

А. Б. Ситников**РЕКОМЕНДУЕМАЯ МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВЛАГОПЕРЕНОСА В НЕНАСЫЩЕННО-НАСЫЩЕННЫХ ГРУНТАХ**

На основі ітераційного методу запропонована методика прогнозних рішень для нелінійного за параметрами профільного двовимірного вологопереносу у ненасичено-насичених водою ґрунтах зі складними різного роду граничними умовами на денній поверхні, згідно з якою розроблені програми її реалізації на персональних комп'ютерах. Ефективність їх доведена шляхом порівняння з раніше виконаними аналоговими обчисленнями за неявними скінченнорізницевиими схемами та аналітичними рішеннями. Особливу увагу приділено можливості оцінки похибок різного походження застосованих методів.

On a basis of iteration method it has been proposed the technique for predicted solutions for non-linear profiled two-dimensional moisture transfer along the parameters in soils unsaturated-saturated by water under the complicated different conditions at the day surface according to which the programs of its implementation on the PCs are developed. Their efficiency is proven by the comparison with the analog calculations performed through the implicit finite-difference schemes and the known analytical solutions. The special attention focuses on the assessment of the errors of the different sources in the used methods.

Современная хозяйственная и природоохранная деятельность сосредоточена главным образом в приповерхностном слое земли, в так называемой зоне аэрации, обычно в пределах суши, сложенной ненасыщенно-насыщенными подземной влагой грунтами. С этой зоной связаны многие производственные и научные интересы, требующие достоверных количественных оценок инфильтрационных потерь при орошении, питания грунтовых вод, испарения и отбора влаги растениями, характера насыщения грунтов водой, влагозапасов, высоты высачивания на склонах земляных выработок и роли влаги в транспортировке и преобразовании других веществ и т.п. Несомненно, наиболее эффективными особенно для прогнозирования являются методы математического моделирования влагопереноса в грунтах этой зоны, в свою очередь определяющего природно-техногенными условиями со стороны дневной поверхности [10].

Несмотря на многочисленные разработки научных коллективов в нашей стране и за рубежом, рассматриваемый влагоперенос остается недостаточно изученным [3–8, 10]. Слабая изученность объясняется разными причинами, из которых основной является сложность массопереноса подземной влаги, заключающаяся в резкой нелинейности законов движения и пространственно-вре-

менной изменчивости состояния подземной воды. Первые успешные разработки появились в 70-х годах прошлого столетия после того, когда в основу динамики влаги были взяты давления в виде универсальных действующих сил, проведены тестовые натурные режимные наблюдения и получены опытным путем так называемые обобщенные параметры (объемные влагосодержания и коэффициенты переноса), зависящие от избыточных поровых давлений и характеризующие совместно нелинейный влагоперенос в ненасыщенных и линейную фильтрацию в насыщенных водой грунтах. Именно использование таких законов во всеобщих уравнениях сохранения массы веществ и количества движения дало возможность обосновать исходные физико-математические модели (точнее, дифференциальные уравнения влагопереноса), реализация (решение) которых при соответствующих граничных и начальных условиях позволила количественно оценить действующие силы и расходы влаги. Кстати, наши исследования [9] были одними из пионерских в этом отношении. В частности, в плане математического моделирования мы с А. С. Скальским впервые решили прогнозную двумерную профильную задачу с нелинейными параметрами с целью оценки высоты высачивания на склоне грунтовой дамбы, применив разработанное аналоговое вычислительное устройство (АВНУ) с блоками нелинейности,

© А. Б. Ситников, 2009

а также плоскорадиальную задачу [2, 9, 10]. Обратим внимание, что решение одномерных задач не вызывало особых вычислительных затруднений, тем более основанных на градиентах влажностей. Хотя оставались открытыми вопросы методического характера, касающиеся погрешностей прогнозных решений. Тем более, что методика, применяемая другими исследователями, предусматривала описание нелинейных параметров удобными дифференцируемыми функциями, в свою очередь определяющими функциональное преобразование исходных математических уравнений, а также граничных и начальных условий [4–7].

В настоящей статье мы предлагаем перспективную с более широкими возможностями методику прогнозного математического моделирования на основе цифровой компьютерной вычислительной техники, к тому же лишенную многих недостатков предыдущих исследований. Изложим их возможности, подтвердив эффективность, на примере ранее решенной нами классической задачи по прогнозной оценке высоты высачивания воды на вертикальной стенке квадратной дамбы грунтов при профильном двухмерном влагопереносе, имеющей также стационарное решение П. Я. Полубариновой-Кочиной в работе [8] при допущении о наличии лишь фильтрации воды со стороны верхнего бьефа, т.е. при отсутствии влагопереноса в недонасыщенных грунтах выше уровня грунтовых подземных вод.

Прежде чем реализовать показательную конкретную задачу, представим **общие положения**. По сути, требуется реализовать следующие *исходное уравнение и равенства*:

$$\frac{\partial W_p(p_{bc})}{\partial t} = \gamma_p \frac{\partial W_p(p_{bc})}{\partial p_{bc}} \cdot \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \left[K_p(p_{bc}) \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} \right]}{\partial z} + \frac{\partial \left[K_p(p_{bc}) \frac{\partial \Phi_p}{\partial x} \right]}{\partial x} + J(z, x, t),$$

$$\vartheta_p = -K(p_{bc}) \text{grad} \Phi_p, \quad \gamma_p = \rho_p g = \text{const},$$

$$\Phi_p(z, x, t) = \frac{p_{bc}(z, x, t)}{\gamma_p} + z;$$

$$\text{при } \frac{\partial \left[K_p(p_{bc}) \frac{\partial \Phi_p}{\partial y} \right]}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq t \leq \infty,$$

$$-\ell \leq z \leq 0, \quad 0 \leq x \leq a \cdot \ell,$$

где Φ_p – так называемая напорная специальная гидрофизическая функция, м; p_{bc} – так называемое всасывающее поровое избыточное давление влаги (подземной воды), которое при влагопереносе меньше, а при фильтрации – больше нуля, кПа; t, z, x, y – соответственно временная и пространственные прямоугольные координаты по правилу левой руки (вертикальная – вверх), м; $W_p(p_{bc}), K_p(p_{bc})$ – параметры влагопереноса – соответственно функциональные зависимости объемного влагосодержания и коэффициента влагопереноса, нелинейные при $p_{bc} \leq 0$, доли, м/сут; ϑ_p – конвективная скорость влаги, м/сут; ρ_p – плотность влаги (воды), кг/м³; g – ускорение силы тяжести, м/с²; γ_p – объемный (удельный) вес влаги, кг/м²·с²; $J(z, x, t)$ – интенсивность внутригрунтового влагообмена, в частности отбора корнями растений, 1/сут; p – индекс в правом нижнем углу указывает на поровую влагу, точнее, водный жидкий раствор.

Решение этого исходного уравнения может осуществляться при *начальных условиях*, определяемых функцией $\Phi_p(z, x, 0)$ при $t = 0$, а также при специфических *граничных условиях*.

Так, на горизонтальной дневной поверхности в виде Φ_p (I рода), расхода (II рода), функции Φ_p и расхода (III рода), которые определяются из следующего уравнения, описывающего в общем случае наличие поверхностного водоема:

$$\frac{\partial \Phi_p(0, x, t)}{\partial t} - \vartheta_p(0, x, t) -$$

$$- \sum_j q_j(0, x, t) + q_{исп}(0, x, t) = 0,$$

где q – скорость поступления жидкой воды на поверхность земли за счет осадков, поливов, поверхностного стока и иных водопоступлений, м/сут; $q_{исп}$ – физическое испарение или конденсация влаги, м/сут; $\Phi(0, x, t)$ – гидрофизическая функция на поверхности земли (координата $z = 0$), м.

Особо выделим:

$$q_{исп}(0, x, t) = -\frac{\beta}{\gamma_p} [p_{возд} - (p_{bc} + p_{хем})],$$

$$p_{возд}(t) = \rho_{ж} \frac{RT(t)}{M_{H_2O}} \ln[\varphi(t)],$$

где β – некоторый эмпирический коэффициент, учитывающий состояние воды, м/сут; $p_{\text{возд}}$ – так называемое давление, эквивалентное сосущей силе влаги в атмосферном воздухе, кПа; R – газовая постоянная, Дж/моль·К; T – температура, К; $M_{\text{H}_2\text{O}}$ – молярная масса воды, 0,018 кг/моль; φ – относительная влажность воздуха, доли; $\rho_{\text{ж}}$ – плотность воды в подземном водном растворе, кг/м³; $p_{\text{хем}}$ – так называемое хемоосмотическое давление, эквивалентное воздействию на воду растворенных веществ, кПа.

Указанные уравнения предложены нами совместно с М. М. Зильбербрандтом, который также провел опытные эксперименты по определению эмпирического коэффициента β , используя специальное устройство [1]. В ряде случаев этот коэффициент можно вычислить по результатам экспериментов в работе [3], основанных на законе Дальтона. Чтобы не усложнять текста громоздкой формулой, предлагаем определить $p_{\text{хем}}$ по закону, в частности, Вант-Гоффа или иным путем [9].

В то же время в пределах боковой поверхности, где непосредственно происходит высачивание воды в насыщенных грунтах, должно задаваться нулевое давление, т. е. функция $\Phi_p = z$. Выше высоты высачивания принимается расход вследствие испарения (конденсации) на поверхности грунта $q_{\text{исп}}$, или равный нулю в случае непроницаемой

границы, когда $\frac{\partial \Phi_p}{\partial x} = 0$.

Теперь кратко охарактеризуем некоторые особенности рекомендуемого учета исходных нелинейных параметров, считая, что имеем ожидаемый диапазон изменений всасывающих давлений, а также надежные опытные определения этих функциональных зависимостей от всасывающих давлений,

точнее, от $\frac{p_{\text{вс}}}{\gamma_p}$, а также достоверные анали-

тические формулы их определений, в том числе наши, в частности такие (отражающие физическую суть):

$$K_p(p_{\text{вс}}) = \frac{\beta_p^3 \cdot \rho_p \cdot g \cdot W_p(p_{\text{вс}}) \cdot h_{\text{эф}}^2}{2\mu},$$

$$h_{\text{эф}} = \frac{W_p(p_{\text{вс}})}{3 W_{\text{ТВ}} \sum_j^N \frac{\theta_j}{(r_{\text{ТВ}})_j}} - h_{\text{адс}}, \quad h_{\text{адс}} = 10^{-9} \div 10^{-7},$$

$$\beta_p = 0,2 \div 0,7,$$

$$W_p [(p_{\text{вс}})_j]_{\text{max}}^{\text{min}} = W_{\text{пор}} - \left[1 - \sum_0^N (G_{\text{ТВ}})_j \right],$$

$$(p_{\text{вс}})_j = -\alpha \frac{0,15}{[(r_{\text{ТВ}})_j]_{\text{max}}^{\text{min}}}, \quad \alpha = 0,5 \div 10(5),$$

$$W_{\text{пор}} = \sum_{j=0}^N \frac{(\delta V_{\text{пор}})_j}{\delta V_{\text{гр}}} = \frac{\delta V_{\text{пор}}}{\delta V_{\text{гр}}} = 1 - \frac{\rho_{\text{гр}}}{\rho_{\text{ТВ}}} + \frac{\rho_p}{\rho_{\text{ТВ}}} W_p,$$

где $(G_{\text{ТВ}})_j$ – объемное доленое содержание j -х твердых частиц; $\rho_p, \rho_{\text{гр}}, \rho_{\text{ТВ}}$ – соответственно плотность влаги, грунта, твердой фазы грунта, кг/м³; $\delta V_{\text{пор}}, \delta V_{\text{гр}}$ – компетентные объемы пор, грунта, м³; $W_p, W_{\text{пор}}, W_{\text{ТВ}}$ – соответственно объемное содержание влаги, пор и твердой фазы, доли; θ – относительное массовое содержание фракций твердых частиц, доли; $(r_{\text{ТВ}})_j$ – радиус твердых шарообразных частиц j -й фракции, м; μ – динамическая вязкость влаги, Па; $h_{\text{адс}}$ – толщина адсорбционного слоя влаги, м.

Обычно, особенно для обобщенного коэффициента влагопереноса, формулы определения (в том числе их математическая интерпретация) нелинейных параметров чрезвычайно сложны и малопригодны для вычислительных операций. Поэтому нами рекомендуется использовать дискретные их значения, предусмотрев в диапазоне ожидаемых значений всасывающих давлений разбивку известных кривых на $N \geq 10$ ($j = 1, 2, 3, \dots, N_j$) равномерных или неравномерных частей, в пределах каждой из которых допустима с требуемой точностью линейная интерполяция значений параметров. Кстати, если исходные кривые были получены уже дискретно, то рекомендуем получать непрерывные значения в требуемом диапазоне всасывающих давлений либо вручную (например, с помощью лекала), либо с известной точностью непрерывными интерполирующими математическими зависимостями.

Для решения указанного выше двухмерного уравнения (значит, и одномерного)

предлагается использовать систему ($N_{\text{расч}} = N_z \times N_i$) неявных их **конечноразностных уравнений**, устойчивых и сходимых, которая была нами ранее реализована на АВМ типа АВНУ [9]:

$$\frac{(W_{z,i}^{\tau+1} - W_{z,i}^{\tau}) \cdot \Delta x \cdot \Delta z}{t^{\tau+1} - t^{\tau}} = \gamma_p \left(\frac{\partial W_p}{\partial p_{\text{вс}}} \right)_{z,i}^{\tau+1} \times$$

$$\times \frac{(\Phi_{z,i}^{\tau+1} - \Phi_{z,i}^{\tau}) \cdot \Delta x \cdot \Delta z}{t^{\tau+1} - t^{\tau}} = K_{z+1/2,i}^{\tau+1} \frac{(\Phi_{z+1,i}^{\tau+1} - \Phi_{z,i}^{\tau+1}) \cdot \Delta x}{\Delta z} -$$

$$- K_{z-1/2,i}^{\tau+1} \frac{(\Phi_{z,i}^{\tau+1} - \Phi_{z-1,i}^{\tau+1}) \cdot \Delta x}{\Delta z} +$$

$$+ K_{z+1/2,i}^{\tau+1} \frac{(\Phi_{z,i+1}^{\tau+1} - \Phi_{z,i}^{\tau+1}) \cdot \Delta z}{\Delta x} -$$

$$- K_{z-1/2,i}^{\tau+1} \frac{(\Phi_{z,i}^{\tau+1} - \Phi_{z,i-1}^{\tau+1}) \cdot \Delta z}{\Delta x} + J_{z,i} \cdot \Delta x \cdot \Delta z,$$

$$t^{\tau+1} - t^{\tau} = \Delta t, \quad x_{i+1} - x_i = \Delta x,$$

$$z_{i+1} - z_i = \Delta z, \quad \gamma_p = \text{const},$$

$$\gamma_p \left(\frac{\partial W_p}{\partial p_{\text{вс}}} \right)_{z,i}^{\tau+1} \approx D_{z,i}^{\tau+1}(p_{\text{вс}}) = \gamma_p \frac{(W_j^{\tau+1} - W_{j+1}^{\tau+1})}{(p_{\text{вс}})_j^{\tau+1} - (p_{\text{вс}})_{j+1}^{\tau}},$$

где $\tau + 1, \tau, z, i$ – дискретные временные и пространственные координаты; $z \pm 1/2, i \pm 1/2$ – индексы, указывающие на значение величин посередине между расчетными точками; $N_{\text{расч}}$ – количество расчетных точек; $j+1, j$ – индексы, указывающие на дискретность исходных параметров влагопереноса.

Судя по нашему опыту, удобней и рациональней при исследовании погрешностей использовать одинаковые пространственные шаги ($\Delta z = \Delta x = \text{const}$), где $i \pm 1, i, z \pm 1, z$ – дискретные пространственные координаты расчетных точек. При этом пространственные шаги должны быть увязаны с так называемыми компетентными элементарными объемами исследуемой среды и быть больше $0,1 \text{ м}$, так как $\delta V \approx \text{дм}^3$. Также целесообразно увязать границу с соответствующими граничными условиями на половинном

расстоянии $\left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta z}{2} \right)$ от крайних расчетных

точек. Исключить источник в правой части приведенного конечноразностного уравнения можно путем несложного его преобразования, заменив в левых частях соответственно $W_{z,i}^{\tau}$ и $\Phi_{z,i}^{\tau}$ на $\bar{W}_{z,i} = W_{z,i}^{\tau} + \Delta t \cdot J_{z,i}$ и $\bar{\Phi}_{z,i} = \Phi_{z,i}^{\tau} + \Delta t \cdot J_{z,i}$.

Из предыдущего конечноразностного уравнения следует:

$$\text{если } C^{\tau+1} = K_{z+1/2,i}^{\tau+1} \cdot \Phi_{z+1,i}^{\tau+1} + K_{z-1/2,i}^{\tau+1} \cdot \Phi_{z-1,i}^{\tau+1} + K_{z,i+1/2}^{\tau+1} \cdot \Phi_{z,i+1}^{\tau+1} + K_{z,i-1/2}^{\tau+1} \cdot \Phi_{z,i-1}^{\tau+1},$$

$$E^{\tau+1} = K_{z+1/2,i}^{\tau+1} + K_{z-1/2,i}^{\tau+1} + K_{z,i+1/2}^{\tau+1} + K_{z,i-1/2}^{\tau+1},$$

$$H^{\tau+1} = \frac{D_{z,i}^{\tau+1}(p_{\text{вс}}) \cdot \Phi^{\tau} \cdot \Delta z^2}{\Delta t}, \quad L^{\tau+1} = \frac{W_{z,i}^{\tau+1} \cdot \Delta z^2}{\Delta t},$$

$$M^{\tau+1} = \frac{D_{z,i}^{\tau+1}(p_{\text{вс}}) \cdot \Delta z^2}{\Delta t}, \quad A = \frac{W_{z,i}^{\tau} \cdot \Delta z^2}{\Delta t} = \text{const},$$

$$B = J_{z,i} \cdot \Delta z^2 = \text{const},$$

$$\text{то } \Phi_{z,i}^{\tau+1} = \frac{C^{\tau+1} - L^{\tau+1} + A + B}{E^{\tau+1}} \quad \text{или}$$

$$\Phi_{z,i}^{\tau+1} = \frac{C^{\tau+1} + H^{\tau+1} + B}{E^{\tau+1} + M^{\tau+1}}.$$

Обратим внимание, что первое из предыдущих равенств при определенных условиях может быть отрицательным, второе – всегда положительное или равное нулю. Существует некоторое отличие указанных типовых расчетных схем для приграничных расчетных точек, связанное с половинным

пространственным шагом $\left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta z}{2} \right)$.

Рекомендуемые вычислительные операции на ЦВМ, в отличие от аналоговой АВНУ, в прямом виде не реализуют неявную систему ранее указанных нелинейных конечноразностных уравнений, равных количеству расчетных точек, с автоматическим изменением значений исходных параметров нелинейными блоками АВНУ [2, 9]. Поэтому мы рекомендуем воспользоваться итерационными приемами (последовательными приближениями неистинных значений), например, классической прогонной явной вычислительной схемой, взяв за основу следующие равенства при $n = 1, 2, 3, \dots, N$:

$$1\text{-го вида } \Phi_{z,i}^n = \frac{C^{n-1} - L^{n-1} + A + B}{E^{n-1}}$$

$$\text{и } 2\text{-го вида } \Phi_{z,i}^n = \frac{C^{n-1} + H^{n-1} + B}{E^{n-1} + M^{n-1}},$$

заканчивая итерации, когда

$$\Phi_{z,i}^{\tau+1} \approx \Phi_{z,i}^N, \text{ а } \frac{\Phi_{z,i}^N - \Phi_{z,i}^{N-1}}{\Phi_{z,i}^N} \leq \sigma,$$

$$\sigma = \left| \Phi_{z,i}^N - \Phi_{z,i}^{N-1} \right|,$$

где σ – заданная погрешность решений. Итеративную прогонку обычно осуществляем построчно слева направо. Полученные условно конечноитерационные "истинные" значения могут становиться начальными для последующих итерационных циклов решения на иные времена.

Рассматривая цикл итераций (n), состоящий из отдельных действий, равных количеству расчетных точек, подчеркнем, что в конце каждого цикла мы должны получить в каждой расчетной точке значения $\Phi_{z,i}^n$, затем определить дискретное поле значений:

$$\left(\frac{p_{bc}}{\gamma_p} \right)_{z,i}^n, \left(\frac{p_{bc}}{\gamma_p} \right)_{z \pm 1/2,i}^n = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{p_{bc}}{\gamma_p} \right)_{z \pm 1,i}^n + \left(\frac{p_{bc}}{\gamma_p} \right)_{z,i}^n \right],$$

$$\left(\frac{p_{bc}}{\gamma_p} \right)_{z,i \pm 1/2}^n,$$

по которым согласно известным табличным значениям определить $W_{z,i}^n, K_{z \pm 1/2,i}^n, K_{z,i \pm 1/2}^n, D_{z,i}^n$.

Напомним, что при их нахождении используется линейная интерполяция между точечными табличными значениями.

Далее подобным образом надо осуществлять последующие итерационные циклы до тех пор, пока не получим "истинные" значения (с точностью σ) требуемых функций и параметров при постоянно заданных $\Phi_{z,i}^{\tau}, \Delta t, W_{z,i}^{\tau}, \Delta x, \Delta z$ в соответствии с особенностями граничных условий. В частности, при $q = 0$ на границе объекта граничное значение Φ_p будет равно такому же Φ_p в соседней расчетной точке, в то же время определяемое

граничное $\frac{p_{bc}}{\gamma_p} \geq 0$ указывает на равенство

$\Phi_p = z$, а граничное $\frac{p_{bc}}{\gamma_p} < 0$ – на непроницае-

мый контур при отсутствии испарения (конденсации).

Необходимо выделить возможные ошибки методического характера. Без сомнения, наиболее важной является погрешность за счет принятой дискретности времени, пространственных шагов, а также точности исходных параметров и граничных условий. Затем – ошибки за счет округления чисел и деления на численные значения, близкие нулю. Обратим внимание, что для проведенных нами аналоговых вычислений последние не характерны и, вероятно, срабатывают лишь приборные ошибки аналоговых устройств. Количество итераций также существенным образом может обусловить погрешность решений, особенно если неправильно определены для сравнения расчетные точки или она не завершена, что характерно для минимальных прогнозных времен. Очевидно, начальные условия могут также оказать определенное влияние на точность решений, особенно при их неоднородности у дневной поверхности. Наконец, надо учитывать, что предложенные явные расчетные схемы могут оказаться неустойчивыми и несходимыми, если $\Delta t \leq \frac{(W_{z,i}^{\tau+1} - W_{z,i}^{\tau}) \Delta z}{K(O)}$,

где $K(O)$ при $p_{bc} \geq 0$.

Показательную задачу представим таким образом. Пусть имеем профильный двумерный влагоперенос через квадратную дамбу грунтов высотой 7 м и шириной 7 м, подчиняющийся ранее указанному уравнению. Дневная поверхность и подошва дамбы водонепроницаемы. На правой границе дамбы (верхний бьеф) задается постоянное граничное условие I рода, а на левой мгновенно осушаемой границе при начальных условиях полного насыщения грунтов в зоне высачивания предусматривается граничное условие I рода, равное координате (т. е.

$\frac{p_{bc}}{\gamma_p} = 0$), выше зоны высачивания – граничное

условие, соответствующее непроницаемому

контур $q = -K_p(p_{bc}) \cdot \frac{\partial \Phi_p}{\partial x} = 0$. Предполагаем

также решение задачи, когда переосушенные грунты с начальным нулевым значением функции Φ_p (в том числе на левой границе дамбы) при тех же условиях на правой границе в случае появления зоны высачивания. Исходные параметры влагопереноса взяты такие же, как при ранее выполненном вычислении на аналоговой технике (табл. 1) [9].

Если координату z совместить с вертикальной левой границей дамбы, а горизонтальную – с ее подошвой, то сказанное выше можно отобразить в следующих математических символах. Так, при $0 \leq x \leq 7,0$ м; $0 \leq z \leq 7,0$ м; $0 \leq t \leq \infty$; $K_p(p_{bc}) = \text{const}$ и $W_p(p_{bc}) = \text{const}$ необходимо найти: $\Phi_p(z, x, t)$ в расчетных точках с учетом разных расчетных сеток (7x7), (14x14), (28x28), т. е. при разных шагах 1,0; 0,5; 0,25 м и характерных временах с целью сравнения с аналоговыми решениями и обоснованиями точности. При этом дополнительно требуется оценить втекающие и вытекающие из дамбы расходы воды, в том числе при стационарном движении ($t = \infty$), а также высоты высачивания при соответствующих уровнях грунтовых вод

(изолинии $\frac{p_{bc}}{\gamma_p} = 0$).

Граничные условия должны быть такими:

$$\Phi_p(z, 7, t) = 7,0 \text{ м} = \text{const}, \quad \frac{\partial \Phi_p(7, x, t)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_p(0, x, t)}{\partial z} = 0, \quad \Phi_p(z, 0, t) = z \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi_p(z, 0, t)}{\partial x} \leq 0.$$

Подчеркнем, что два последних граничных условия находятся итеративным путем и расстояние от границ к соседним расчетным точкам равно половине принятого

расчетного шага: $\frac{\Delta x}{2} = \frac{\Delta z}{2}$.

Начальные условия в первой постанов-

ке, в случае осушения дамбы, принимаются равными $\Phi_p(z, x, 0) = 7,0 \text{ м} = \text{const}$, во второй – $\Phi_p(z, x, 0) = 0 = \text{const}$.

Расчет расходов на границах производится по формулам:

$$q_{z,0}^{\tau+1} = -K_{z,1/2}^{\tau+1} \cdot \frac{(\Phi_{z,1}^{\tau+1} - Z_z) \Delta z}{\Delta x / 2},$$

$$q_{(z,7)} = -K_{z,6\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\Phi_{z,7}^{\tau+1} - \Phi_{z,6}^{\tau+1}) \Delta z}{\Delta x / 2}.$$

С целью оценки требуемой точности прогнозных решений рекомендуем воспользоваться разным характером округлений вычислительных операций, т. е. решение прогнозных задач проводить с разными погрешностями $\sigma = 0,1; 0,01; 0,001; 0,00001$ м.

Обязательно прогнозные решения должны выполняться согласно надежно выбранному нескольким контрольным расчетным точкам с неперменным определением количества законченных итерационных циклов (n), равных $n(N_z \times N_x)$ итерационных действий, где $N_z \times N_x$ – количество расчетных точек.

Для реализации поставленных прогнозных задач В.И. Водолазким согласно ранее предложенной методике решения профильного двухмерного влагопереноса были составлены разного назначения программы для ЦВМ. Потенциальные возможности этих программ можно оценить количеством до (50x50) расчетных точек с разного рода граничными, начальными условиями и резко нелинейными параметрами.

В виде показательных решений из серии выполненных прогнозных задач приведем лишь результаты, представленные в табл. 2 и 3, а также на рис. 1–3. Сейчас ограничимся только главнейшими выводами, изложив более детальный критический анализ выполненных прогнозных решений отдельно.

Т а б л и ц а 1. Исходные для прогнозов параметры влагопереноса в тяжелых суглинках

$\frac{p_{bc}}{\gamma_p}$, м	$\geq 0,00$	- 0,50	-1,00	-1,50	- 2,00	-2,50	- 3,00	- 3,50	- 4,00	- 4,50	$\leq -5,00$
$W_p(p_{bc})$, доли	0,375	0,370	0,365	0,355	0,345	0,335	0,325	0,315	0,310	0,290	0,280
$K_p(p_{bc})$, м/сут	0,010	0,002	0,0005	0,0003	0,0002	0,00015	0,0001	0,0001	0,00005	0,00002	0
$D(p_{bc})$, 1/м	0,000	0,010	0,010	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,030	0,020	0,020

Таблица 2. Прогнозные значения ($\Phi_p, p_{вс}/\gamma_p, q$) при $\Phi(z, x, 0) = 7,0$ м, $\sigma = 0,001$, сетке (7x7), на $t = 50$ сут, $n = 51$, итерация 1-го вида

q_r $m^2/сут$	x_i, M z_z, M	0,00	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,00	q_r $m^2/сут$	
	: 7,00	:	5,45	5,302	5,436	5,745	6,210	6,547	6,906	:		
	:	:	-1,755	-1,698	-1,564	-1,255	-0,790	-0,453	-0,094	:		
0,000	: 6,50	:	5,245	5,245	5,302	5,436	5,745	6,210	6,547	6,906	7,000	-0,002
	:	:	-1,255	-1,255	-1,198	-1,064	-0,755	-0,290	0,047	0,406	0,500	:
0,000	: 5,00	:	4,527	4,527	4,733	5,137	5,562	6,022	6,457	6,891	7,000	-0,002
	:	:	-0,973	-0,973	-0,767	-0,363	0,062	0,522	0,957	1,391	1,500	:
0,000	: 4,50	:	3,941	3,941	4,344	4,831	5,340	5,859	6,369	6,874	7,000	-0,003
	:	:	-0,559	-0,559	-0,156	0,331	0,840	1,359	1,869	2,374	2,500	:
0,000	: 3,50	:	3,421	3,421	3,922	4,507	5,108	5,703	6,285	6,857	7,000	-0,003
	:	:	-0,079	-0,079	0,422	1,007	1,608	2,203	2,785	3,357	3,500	:
-0,003	: 2,50	:	2,500	2,663	3,413	4,164	4,881	5,560	6,210	6,843	7,000	-0,003
	:	:	0,000	0,163	0,913	1,664	2,381	3,060	3,710	4,343	4,500	:
-0,006	: 1,50	:	1,500	1,803	2,902	3,853	4,689	5,445	6,151	6,831	7,000	-0,003
	:	:	0,000	0,303	1,402	2,353	3,189	3,945	4,651	5,331	5,500	:
-0,011	: 0,50	:	0,500	1,057	2,539	3,656	4,575	5,380	6,119	6,825	7,000	-0,003
	:	:	0,000	0,557	2,039	3,156	4,075	4,880	5,619	6,325	6,500	:
	: 0,00	:	1,057	2,539	3,656	4,575	5,380	6,119	6,825	:		
	:	:	1,057	2,539	3,656	4,575	5,380	6,119	6,825	:		

$\Sigma - 0,020$

$\Sigma - 0,019$

Таблица 3. Прогнозные значения ($\Phi_p, p_{вс}/\gamma_p, q$) при $\Phi(z, x, 0) = 7,0$ м, $\sigma = 0,001$, сетке (7x7), на $t = \infty$, $n = 53$, итерация 1-го вида

q_r $m^2/сут$	x_i, M z_z, M	0,00	0,50	1,50	2,50	3,50	4,50	5,50	6,50	7,00	q_r $m^2/сут$	
	: 7,00	:	7,000	4,476	4,768	5,194	5,698	6,185	6,538	6,904	:	
	:	:	0,000	-2,524	-2,232	-1,806	-1,302	-0,815	-0,462	-0,096	:	
0,000	: 6,50	:	4,476	4,476	4,768	5,194	5,698	6,185	6,538	6,904	7,000	-0,002
	:	:	-2,024	-2,024	-1,732	-1,306	-0,802	-0,315	0,038	0,404	0,500	:
0,000	: 5,50	:	4,233	4,233	4,603	5,064	5,528	5,999	6,446	6,889	7,000	-0,002
	:	:	-1,267	-1,267	-0,897	-0,436	0,028	0,499	0,946	1,389	1,500	:
0,000	: 4,50	:	3,816	3,816	4,283	4,768	5,302	5,835	6,357	6,872	7,000	-0,003
	:	:	-0,684	-0,684	-0,217	0,268	0,802	1,335	1,857	2,372	2,500	:
0,000	: 3,50	:	3,338	3,338	3,867	4,462	5,076	5,682	6,274	6,855	7,000	-0,003
	:	:	-0,162	-0,162	0,367	0,962	1,576	2,182	2,774	3,355	3,500	:
-0,003	: 2,50	:	2,500	2,644	3,383	4,134	4,856	5,542	6,200	6,841	7,000	-0,003
	:	:	0,000	0,144	0,883	1,634	2,356	3,042	3,700	4,341	4,500	:
-0,006	: 1,50	:	1,500	1,798	2,885	3,832	4,670	5,431	6,143	6,830	7,000	-0,003
	:	:	0,000	0,298	1,385	2,332	3,170	3,931	4,643	5,330	5,500	:
-0,011	: 0,50	:	0,500	1,054	2,527	3,640	4,559	5,367	6,111	6,823	7,000	-0,004
	:	:	0,000	0,554	2,027	3,140	4,059	4,867	5,611	6,323	6,500	:
	: 0,00	:	1,054	2,527	3,640	4,559	5,367	6,111	6,823	:		
	:	:	1,054	2,527	3,640	4,559	5,367	6,111	6,823	:		

$\Sigma - 0,020$

$\Sigma - 0,020$

Обратим внимание, что результаты, приведенные в табл. 2 и 3, по сравнению с ранее выполненными на аналоговой технике [3], весьма схожие и отличия вполне объ-

ясняются особенностями аналогового моделирования. Численные решения по рекомендуемой методике можно считать более информативными и близкими к истинным.

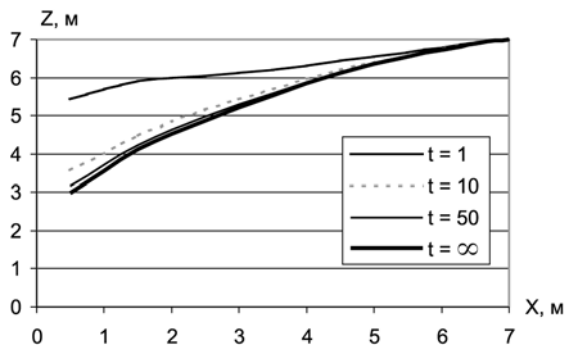


Рис. 1. Прогнозные изолинии $p_{вс}/\gamma_p = 0$ при $\Phi(z,x,0) = 7,0$ м, сетке (7x7) на $t = 1,0; 10,0; 50,0$ и при стационарном влагопереносе

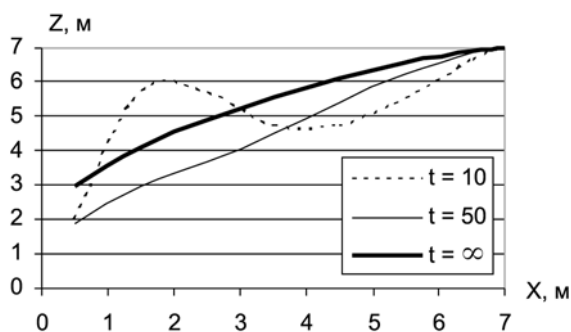


Рис. 2. Прогнозные изолинии $p_{вс}/\gamma_p = 0$ при $\Phi(z,x,0) = 0,0$ м, сетке (7x7) на $t = 10,0; 50,0$ и при стационарном влагопереносе

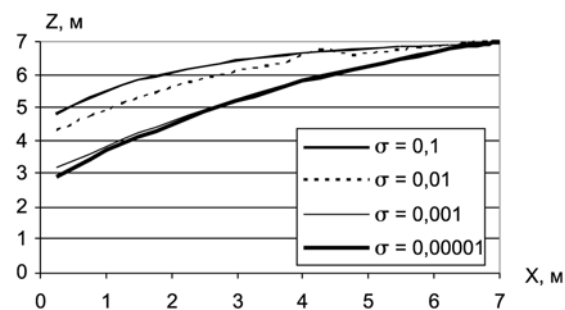


Рис. 3. Прогнозные изолинии $p_{вс}/\gamma_p = 0$ при $\Phi(z,x,0) = 7,0$ м, сетке (14x14), $t = \infty$ и $\sigma = 0,1; 0,01; 0,001; 0,00001$ м

На это же указывает высота высачивания при стационарном движении, более близкая по значению, определенному П. Я. Полубариновой-Кочиной [8]. Сравнение решений на расчетных сетках (7 x 7) и (14 x 14), характеризующихся разными пространственными шагами, соответственно равными 1,0 и 0,5 м, говорит о практическом сходстве прогнозных решений, т. е. о компетентности уже шага, равного 1,0 м. Оди-

наковость стационарных решений в случаях осушения замоченных грунтов дамбы и ее увлажнения, в том числе при итерациях 1- и 2-го видов, видна на рис. 1 и 2. На рис. 2 на $t = 10$ сут приведена "неистинная" изолиния,

$$\frac{p_{вс}}{\gamma_p} = 0, \text{ указывающая на возможность неза-}$$

конченных итерационных решений по ряду причин. Например, неправомерности принятой контрольной точки, нарушения последовательности итерационных процессов, неправильного упрощения учета граничных и начальных условий, неустойчивости схем решения в определенном временном интервале и т. п. Рис. 3 иллюстрирует сравнительно сильное влияние на результаты решения точности допустимых численных вычислений в контрольных расчетных точках. Только при погрешностях, меньших $\sigma \leq 0,001$ м, эти влияния ничтожны.

Таким образом, рекомендуемую методику и соответствующую ей программу прогнозных решений нелинейного продольного двухмерного влагопереноса (значит, и одномерного) можно считать эффективной для решения ряда водоохозяйственных и природоохранных задач со сложными граничными и начальными условиями. Открывается перспектива для разрешения проблемных вопросов, связанных с оценкой погрешностей вычислительных операций, а также возникает возможность реализации трехмерных задач, в частности профильно-радиальных, и на основе так называемых трубок тока влаги с переменными сечениями.

1. А. с. 1497540 СССР. Испаритель-конденсометр для определения параметров фазового перехода и паропереноса в воздухе / Ситников А. Б., Зильбербрандт М. М. – Опул. 30.07.89, Бюл. № 28. – 5 с.
2. А. с. 752379 СССР. Блок нелинейности / Ситников А.Б., Скальский А.С. – Опул. 30.07.80, Бюл. № 28. – 6 с.
3. Винников С. Д., Проскураков Б. В. Гидрофизика. – Л.: Гидрометиздат, 1988. – 248 с.
4. Глобус А. М. Экспериментальная гидрофизика почв. – Л.: Гидрометеиздат, 1969. – 355 с.
5. Злотник В. А., Кулик В. Я., Мурашко М. Г. Методы расчета влагопереноса в зоне аэрации:

- (Методические указания). – Минск: НИИЭМП при Госплане БССР, 1974. – 83 с.
6. *Инженерные изыскания в строительстве*. Реф. сб. – 2 (20). Сер. II: Гидрогеологические исследования зоны аэрации. – М.: ПЭМЦИНИС Госстроя СССР, 1973. – 75 с.
7. *Пашковский И. С.* Методы определения инфильтрационного питания по расчетам влагопереноса в зоне аэрации. – М.: Изд-во МГУ, 1973. – 119 с.
8. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Гостехиздат, 1952. – 676 с.
9. *Ситников А. Б.* Динамика влаги и солей в почвогрунтах зоны аэрации – Киев: Наук. думка, 1986. – 151 с.
10. *Скальский А. С.* Роль влагопереноса в техногенных гидрогеологических условиях: (Матем. моделирование): Автореф. дис. ... канд. геол.-минерал. наук. – Киев, 1988. – 19 с.

Ин-т геол. наук НАН Украины,
Киев
E-mail: geoj@bigmir.net

Статья поступила
26.11.08