x)}{xB'(x)}\ge1,\qquad x\ge x_0,$$

а остання умова є, фактично, умовою на гладкість функції B, а не на її швидкість зростання.

Ситуація дещо інша у випадку, коли $A=+\infty$. Тепер умову (1.6) задовольняють, наприклад, функції $\Phi(\sigma)=\sigma^p$ з $p>1$, $\Phi(\sigma)=e^{\varrho\sigma}$, але не задовольняють, взагалі кажучи, функції вигляду $\Phi(\sigma)=\sigma l(\sigma)$, де l — повільно зростаюча функція. Але для таких функцій $\ln\Phi(\sigma)=(1+o(1))\ln\sigma$, $\sigma\to+\infty$, і за умов теореми маємо

$$\varliminf_{\sigma\uparrow0}\frac{\ln\ln\mu(\sigma,F)}{\ln\Phi(\sigma)}=\varlimsup_{\sigma\uparrow0}\frac{\ln\ln\mu(\sigma,F)}{\ln\Phi(\sigma)}=1,$$

яка б не була послідовність (λ_n). До появи умови (1.6) спричиналась умова (3.4). Нам невідомо, для яких функцій $\Phi\in\Omega(+\infty)$ умова (3.4) не виконується.

4. Наслідки

Розглядаючи ту чи іншу шкалу зростання, з доведеної теореми можна отримати ряд результатів для рядів Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності, а отже, для степеневих рядів з довільним радіусом збіжності. Тут ми зупинимось на трьох випадках, які найчастіше зустрічаються у літературі. Найуживанішими характеристиками зростання цілих ($A=+\infty$) рядів Діріхле (1.4) є R-порядок

ϱ_R, нижній R-порядок λ_R і (за умови $0<\varrho_R<+\infty$) R-тип T_R та нижній R-тип t_R, які визначаються наступними формулами

$$\varrho_R=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma},\qquad \lambda_R=\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\ln M(\sigma,F)}{\sigma},\tag{4.1}$$

$$T_R=\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln M(\sigma,F)}{\exp\{\varrho_R\sigma\}},\qquad t_R=\varliminf_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln M(\sigma,F)}{\exp\{\varrho_R\sigma\}}.\tag{4.2}$$

Добре відомо (див., наприклад, [7, с. 26–27]), що у рівностях (4.1) замість $\ln M(\sigma,F)$ можна поставити $\ln\mu(\sigma,F)$ за умови $\ln n=o(\lambda_n\ln\lambda_n)$, $n\to\infty$, а у рівностях (4.2) — за умови $\ln n=o(\lambda_n), n\to\infty$. Тому, якщо $\varrho_R<+\infty$ ($T_R<+\infty$), то $\ln\mu(\sigma,F)\le Te^{\varrho\sigma}$ для $\sigma\ge\sigma_0(\varepsilon)$, де або $\varrho=\varrho_R+\varepsilon$ і $T=1$, або $\varrho=\varrho_R$ і $T=T_R+\varepsilon$. Відомо [7], що для функції $\Phi\in\Omega(+\infty)$ такої, що $\Phi(\sigma)=Te^{\varrho\sigma}$, $\sigma\ge\sigma_0$, для $n\ge n_0$ правильні рівності

$$G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=\frac{1}{\varrho}\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\ln\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n},$$
$$G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1},\Phi)=\frac{1}{e\varrho}\exp\left\{\frac{\lambda_{n+1}\ln\lambda_{n+1}-\lambda_n\ln\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\right\}.$$

Тому за теоремою, завдяки довільності ε, маємо

$$t_R\le eT_R\varliminf_{n\to\infty}\frac{\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\ln\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}}{\exp\left\{\frac{\lambda_{n+1}\ln\lambda_{n+1}-\lambda_n\ln\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\right\}}\tag{4.3}$$

і

$$\lambda_R\le\varrho_R\varliminf_{n\to\infty}\frac{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\ln\left(\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\ln\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)}{\lambda_{n+1}\ln\lambda_{n+1}-\lambda_n\ln\lambda_n}.\tag{4.4}$$

Якщо тепер

$$\beta=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\lambda_n}{\ln\lambda_{n+1}}<1,$$

то $\ln\lambda_{n_k}<\beta^*\ln\lambda_{n_k+1}$ для $\beta<\beta^*<1$ і деякої підпослідовності (λ_{n_k}) послідовності (λ_n), тобто $\lambda_{n_k}=o(\lambda_{n_k+1})$, $k\to\infty$. Тому з (4.4) дістаємо

$$\lambda_R\le\varrho_R\varliminf_{k\to\infty}\frac{(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k})\ln\left(\frac{\lambda_{n_k+1}\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}}\ln\frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}}\right)}{\lambda_{n_k+1}\ln\lambda_{n_k+1}-\lambda_n\ln\lambda_{n_k}}$$
$$\le\varrho_R\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln\lambda_{n_k}+o(1)+\ln\ln\lambda_{n_k+1}}{\ln\lambda_{n_k+1}}\le\varrho_R\beta^*,$$

тобто, завдяки довільності β^*, отримуємо нерівність $\lambda_R \le \varrho_R\beta$, яка є очевидною, якщо $\beta = 1$. Отже, доведено наступне узагальнення теореми Уіттекера.

Наслідок 4.1. *Якщо показники цілого ряду Діріхле* (1.4) *скінченного R-порядку ϱ_R і нижнього R-порядку λ_R задовольняють умову $\ln n = o(\lambda_n \ln\lambda_n), n\to\infty$, то $\lambda_R \le \varrho_R\beta$.*

Припустимо тепер, що

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = \gamma.$$

Якщо $\gamma\in(0,1)$, то $\lambda_{n_k} \sim \gamma\lambda_{n_k+1}, k\to\infty$, для деякої підпослідовності (λ_{n_k}) послідовності (λ_n), і з (4.3) отримуємо

$$\begin{aligned} t_R &\le eT_R \varliminf_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_k}\lambda_{n_k+1}\ln(\lambda_{n_k+1}/\lambda_{n_k})}{(\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k})\exp\left\{\frac{\lambda_{n_k+1}\ln\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n-k}\ln\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k+1}-\lambda_{n_k}}\right\}} \\ &= eT_R \varliminf_{k\to\infty} \frac{\gamma\ln(1/\gamma)\lambda_{n_k+1}}{(1-\gamma)\exp\{\ln\lambda_{n_k+1}-\gamma\ln\gamma/(1-\gamma)\}} \\ &= T_R\frac{\gamma}{1-\gamma}\ln\frac{1}{\gamma}\exp\Big\{1+\frac{\gamma\ln\gamma}{1-\gamma}\Big\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Оскільки

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}\ln\frac{1}{\gamma}\exp\Big\{1+\frac{\gamma\ln\gamma}{1-\gamma}\Big\}\to 1, \qquad \gamma\to 1,$$

то нерівність (4.5) стає очевидною для $\gamma = 1$. Нарешті, якщо $\gamma = 0$, то $\lambda_{n_k} = o(\lambda_{n_k+1}), k\to\infty$, для деякої підпослідовності (λ_{n_k}) послідовності (λ_n) і з (4.3) отримуємо

$$t_R \le eT_R \varliminf_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_k}(\ln\lambda_{n_k+1}-\ln\lambda_{n_k})}{\exp\{\ln\lambda_{n_k+1}+o(1)\}} = eT_R \varliminf_{k\to\infty}\frac{\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k+1}}\ln\frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}} = 0,$$

тобто і в цьому випадку нерівність (4.5) правильна. Отже, доведено наступний наслідок.

Наслідок 4.2. *Якщо показники цілого ряду Діріхле* (1.4) *скінченного R-типу T_R і нижнього R-типу t_R задовольняють умову $\ln n = o(\lambda_n), n\to\infty$, то*

$$t_R \le T_R\frac{\gamma}{1-\gamma}\ln\frac{1}{\gamma}\exp\Big\{1+\frac{\gamma\ln\gamma}{1-\gamma}\Big\}, \qquad \gamma = \varliminf_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}.$$

Аналогами порядку і нижнього порядку аналітичної в одиничному крузі функції для рядів Діріхле (1.4) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності є величини

$$\varrho_0 = \overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} \frac{\ln\ln M(\sigma, F)}{\ln(1/|\sigma|)}, \qquad \lambda_0 = \underline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} \frac{\ln\ln M(\sigma, F)}{\ln(1/|\sigma|)}. \tag{4.6}$$

За умови $0 < \varrho_0 < +\infty$ тип T_0 і нижній тип t_0 визначаються формулами

$$T_0 = \overline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} |\sigma|^{\varrho_0} \ln M(\sigma, F), \qquad t_0 = \underline{\lim_{\sigma\uparrow 0}} |\sigma|^{\varrho_0} \ln M(\sigma, F). \tag{4.7}$$

Відомо [8], що у рівностях (4.6) замість $\ln M(\sigma, F)$ можна поставити $\ln \mu(\sigma, F)$ за умови $\ln\ln n = o(\ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, а у рівностях (4.7) — за умови $\ln n = o(\lambda_n^{\varrho_0/(\varrho_0+1)})$, $n \to \infty$. Тому, якщо $\varrho_0 < +\infty$ ($T_0 < +\infty$), то $\ln \mu(\sigma, F) \le T/|\sigma|^{\varrho}$ для $\sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), 0)$, де або $\varrho = \varrho_0 + \varepsilon$ і $T = 1$, або $\varrho = \varrho_0$ і $T = T_0 + \varepsilon$. Відомо [6], що для функції $\Phi \in \Omega(0)$ такої, що $\Phi(\sigma) = T/|\sigma|^{\varrho}$, $\sigma \in [\sigma_0, 0)$, для $n \ge n_0$ правильні рівності

$$\begin{aligned} &G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi) \\ &\qquad = (\varrho+1) T^{1/(\varrho+1)} \varrho^{-\varrho/(\varrho+1)} \frac{\lambda_n \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \left(\frac{1}{\lambda_n^{1/(\varrho+1)}} - \frac{1}{\lambda_{n+1}^{1/(\varrho+1)}} \right), \end{aligned}$$

$$G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}, \Phi) = (\varrho+1)^{-\varrho} T^{1/(\varrho+1)} \varrho^{\varrho^2/(\varrho+1)} \left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}^{\varrho/(\varrho+1)} - \lambda_n^{\varrho/(\varrho+1)}} \right)^{\varrho}.$$

Тому за теоремою, завдяки довільності ε, маємо

$$\lambda_0 \le \varrho_0 \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left(\frac{\lambda_n \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \left(\frac{1}{\lambda_n^{1/(\varrho+1)}} - \frac{1}{\lambda_{n+1}^{1/(\varrho+1)}} \right) \right)}{\varrho \ln \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+1}^{\varrho/(\varrho+1)} - \lambda_n^{\varrho/(\varrho+1)}}} \tag{4.8}$$

і

$$\begin{aligned} t_0 \le T_0 \frac{(\varrho_0+1)^{\varrho_0+1}}{\varrho_0^{\varrho_0}} &\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n \lambda_{n+1}}{(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{\varrho_0+1}} \\ &\times \left(\frac{1}{\lambda_n^{1/(\varrho_0+1)}} - \frac{1}{\lambda_{n+1}^{1/(\varrho_0+1)}} \right) \left(\lambda_{n+1}^{\varrho_0/(\varrho_0+1)} - \lambda_n^{\varrho_0/(\varrho_0+1)} \right)^{\varrho_0}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

З нерівності (4.8), як у доведенні наслідку 4.1, легко отримати правильність наступного наслідку.

Наслідок 4.3. *Якщо показники абсолютно збіжного у півплощині* $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ *ряду Діріхле* (1.4) *скінченного порядку* ϱ_0 *і нижнього порядку* λ_0 *задовольняють умову* $\ln\ln n = o(\ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, *то* $\lambda_0 \le \varrho_0\beta$.

Якщо в ряді (1.1) з одиничним радіусом збіжності зробимо заміну $z = e^s$, то отримаємо ряд Діріхле (1.4) з нульовою абсцисою абсолютної збіжності, причому $\sigma = \ln r$, а $\ln M_f(r) = \ln M(\sigma, F)$. Тому безпосередньо з наслідку 4.3 випливає наслідок, який ще раз спростовує теорему Л. Сонс.

Наслідок 4.4. *Якщо аналітична в одиничному крузі функція* (1.1) *має скінченний порядок* ϱ_0 *і нижній порядок* λ_0, *то* $\lambda_0 \le \varrho_0\beta$.

З нерівності (4.9), як у доведенні наслідку 4.2, легко отримати правильність наступного наслідку.

Наслідок 4.5. *Якщо показники абсолютно збіжного у півплощині* $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ *ряду Діріхле* (1.4) *скінченного типу* T_0 *і нижнього типу* t_0 *задовольняють умову* $\ln n = o(\lambda_n^{\varrho_0/(1+\varrho_0)})$, $n \to \infty$, *то*

$$t_0 \le T_0 \frac{(\varrho_0+1)^{\varrho_0+1}}{\varrho_0^{\varrho_0}} \frac{\gamma^{\varrho_0/(\varrho_0+1)}}{(1-\gamma)^{\varrho_0+1}} (1-\gamma^{1/(\varrho_0+1)})(1-\gamma^{\varrho_0/(\varrho_0+1)})^{\varrho_0},$$
$$\gamma = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}.$$

Література

[1] J. M. Whittaker, *The lower order of integral functions* // J. London Math. Soc. **8** (1933), 20–27.

[2] L. R. Sons, *Regularity of growth and gaps* // J. Math. Anal. Appl. **24** (1968), 296–306.

[3] М. Н. Шеремета, С. И. Федыняк, *О производной ряда Дирихле* // Сиб. матем. журн. **39** (1998), N 1, 206–223.

[4] М. М. Шеремета, О. М. Сумик, *Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій* // Матем. студії. **11** (1999), N 1, 41–47.

[5] М. В. Заболоцький, М. М. Шеремета, *Узагальнення теореми Ліндельофа* // Укр. матем. журн. **50** (1998), N 1, 1177–1192.

[6] М. М. Шеремета, *Цілі ряди Діріхле.* К.: ІСДО, 1993, 168 с.

[7] О. М. Сумык, М. Н. Шеремета, *Оценки максимального члена ряда Дирихле снизу* // Изв. вузов. Матем. (2001), N 4, 53–57.

[8] В. С. Бойчук, *О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле.* В кн.: Математический сборник. К.: Наукова думка, 1976, 238–240.

Відомості про авторів

Петро Васильович Філевич, Мирослав Миколайович Шеремета	Львівський національний університет вул. Університетська 1 79000, Львів Україна *E-Mail:* `filevych@mail.ru`, `m_m_sheremeta@list.ru`