Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 4, 457 – 484

Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами

Ірина Баранська, Микола Іванчов

(*Представлена А. Є. Шишковим*)

Анотація. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для двовимірного рівняння теплопровідності з невідомим залежним від часу коефіцієнтом температуропровідності в області з невідомими межами.

2000 MSC. 35R30.

Ключові слова та фрази. Обернена задача, рівняння теплопровідності, вільна межа.

1. Вступ

Обернені задачі для параболічних рівнянь в областях з невідомою межею почали досліджуватись недавно. До робіт, присвячених цій тематиці, можна віднести роботу [1]. При поєднанні двох задач — оберненої і з вільною межею в одній задачі виникає питання вибору методу їх дослідження. У роботі [2] було запропоновано досліджувати ці задачі методами теорії обернених задач шляхом зведення їх до задач в областях з фіксованими відомими межами і переводячи невідому функцію, що задає рівняння межі, в коефіцієнти рівняння. За допомогою такого підходу було розв'язано обернену задачу для одновимірного рівняння теплопровідності та для одновимірного параболічного рівняння [3] з невідомою частиною межі, а також задачу з вільною межею для двовимірного рівняння дифузії [4].

У цій роботі розглянуто обернену задачу визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у двовимірному рівнянні теплопровідності в області типу прямокутника, рух двох сторін якого описується невідомими функціями.

Стаття надійшла в редакцію 5.04.2006

В області $\Omega_T \equiv \{(x_1, x_2, t) : 0 < x_1 < l(t),\ 0 < x_2 < h(t),\ 0 < t < T < \infty\}$, де $x_1 = l(t)$, $x_2 = h(t)$ — невідомі функції, розглянемо рівняння теплопровідності з невідомим залежним від часу коефіцієнтом $a(t)$

$$u_t = a(t)\triangle u + f(x_1, x_2, t), \tag{1.1}$$

початковою умовою

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in [0, l_0] \times [0, h_0], \tag{1.2}$$

де $l_0 \equiv l(0)$, $h_0 \equiv h(0)$, крайовими умовами та умовами перевизначення

$$\begin{aligned} &u|_{x_1=0} = \mu_1(x_2, t), \quad u|_{x_1=l(t)} = \mu_2(x_2, t), \quad x_2 \in [0, h(t)],\ t \in [0, T], \\ &u|_{x_2=0} = \mu_3(x_1, t), \quad u|_{x_2=h(t)} = \mu_4(x_1, t), \quad x_1 \in [0, l(t)],\ t \in [0, T] \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\int\limits_0^{l(t)} \int\limits_0^{h(t)} u(x_1, x_2, t)\, dx_2\, dx_1 = \mu_5(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1.4}$$

$$\int\limits_0^{l(t)} \int\limits_0^{h(t)} x_2 u(x_1, x_2, t)\, dx_2\, dx_1 = \mu_6(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1.5}$$

$$a(t) u_{x_1}(0, x_0, t) = \mu_7(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1.6}$$

де x_0 — деяка фіксована точка з $(0, h(t))$.

Заміною $y_1 = \frac{x_1}{l(t)}$, $y_2 = \frac{x_2}{h(t)}$, $t = t$ задачу (1.1)–(1.6) зведемо до оберненої задачі стосовно невідомих $a(t)$, $v(y_1, y_2, t) \equiv u(y_1 l(t), y_2 h(t), t)$, $l(t)$, $h(t)$ в області з відомими межами $Q_T \equiv \{(y_1, y_2, t) : 0 < y_1 < 1,\ 0 < y_2 < 1,\ 0 < t < T\}$:

$$\begin{aligned} v_t = a(t)\Big(\frac{1}{l^2(t)} v_{y_1 y_1} + \frac{1}{h^2(t)} v_{y_2 y_2}\Big) + \frac{y_1 l'(t)}{l(t)} v_{y_1} + \frac{y_2 h'(t)}{h(t)} v_{y_2} \\ + f(y_1 l(t), y_2 h(t), t), \qquad (y_1, y_2, t) \in Q_T, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$v(y_1, y_2, 0) = \varphi(y_1 l_0, y_2 h_0), \qquad y_i \in [0, 1], \qquad i = 1, 2, \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} &v|_{y_1=0} = \mu_1(y_2 h(t), t), \quad v|_{y_1=1} = \mu_2(y_2 h(t), t),\ y_2 \in [0, 1],\ t \in [0, T], \\ &v|_{y_2=0} = \mu_3(y_1 l(t), t), \quad v|_{y_2=1} = \mu_4(y_1 l(t), t),\ y_1 \in [0, 1],\ t \in [0, T], \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$l(t)h(t) \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 v(y_1, y_2, t)\, dy_2\, dy_1 = \mu_5(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1.10}$$

$$l(t)h^2(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 y_2 v(y_1,y_2,t)\,dy_2\,dy_1=\mu_6(t),\qquad t\in[0,T],\tag{1.11}$$

$$\frac{a(t)}{l(t)}v_{y_1}\big(0,x_0h^{-1}(t),t\big)=\mu_7(t),\qquad t\in[0,T].\tag{1.12}$$

Означення 1.1. *Функції* $(a(t),\ l(t),\ h(t),\ v(y_1,y_2,t))\in C[0,T]\times(C^1[0,T])^2\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ [5], $a(t)>0,\ l(t)>0,\ h(t)>0,\ t\in[0,T]$, *які задовольняють умови* (1.7)–(1.12), *назвемо розв'язком задачі* (1.7)–(1.12).

2. Існування розв'язку задачі (1.7)–(1.12)

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\varphi\in C([0,\infty)\times[0,\infty)),\ \mu_i\in C([0,\infty)\times[0,T]),\ i=\overline{1,4},\ f\in C([0,\infty)\times[0,+\infty)\times[0,T])$;

2) $0<\varphi_0\le\varphi(x_1,x_2)\le\varphi_1<\infty,\ (x_1,x_2)\in[0,\infty)\times[0,\infty),\ \mu_i(t)>0,\ i=\overline{5,7},\ t\in[0,T], 0<\mu_{i0}\le\mu_i(x_2,t)\le\mu_{i1}<\infty,\ i=1,2,\ (x_2,t)\in[0,+\infty)\times[0,T],\ 0<\mu_{k0}\le\mu_k(x_1,t)\le\mu_{k1}<\infty,\ k=3,4,\ (x_1,t)\in[0,\infty)\times[0,T],\ 0\le f(x_1,x_2,t)\le f_1<\infty,\ (x_1,x_2,t)\in[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,T],\ \mu_{kx_1}(x_1,t)>0,(x_1,t)\in[0,L_2]\times[0,T],\ k=3,4,\ \varphi_{x_1}(x_1,x_2)>0,\ (x_1,x_2)\in[0,l_0]\times[0,h_0],\ 0<x_0<H_1$, *де* $\varphi_i,\ \mu_{ki},\ i=1,2,\ k=\overline{1,4},\ f_1$ *— задані додатні сталі,* $l_0,\ h_0,\ H_1$ *— відомі додатні сталі, які будуть визначені нижче;*

3) $\varphi\in C^2([0,l_0]\times[0,h_0]),\ \mu_m\in C^1[0,T],\ m=5,6,\ \mu_7\in C[0,T],\ \mu_i\in C^{2,1}([0,H_2]\times[0,T]),\ i=1,2,\ \mu_k\in C^{2,1}([0,L_2]\times[0,T]),\ k=3,4,\ f\in C^{1,0}([0,L_2]\times[0,H_2]\times[0,T])$, *де* H_2,L_2 *— деякі додатні сталі, значення яких буде вказано нижче;*

4) *умови узгодження нульового та першого порядків.*

Тоді можна вказати таке число $t_0,\ 0<t_0\le T$, *що розв'язок задачі* (1.7)–(1.12) *існує при* $0\le y_i\le 1,\ i=1,2,\ 0\le t\le t_0$.

Доведення. Спочатку визначимо сталі $l_0=l(0),\ h_0=h(0)$. З умов (1.2), (1.4), (1.5) для їх визначення отримаємо систему рівнянь

$$\int\limits_0^{l_0}\int\limits_0^{h_0}\varphi(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1=\mu_5(0),\qquad \int\limits_0^{l_0}\int\limits_0^{h_0}x_2\varphi(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1=\mu_6(0)\,.\tag{2.1}$$

Позначивши $\int_0^{l_0} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1 \equiv \psi(l_0, x_2)$, систему (2.1) запишемо у вигляді

$$\int_0^{h_0} \psi(l_0, x_2)\, dx_2 = \mu_5(0), \qquad \int_0^{h_0} x_2 \psi(l_0, x_2)\, dx_2 = \mu_6(0).$$

З умов теореми маємо $\varphi_0 l_0 \le \psi(l_0, x_2) \le \varphi_1 l_0$. Звідси знаходимо $\varphi_0 l_0 h_0 \le \int_0^{h_0} \psi(l_0, x_2)\, dx_2 \le \varphi_1 l_0 h_0$. Функція $y = \int_0^{h_0} \psi(l_0, x_2)\, dx_2$ при довільному фіксованому $l_0 > 0$ монотонно зростає стосовно h_0. Це означає, що існує єдине значення $h_0 = h_0(l_0)$, яке є розв'язком рівняння $\int_0^{h_0(l_0)} \psi(l_0, x_2)\, dx_2 = \mu_5(0)$, причому $\frac{\mu_5(0)}{\varphi_1 l_0} \le h_0(l_0) \le \frac{\mu_5(0)}{\varphi_0 l_0}$. З отриманих оцінок випливає

$$\frac{\varphi_0 \mu_5^2(0)}{2\varphi_1^2 l_0} \le \varphi_0 l_0 \frac{h_0^2(l_0)}{2} \le \int_0^{h_0(l_0)} x_2 \psi(l_0, x_2)\, dx_2 \le \varphi_1 l_0 \frac{h_0^2(l_0)}{2} \le \frac{\varphi_1 \mu_5^2(0)}{2\varphi_0^2 l_0}.$$

Оскільки функція $y(l_0) = \int_0^{h_0(l_0)} x_2 \psi(l_0, x_2)\, dx_2$ є монотонно спадною, то з цих нерівностей випливає існування єдиного значення $l_0 > 0$, для якого

$$\int_0^{h_0(l_0)} x_2 \psi(l_0, x_2)\, dx_2 = \mu_5(0).$$

Отже, сталі $l_0 > 0$, $h_0 > 0$ визначаються із системи рівнянь (2.1) однозначно.

Наявність відомих значень $l_0 > 0,\ h_0 > 0$ дає можливість оцінити за принципом максимуму [5] розв'язок прямої задачі (1.7)–(1.9):

$$0 < M_0 \le v(y_1, y_2, t) \le M_1 < \infty, \qquad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T, \tag{2.2}$$

де сталі $M_0,\ M_1$ визначаються вихідними даними.

З умов (1.10) та (1.11) із врахуванням (2.2) знаходимо

$$h(t) = \frac{\mu_6(t) \int_0^1 \int_0^1 v(y_1, y_2, t)\, dy_2\, dy_1}{\mu_5(t) \int_0^1 \int_0^1 y_2 v(y_1, y_2, t)\, dy_2\, dy_1}, \qquad t \in [0, T], \tag{2.3}$$

$$l(t) = \frac{\mu_5^2(t) \int_0^1 \int_0^1 y_2 v(y_1, y_2, t)\, dy_2\, dy_1}{\mu_6(t) \left(\int_0^1 \int_0^1 v(y_1, y_2, t)\, dy_2\, dy_1 \right)^2}, \qquad t \in [0, T]. \tag{2.4}$$

Звідси, враховуючи (2.2), отримуємо такі оцінки:

$$0 < H_1 \le h(t) \le H_2 < \infty, \qquad 0 < L_1 \le l(t) \le L_2 < \infty, \tag{2.5}$$

де сталі H_i, L_i, $i=1,2$, визначаються заданими величинами. Отже, сталі l_0, h_0, H_i, L_i, $i=1,2$, які фігурують в умовах теореми, знайдено.

Зведемо задачу (1.7)–(1.12) до системи рівнянь. Пряма задача (1.7)–(1.9) еквівалентна рівнянню

$$v(y_1,y_2,t)=v_0(y_1,y_2,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)$$
$$\times\Big(\frac{\xi_1 l'(\tau)}{l(\tau)}v_{\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\tau)+\frac{\xi_2 h'(\tau)}{h(\tau)}v_{\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\tau)\Big)d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau,$$
$$(y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T, \quad (2.6)$$

де

$$v_0(y_1,y_2,t)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\varphi(\xi_1 l_0,\xi_2 h_0)\,d\xi_1\,d\xi_2$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{11\xi_1}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\frac{a(\tau)}{l^2(\tau)}\,\mu_1(\xi_2 h(\tau),\tau)\,d\xi_2\,d\tau$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{11\xi_1}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\frac{a(\tau)}{l^2(\tau)}\,\mu_2(\xi_2 h(\tau),\tau)\,d\xi_2\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{11\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,\mu_3(\xi_1 l(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\tau$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{11\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,\mu_4(\xi_1 l(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)f(\xi_1 l(\tau),\xi_2 h(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau, \quad (2.7)$$

$$G_{kl}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}$$
$$\times\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\Big(\exp\Big(-\frac{(y_1-\xi_1+2n)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\Big)+(-1)^k\exp\Big(-\frac{(y_1+\xi_1+2n)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\Big)\Big)$$

$$\times\Big(\exp\Big(-\frac{(y_2-\xi_2+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\Big)+(-1)^l\exp\Big(-\frac{(y_2+\xi_2+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\Big)\Big),$$
$$k,l=1,2,$$

$$\theta_1(t)=\int\limits_0^t\frac{a(\sigma)}{l^2(\sigma)}\,d\sigma,\qquad \theta_2(t)=\int\limits_0^t\frac{a(\sigma)}{h^2(\sigma)}\,d\sigma.$$

Зазначимо, що $G_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)$ — функція Гріна для рівняння

$$v_t=a(t)\Big(\frac{1}{l^2(t)}v_{y_1y_1}+\frac{1}{h^2(t)}v_{y_2y_2}\Big)+f(y_1l(t),y_2h(t),t)\tag{2.8}$$

з крайовими умовами (1.9), а $v_0(y_1,y_2,t)$ є розв'язком задачі (2.8), (1.8), (1.9).

З (2.6) знайдемо $v_{y_1}(y_1,y_2,t)$:

$$v_{y_1}(y_1,y_2,t)=v_{0\,y_1}(y_1,y_2,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{11\,y_1}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)$$
$$\times\Big(\frac{\xi_1l'(\tau)}{l(\tau)}v_{\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\tau)+\frac{\xi_2h'(\tau)}{h(\tau)}v_{\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\tau)\Big)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau.\tag{2.9}$$

Використовуючи властивості функції Гріна

$$-G_{11\tau}=\frac{a(\tau)}{l^2(\tau)}G_{11\xi_1\xi_1}+\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}G_{11\xi_2\xi_2},\qquad G_{11\xi_iy_1}=-G_{21\xi_i\xi_1},\quad i=1,2,$$

та інтегруючи частинами, з (2.7) обчислимо

$$v_{0\,y_1}(y_1,y_2,t)=l_0\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\varphi_\eta(\eta,\xi_2h_0)\big|_{\eta=\xi_1l_0}\,d\xi_1\,d\xi_2$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\big(\xi_2h'(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)$$
$$-a(\tau)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)+\mu_{1\tau}(\eta,\tau)\big)\big|_{\eta=\xi_2h(\tau)}\,d\xi_2\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\big(\xi_2h'(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)$$
$$-a(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+\mu_{2\tau}(\eta,\tau)\big)\big|_{\eta=\xi_2h(\tau)}\,d\xi_2\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\mu_{3\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_1l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau$$

$$
-\int_0^t\int_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\mu_{4\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau
$$

$$
+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11y_1}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)f(\xi_1 l(\tau),\xi_2 h(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau. \quad (2.10)
$$

Продиференціюємо (1.10) та (1.11) по t. Використовуючи рівняння (1.7), рівності (1.10) та (1.11), отримаємо

$$
l'(t)\,l(t)\,h^2(t)\int_0^1 \mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2 + h'(t)\,h(t)\,l^2(t)\int_0^1 \mu_4(y_1l(t),t)\,dy_1
$$

$$
= \mu_5'(t)\,l(t)h(t) - a(t)\,h^2(t)\int_0^1 (v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t))\,dy_2
$$

$$
- a(t)\,l^2(t)\int_0^1 (v_{y_2}(y_1,1,t)-v_{y_2}(y_1,0,t))\,dy_1
$$

$$
- l^2(t)\,h^2(t)\int_0^1\int_0^1 f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,dy_1\,dy_2, \quad (2.11)
$$

$$
l'(t)\,l(t)\,h^2(t)\int_0^1 (1-y_2)\mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2 = \mu_5'(t)l(t)
$$

$$
- \mu_6'(t)\,l(t) - a(t)\,h^2(t)\int_0^1 (1-y_2)(v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t))\,dy_2
$$

$$
+ a(t)\,l^2(t)\int_0^1 (v_{y_2}(y_1,0,t) - \mu_4(y_1l(t),t) + \mu_3(y_1l(t),t)\,dy_1
$$

$$
- l^2(t)\,h^2(t)\int_0^1\int_0^1 (1-y_2)f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,dy_1\,dy_2. \quad (2.12)
$$

Вводячи позначення $p(t)\equiv l'(t), g(t)\equiv h'(t), w_i(y_1,y_2,t)\equiv v_{y_i}(y_1, y_2,t)$, $i=1,2$, задачу (1.7)–(1.12) зведемо до системи рівнянь стосовно невідомих $(a(t),l(t),h(t),p(t),g(t),v(y_1,y_2,t),w_i(y_1,y_2,t),\ i=1,2)$, яка складається з (2.3), (2.4) та наступних рівнянь:

$$a(t)w_1(0, x_0h^{-1}(t), t) = \mu_7(t)\, l(t), \qquad t \in [0, T], \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} p(t)\, l(t)\, h^2(t) \int_0^1 (1-y_2)\mu_2(y_2h(t), t)\, dy_2 &= \mu_5'(t)\, l(t)\, h(t) - \mu_6'(t)\, l(t) \\ &- a(t)\, h^2(t) \int_0^1 (1-y_2)(w_1(1, y_2, t) - w_1(0, y_2, t))\, dy_2 \\ &+ a(t)\, l^2(t) \int_0^1 (w_2(y_1, 0, t) - \mu_4(y_1l(t), t) + \mu_3(y_1l(t), t))\, dy_1 \\ &- l^2(t)\, h^2(t) \int_0^1 \int_0^1 (1-y_2) f(y_1l(t), y_2h(t), t)\, dy_1\, dy_2, \qquad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} p(t)\, l(t)\, h^2(t) \int_0^1 \mu_2(y_2h(t), t)\, dy_2 &+ g(t)\, h(t)\, l^2(t) \int_0^1 \mu_4(y_1l(t), t)\, dy_1 \\ = \mu_5'(t)\, l(t)\, h(t) &- a(t)\, h^2(t) \int_0^1 (w_1(1, y_2, t) - w_1(0, y_2, t))\, dy_2 \\ &- a(t)\, l^2(t) \int_0^1 (w_2(y_1, 1, t) - w_2(y_1, 0, t))\, dy_1 \\ &- l^2(t)\, h^2(t) \int_0^1 \int_0^1 f(y_1l(t), y_2h(t), t)\, dy_1\, dy_2, \qquad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} v(y_1, y_2, t) = v_0(y_1, y_2, t) &+ \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 G_{11}(y_1, y_2, t, \xi_1, \xi_2, \tau) \\ &\times \Big(\frac{\xi_1 p(\tau)}{l(\tau)} w_1(\xi_1, \xi_2, \tau) + \frac{\xi_2 g(\tau)}{h(\tau)} w_2(\xi_1, \xi_2, \tau) \Big)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau, \\ &\qquad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_T, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$w_i(y_1,y_2,t) = v_{0\,y_i}(y_1,y_2,t) + \int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11\,y_i}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)$$
$$\times\Big(\frac{\xi_1 p\,(\tau)}{l(\tau)}w_1(\xi_1,\xi_2,\tau) + \frac{\xi_2 g(\tau)}{h(\tau)}w_2(\xi_1,\xi_2,\tau)\Big)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau,$$
$$i=1,2,\quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \quad (2.17)$$

Похідна $v_{0\,y_2}$ визначається аналогічно до (2.10):

$$v_{0\,y_2}(y_1,y_2,t) = h_0\int_0^1\int_0^1 G_{12}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\varphi_\eta(\xi_1 l_0,\eta)\big|_{\eta=\xi_2 h_0}\,d\xi_1\,d\xi_2$$
$$-\int_0^t\int_0^1 G_{12}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)(\xi_1 l'(\tau)\mu_{3\eta}(\eta,\tau)$$
$$-a(\tau)\mu_{3\eta\eta}(\eta,\tau)+\mu_{3\tau}(\eta,\tau))\big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^1 G_{12}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)(\xi_1 l'(\tau)\mu_{4\eta}(\eta,\tau)$$
$$-a(\tau)\mu_{4\eta\eta}(\eta,\tau)+\mu_{4\tau}(\eta,\tau))\big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^1 G_{12\xi_1}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\frac{a(\tau)}{l^2(\tau)}\,h(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_2 h(\tau)}\,d\xi_2\,d\tau$$
$$-\int_0^t\int_0^1 G_{12\xi_1}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\frac{a(\tau)}{l^2(\tau)}\,h(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_2 h(\tau)}\,d\xi_2\,d\tau$$
$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11y_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)f(\xi_1 l(\tau),\xi_2 h(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau. \quad (2.18)$$

Покажемо, що задача (1.7)–(1.12) і система рівнянь (2.3), (2.4), (2.13)–(2.17) еквівалентні. Зі способу отримання системи рівнянь (2.3), (2.4), (2.13)–(2.17) випливає, що коли функції $(a(t),\ l(t),\ h(t),\ v(y_1,y_2,t))\in C[0,T]\times(C^1[0,T])^2\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $a(t)>0$, $l(t)>0$, $h(t)>0$, $t\in[0,T]$ є розв'язком задачі (1.7)–(1.12), то функції $(a(t),\ l(t),\ h(t),\ p(t),\ g(t),\ v(y_1,y_2,t),\ w_i(y_1,y_2,t),\ i=1,2)\in(C[0,T])^5\times(C(\overline{Q}_T))^3$, $a(t)>0,\ l(t)>0,\ h(t)>0$ є розв'язком системи (2.3), (2.4), (2.13)–(2.17). Покажемо, що правильним є і обернене твердження: якщо функції $(a(t),\ l(t),\ h(t),\ p(t),\ g(t),\ v(y_1,y_2,t),\ w_i(y_1,y_2,t),\ i=1,2)$, $a(t)>0,\ l(t)>0,\ h(t)>0$ з класу $(C[0,T])^5\times(C(\overline{Q}_T))^3$ є розв'язком системи (2.3), (2.4), (2.13)–(2.17), то функції $(a(t), l(t), h(t), v(y_1, y_2, t))$, $a(t) > 0,\ l(t) > 0,\ h(t) > 0$ належать до класу $C[0,T] \times (C^1[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ і є розв'язком задачі (1.7)–(1.12). З припущень теореми випливає, що функція $v_0(y_1, y_2, t)$ як розв'язок задачі (2.8), (1.8), (1.9), належить до класу $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$. Диференціюючи (2.16) по $y_i,\ i = 1, 2$, та порівнюючи результат з (2.17), отримуємо, що $w_i(y_1,y_2,t) \equiv v_{y_i}(y_1,y_2,t)$, $i = 1, 2$. Враховуючи це в (2.16), встановлюємо, що $v(y_1, y_2, t)$ належить до класу $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, є розв'язком рівняння

$$v_t = a(t)\Big(\frac{1}{l^2(t)}v_{y_1y_1} + \frac{1}{h^2(t)}v_{y_2y_2}\Big) + \frac{y_1p\,(t)}{l(t)}v_{y_1} + \frac{y_2g(t)}{h(t)}v_{y_2} + f(y_1l(t), y_2h(t), t) \quad (2.19)$$

і задовольняє умови (1.8), (1.9). Продиференціюємо (2.3), (2.4), враховуючи (2.19):

$$p\,(t)\,l(t)\,h^2(t)\int\limits_0^1(1-y_2)\mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2 = \mu_5'(t)\,l(t)\,h(t) - \mu_6'(t)\,l(t)$$
$$- a(t)\,h^2(t)\int\limits_0^1(1-y_2)(w_1(1,y_2,t) - w_1(0,y_2,t))\,dy_2 + \big((p(t) - l'(t))h(t)$$
$$+ (g(t) - h'(t))l(t)\big)\mu_5(t) + a(t)\,l^2(t)\int\limits_0^1(w_2(y_1,0,t) - \mu_4(y_1l(t),t)$$
$$+ \mu_3(y_1l(t),t)\,dy_1 - l^2(t)\,h^2(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1(1-y_2)f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,dy_1\,dy_2$$
$$- \big(2(g(t) - h'(t))l(t)h(t) + (p\,(t) - l'(t))h^2(t)\big)\mu_6(t),$$

$$p\,(t)\,l(t)\,h^2(t)\int\limits_0^1\mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2 + g(t)\,h(t)\,l^2(t)\int\limits_0^1\mu_4(y_1l(t),t)\,dy_1$$
$$= (p\,(t) - l'(t))h(t)\mu_5(t) - a(t)\,h^2(t)\int\limits_0^1(w_1(1,y_2,t) - w_1(0,y_2,t))\,dy_2$$
$$+ (g(t) - h'(t))l(t)\mu_5(t) - a(t)\,l^2(t)\int\limits_0^1(w_2(y_1,1,t) - w_2(y_1,0,t))\,dy_1$$

$$+ \mu_5'(t)\, l(t)\, h(t) - l^2(t)\, h^2(t) \int_0^1 \int_0^1 f(y_1 l(t), y_2 h(t), t)\, dy_1\, dy_2.$$

Віднявши від цих рівностей (2.14), (2.15) відповідно, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &(g(t) - h'(t))l(t)(\mu_5(t) - 2h(t)\mu_6(t)) \\ &\qquad\qquad + (p(t) - l'(t))h(t)(\mu_5(t) - h(t)\mu_6(t)) = 0, \\ &(g(t) - h'(t))l(t) + (p\,(t) - l'(t))h(t) = 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Визначник Δ системи рівнянь (2.20) дорівнює $\Delta = -l(t)h^2(t)\mu_6(t)$. З припущень теореми випливає, що $\Delta \neq 0$. Отже, $p\,(t) \equiv l'(t), g(t) \equiv h'(t)$. Тоді рівняння (2.19) співпадає з рівнянням (1.7), а виконання умов (1.10)–(1.12) випливає з (2.3), (2.4) та (2.13).

Отже, еквівалентність задачі (1.7)–(1.12) та системи рівнянь (2.3), (2.4), (2.13)–(2.17) у вищенаведеному розумінні встановлено.

Доведемо існування розв'язку системи рівнянь (2.3), (2.4), (2.13)–(2.17), застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього встановимо апріорні оцінки розв'язків зазначеної системи рівнянь.

Знайдемо оцінку знизу величини v_{y_1}. Враховуючи рівність

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))}} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(- \frac{(y - \xi + 2n)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))} \right) + \exp\left(- \frac{(y + \xi + 2n)^2}{4(\theta_1(t) - \theta_1(\tau))} \right) \right) d\xi = 1,$$

яку легко перевірити безпосереднім обчисленням, оцінимо такий вираз з (2.10):

$$\begin{aligned} l_0 &\int_0^1 \int_0^1 G_{21}(y_1, y_2, t, \xi_1, \xi_2, 0) \varphi_\eta(\eta, \xi_2 h_0)\big|_{\eta = \xi_1 l_0}\, d\xi_1\, d\xi_2 \\ &+ \int_0^t \int_0^1 G_{21\xi_2}(y_1, y_2, t, \xi_1, 0, \tau) \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\, l(\tau)\mu_{3\eta}(\eta, \tau)\big|_{\eta = \xi_1 l(\tau)}\, d\xi_1\, d\tau \\ &- \int_0^t \int_0^1 G_{21\xi_2}(y_1, y_2, t, \xi_1, 1, \tau) \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\, l(\tau)\mu_{4\eta}(\eta, \tau)\big|_{\eta = \xi_1 l(\tau)}\, d\xi_1\, d\tau \\ &\quad \geq \min \Big\{ \min_{[0,l_0]\times[0,h_0]} \varphi_{x_1}(x_1, x_2), \min_{[0,L_2]\times[0,T]} l(t)\mu_{3x_1}(x_1, t), \end{aligned}$$

$$\min_{[0,L_2]\times[0,T]} l(t)\mu_{4x_1}(x_1,t)\Big\}\Bigg(\int\limits_0^1 G_1^{(2)}(y_2,t,\xi_2,0)\,d\xi_2$$

$$+\int\limits_0^t G_{1\xi_2}^{(2)}(y_2,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau - \int\limits_0^t G_{1\xi_2}^{(2)}(y_2,t,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau\Bigg),$$

де

$$G_1^{(2)}(y,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}$$
$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(y-\xi+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)-\exp\left(-\frac{(y+\xi+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right)$$

— функція Гріна для рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy}, \qquad 0<y<1, \quad 0<t<T \tag{2.21}$$

з крайовими умовами першого роду. Розглядаючи для рівняння (2.21) першу крайову задачу з умовами

$$v(y,0)=1, \quad y\in[0,1], \qquad v(0,t)=1, \quad v(1,t)=1, \quad t\in[0,T]$$

та подаючи її розв'язок за допомогою функції Гріна, встановлюємо рівність

$$1 \equiv \int\limits_0^1 G_1^{(2)}(y_2,t,\xi_2,0)\,d\xi_2 + \int\limits_0^t G_{1\xi_2}^{(2)}(y_2,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau$$
$$-\int\limits_0^t G_{1\xi_2}^{(2)}(y_2,t,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau.$$

Тоді

$$l_0\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\varphi_\eta(\eta,\xi_2h_0)\big|_{\eta=\xi_1l_0}\,d\xi_1\,d\xi_2$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\mu_{3\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_1l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\mu_{4\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)}d\xi_1\,d\tau \geq M_2 > 0,$$

де M_2 — відома стала. Інші доданки в (2.16) при $t=0$ дорівнюють нулю. Це означає, що існує деяке число t_1, $0<t_1\leq T$, таке, що справджується оцінка

$$v_{y_1}(y_1,y_2,t)\geq\frac{1}{2}M_2,\qquad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_{t_1}\,. \tag{2.22}$$

Враховуючи (2.5) та умови теореми, з (2.13) одержимо оцінку $a(t)$ зверху

$$0<a(t)\leq A_1,\qquad t\in[0,t_1]\,. \tag{2.23}$$

Введемо позначення

$$W(t)\equiv\max_{\substack{0\leq y_i\leq 1\\ i=1,2}}|w_1(y_1,y_2,t)|+\max_{\substack{0\leq y_i\leq 1\\ i=1,2}}|w_2(y_1,y_2,t)|.$$

З (2.17) отримаємо нерівність

$$W(t)\leq C_1+C_2\int_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}+\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\right)$$
$$\times\big(1+|p\,(\tau)|+|g(\tau)|\big)W(\tau)\,d\tau. \tag{2.24}$$

З (2.14) та (2.15) випливають оцінки

$$|p\,(t)|\leq C_3+C_4W(t),\qquad |g(t)|\leq C_5+C_6W(t). \tag{2.25}$$

Підставляючи їх у (2.24) та вводячи позначення $W_1(t)\equiv 1+W(t)$, подамо (2.24) у вигляді

$$W_1(t)\leq C_7+C_8\int_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}}+\frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\right)W_1^2(\tau)\,d\tau.$$

Позначаючи $a_{\min}(t)\equiv\min_{0\leq\tau\leq t}a(\tau)$, отримаємо нерівність

$$W_1(t)\leq C_7+\frac{C_9}{\sqrt{a_{\min}(t)}}\int_0^t\frac{W_1^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{2.26}$$

Піднесемо обидві частини цієї нерівності до квадрату і застосуємо нерівності Коші та Коші–Буняковського:

$$W_1^2(t) \le 2C_7^2 + \frac{2C_9^2}{a_{\min}(t)} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$\le 2C_7^2 + \frac{4C_9^2\sqrt{T}}{a_{\min}(t)} \int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Звідси знаходимо

$$\int\limits_0^t \frac{W_1^2(\sigma)\,d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}} \le 4C_7^2\sqrt{T} + \frac{4C_9^2\pi\sqrt{T}}{a_{\min}(t)} \int\limits_0^t W_1^4(\tau)\,d\tau.$$

Підставляючи отриману нерівність в (2.26), зведемо її до вигляду

$$W_1(t) \le C_7 + \frac{C_{10}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{11}}{a_{\min}^{3/2}(t)} \int\limits_0^t W_1^4(\tau)\,d\tau. \tag{2.27}$$

Позначимо $\alpha(t) \equiv C_7 + \dfrac{C_{10}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}$, $\beta(t) \equiv \dfrac{C_{11}}{a_{\min}^{3/2}(t)}$ і подамо нерівність (2.27) у вигляді

$$W_1(t) \le \alpha\,(t) + \beta\,(t) \int\limits_0^t W_1^4(\tau)\,d\tau.$$

Введемо позначення $\omega\,(t) \equiv \frac{\alpha\,(t)}{\beta\,(t)} + \int_0^t W_1^4(\tau)\,d\tau$. Припускаючи тимчасово, що функції $\alpha(t), \beta(t)$ неперервно диференційовні на $[0,T]$, для $\omega\,(t)$ отримаємо диференціальну нерівність

$$\omega'\,(t) \le \Big(\frac{\alpha\,(t)}{\beta\,(t)}\Big)' + \beta^4\,(t)\,\omega^4\,(t). \tag{2.28}$$

Поділимо цю нерівність на $\omega^4\,(t)$ та проінтегруємо її від 0 до t:

$$\frac{1}{3\omega^3(0)} - \frac{1}{3\omega^3(t)} \le \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\frac{1}{\omega^4(t)} - \frac{\alpha(0)}{\beta(0)}\frac{1}{\omega^4(0)}$$

$$+ 4\int\limits_0^t \frac{\alpha(\tau)\,\omega'\,(\tau)}{\beta(\tau)\,\omega^5\,(\tau)}\,d\tau + \int\limits_0^t \beta^4(\tau)\,d\tau. \tag{2.29}$$

Оцінимо інтеграл

$$I \equiv 4\int\limits_0^t \frac{\alpha(\tau)\,\omega'\,(\tau)}{\beta(\tau)\,\omega^5\,(\tau)}\,d\tau.$$

Для цього зробимо заміну $\omega(\tau) = z$ і врахуємо те, що з властивостей функції $A(t)$ та введених позначень випливає, що функція $\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}$ незростаюча. Тоді

$$4\int\limits_0^t \frac{\alpha(\tau)\,\omega'(\tau)}{\beta(\tau)\,\omega^5(\tau)}\,d\tau = 4\int\limits_{\omega(0)}^{\omega(t)} \frac{\alpha(\omega^{-1}(z))\,dz}{\beta(\omega^{-1}(z))\,z^5}$$

$$\le 4\frac{\alpha(0)}{\beta(0)}\left|\int\limits_{\omega(0)}^{\omega(t)} \frac{dz}{z^5}\right| \le \frac{\alpha(0)}{\beta(0)}\Big(\frac{1}{\omega^4(t)} + \frac{1}{\omega^4(0)}\Big).$$

Враховуючи отриману оцінку, подамо нерівність (2.29) у вигляді:

$$\frac{1}{3\omega^3(0)} - \frac{1}{3\omega^3(t)} \le \Big(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} + \frac{\alpha(0)}{\beta(0)}\Big)\frac{1}{\omega^4(t)} + \int\limits_0^t \beta^4(\tau)\,d\tau. \tag{2.30}$$

Беручи до уваги те, що $\omega(0) = \frac{\alpha(0)}{\beta(0)}$, з (2.30) знаходимо

$$\omega^4(t) \le \frac{\omega(t) + 3\big(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} + \frac{\alpha(0)}{\beta(0)}\big)}{\frac{\beta^3(0)}{\alpha^3(0)} - 3\int_0^t \beta^4(\tau)\,d\tau}. \tag{2.31}$$

Зауважимо, що завжди можна вказати деякий проміжок $[0, T^*]$, на якому справджується нерівність

$$\frac{\beta^3(0)}{\alpha^3(0)} - 3\int\limits_0^t \beta^4(\tau)\,d\tau > 0.$$

Використовуючи (2.31), з (2.28) отримаємо

$$\omega'(t) - \frac{\omega(t)\beta^4(t)}{\frac{\beta^3(0)}{\alpha^3(0)} - 3\int_0^t \beta^4(\tau)\,d\tau} \le \Big(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\Big)' + \frac{3\beta^4(t)\big(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} + \frac{\alpha(0)}{\beta(0)}\big)}{\frac{\beta^3(0)}{\alpha^3(0)} - 3\int_0^t \beta^4(\tau)\,d\tau}.$$

Подамо дану нерівність у вигляді

$$\left(\omega(t)\left(1 - \frac{3\alpha^3(0)}{\beta^3(0)}\int\limits_0^t \beta^4(\tau)d\tau\right)^{1/3}\right)' \le \left(\Big(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\Big)'\right.$$

$$\left. + \frac{3\beta^4(t)\big(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)} + \frac{\alpha(0)}{\beta(0)}\big)}{\frac{\beta^3(0)}{\alpha^3(0)} - 3\int_0^t \beta^4(\tau)\,d\tau}\right)\left(1 - 3\frac{\alpha^3(0)}{\beta^3(0)}\int\limits_0^t \beta^4(\tau)\,d\tau\right)^{1/3}. \tag{2.32}$$

Інтегруючи та спрощуючи отримані вирази, отримуємо оцінку

$$\omega(t) \leq \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} + \frac{\alpha^3(0)}{\beta^3(0) - 3\alpha^3(0)\int_0^t \beta^4(\tau)\,d\tau} \int\limits_0^t \alpha(\tau)\beta^3(\tau)\,d\tau.$$

Враховуючи введені позначення, звідси встановлюємо оцінку

$$W_1(t) \leq C_7 + \frac{C_{10}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{12}}{a_{\min}^{3/2}(t)\Big(1 - C_{13}\int_0^t \frac{d\tau}{a_{\min}^6(\tau)}\Big)} \int\limits_0^t \frac{(1+\sqrt{a_{\min}(\tau)})\,d\tau}{a_{\min}^5(\tau)}.$$

З оцінок (2.5) і рівняння (2.13) випливає, що $a(t) \geq \frac{C_{14}}{W(t)}$. Тоді з попередньої нерівності маємо

$$a_{\min}(t) \geq C_{14}\Bigg(C_7 + \frac{C_{10}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} + \frac{C_{12}}{a_{\min}^{3/2}(t)\Big(1 - C_{13}\int_0^t \frac{d\tau}{a_{\min}^6(\tau)}\Big)} \int\limits_0^t \frac{(1+\sqrt{a_{\min}(\tau)})\,d\tau}{a_{\min}^5(\tau)}\Bigg)^{-1}. \tag{2.33}$$

Позначимо через $t_2, 0 < t_2 \leq T$, таке число, що на проміжку $[0, t_2]$ буде правильною нерівність

$$C_{13}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{a_{\min}^6(\tau)} \leq \frac{1}{2}.$$

Тоді нерівність (2.33) зведеться до вигляду

$$C_7 a_{\min}(t) + C_{10}\sqrt{a_{\min}(t)} + \frac{2C_{12}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int\limits_0^t \frac{(1+\sqrt{a_{\min}(\tau)})\,d\tau}{a_{\min}^5(\tau)} \geq C_{14}. \tag{2.34}$$

Зазначимо таке число $t_3,\ 0 < t_3 \leq T$, що на проміжку $[0, t_3]$ буде виконуватись нерівність

$$\frac{2C_{12}}{\sqrt{a_{\min}(t)}} \int\limits_0^t \frac{(1+\sqrt{a_{\min}(\tau)})\,d\tau}{a_{\min}^5(\tau)} \leq \frac{1}{2}C_{14}. \tag{2.35}$$

Враховуючи (2.35), отримаємо з (2.34) нерівність

$$C_7 a_{\min}(t) + C_{10}\sqrt{a_{\min}(t)} + \frac{1}{2}C_{14} \geq 0, \qquad t \in [0, t_3],$$

звідки встановлюємо оцінку

$$|w_i(y_1, y_2, t)| \leq M_3 < \infty, \qquad i = 1, 2, \quad (y_1, y_2, t) \in \overline{Q}_{t_3}. \tag{2.36}$$

Перепишемо рівняння (2.13)–(2.15) у вигляді

$$a(t) = \frac{\mu_7(t)\, l(t)}{w_1(0, x_0 h^{-1}(t), t)}, \qquad t \in [0, T], \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} p\,(t) = \Bigg(& \mu_5'(t)\, l(t)\, h(t) - \mu_6'(t)\, l(t) - a(t)\, h^2(t) \int\limits_0^1 (1 - y_2)(w_1(1, y_2, t) \\ & - w_1(0, y_2, t))\, dy_2 + a(t)\, l^2(t) \int\limits_0^1 (w_2(y_1, 0, t) - \mu_4(y_1 l(t), t) \\ & + \mu_3(y_1 l(t), t))\, dy_1 - l^2(t)\, h^2(t) \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (1 - y_2) f(y_1 l(t), y_2 h(t), t)\, dy_1\, dy_2 \Bigg) \\ & \times \left(l(t)\, h^2(t) \int\limits_0^1 (1 - y_2)\mu_2(y_2 h(t), t)\, dy_2 \right)^{-1}, \qquad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} g(t) = {} & \mu_5'(t)\, l(t)\, h(t) \\ & - a(t)\, h^2(t) \int\limits_0^1 (w_1(1, y_2, t) - w_1(0, y_2, t))\, dy_2 \\ & - a(t) l^2(t) \int\limits_0^1 (w_2(y_1, 1, t) - w_2(y_1, 0, t))\, dy_1 \\ & - l^2(t)\, h^2(t) \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(y_1 l(t), y_2 h(t), t) dy_1\, dy_2 \\ & - \frac{\int_0^1 \mu_2(y_2 h(t), t)\, dy_2}{\int_0^1 (1 - y_2)\mu_2(y_2 h(t), t)\, dy_2} \Big(\mu_5'(t)\, l(t)\, h(t) - \mu_6'(t) l(t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- a(t)h^2(t)\int\limits_0^1 (w_1(1,y_2,t)-w_1(0,y_2,t))\,dy_2\\
&+ a(t)l^2(t)\int\limits_0^1 (w_2(y_1,0,t)-\mu_4(y_1l(t),t)+\mu_3(y_1l(t),t))\,dy_1\\
&- l^2(t)h^2(t)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (1-y_2)f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,dy_1\,dy_2\Bigg)\\
&\times\left(h(t)\,l^2(t)\int\limits_0^1 \mu_4(y_1l(t),t)\,dy_1\right)^{-1}, \qquad t\in[0,T]. \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

Систему рівнянь (2.3), (2.4), (2.37)–(2.39), (2.16), (2.17) подамо у вигляді рівняння

$$\nu = P\nu,$$

де $\nu = (h(t), l(t), a(t), p(t), g(t), v(y_1,y_2,t), w_i(y_1,y_2,t),\ i=1,2)$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (2.3), (2.4), (2.37)–(2.39), (2.16), (2.17). Визначимо число t_0, $0 < t_0 \le T$, і множину $\mathcal{N}$ з простору $(C[0,t_0])^5 \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^3$ так, щоб оператор P переводив цю множину в себе.

Виходячи з рівняння (2.16), оцінимо $v(y_1,y_2,t)$. Для цього спочатку зауважимо, що за принципом максимуму для функції $v_0(y_1,y_2,t)$, яка є розв'язком задачі (2.8) (1.8), (1.9), справджується оцінка

$$0 < M_0 \le v_0(y_1,y_2,t) \le M_1 < \infty, \qquad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (2.40)$$

З іншого боку, існує таке число $t_4, 0 < t_4 \le T$, що в області $\overline{Q}_{t_4}$ правильною буде така нерівність:

$$
\begin{aligned}
&\Bigg|\int\limits_0^t\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\Bigg(\frac{\xi_1 p(\tau)}{l(\tau)}w_1(\xi_1,\xi_2,\tau)\\
&\qquad + \frac{\xi_2 g(\tau)}{h(\tau)}w_2(\xi_1,\xi_2,\tau)\Bigg)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau\Bigg| \le \frac{M_0}{2}. \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

Тоді

$$\frac{M_0}{2} \le v(y_1,y_2,t) \le M_1 + \frac{M_0}{2}, \quad (y_1,y_2,t)\in\overline{Q}_{t_4}. \qquad (2.42)$$

Використовуючи оцінки (2.42), з рівнянь (2.3), (2.4) знаходимо

$$
\begin{aligned}
&h(t) \geq \frac{\min_{[0,T]} \mu_6(t)}{\max_{[0,T]} \mu_5(t)} \equiv H_1 > 0, \qquad t \in [0,T],\\
&h(t) \leq \frac{\left(M_1 + \frac{M_0}{2}\right) \max_{[0,T]} \mu_6(t)}{\frac{M_0}{4} \min_{[0,T]} \mu_5(t)} \equiv H_3, \qquad t \in [0,t_4],\\
&l(t) \leq \frac{\max\limits_{[0,T]} \mu_5^2(t)}{\dfrac{M_0}{2} \min\limits_{[0,T]} \mu_6(t)} \equiv L_3, \qquad t \in [0,t_4],\\
&l(t) \geq \frac{\frac{M_0}{4} \min_{[0,T]} \mu_5^2(t)}{\left(M_1 + \frac{M_0}{2}\right)^2 \max_{[0,T]} \mu_6(t)} \equiv L_4 > 0, \qquad t \in [0,t_4].
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

З рівняння (2.37) за допомогою оцінок (2.22), (2.36) встановлюємо

$$
a(t) \leq \frac{2L_3 \max_{[0,T]} \mu_7(t)}{M_2} \equiv A_3, \qquad a(t) \geq \frac{L_4 \min_{[0,T]} \mu_7(t)}{M_3} \equiv A_4, \qquad t \in [0,t_5], \tag{2.44}
$$

де $t_5 = \min\{t_1, t_3, t_4\}$. Враховуючи (2.36), (2.43), (2.44), з рівнянь (2.38), (2.39) отримуємо

$$
\begin{aligned}
|p(t)| &\leq C_{15} + C_{16} W(t) \leq C_{15} + C_{16} M_3 \equiv M_5,\\
|g(t)| &\leq C_{17} + C_{18} W(t) \leq C_{17} + C_{18} M_3 \equiv M_6,
\end{aligned}
\qquad t \in [0,t_5]. \tag{2.45}
$$

Встановлені оцінки використаємо для визначення числа t_6, $0 < t_6 \leq T$, такого, щоб з (2.24) випливала оцінка

$$
W(t) \leq C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{A_4}} (L_3 + H_3)(1 + M_5 + M_6) M_3 \sqrt{t_6} \leq M_3. \tag{2.46}
$$

Аналогічно визначимо значення величин t_1, t_4, при яких будуть задовольнятись нерівності (2.41) та (2.22). Покладемо $t_0 = \min\{t_5, t_6\}$ і визначимо множину $\mathcal{N} \equiv \{(h(t),\ l(t),\ a(t),\ p(t),\ g(t),\ v(y_1,y_2,t),$ $w_i(y_1,y_2,t),\ i=1,2) \in (C[0,t_0])^5 \times (C(\overline{Q}_{t_0}))^3 : A_4 \leq a(t) \leq A_3,\ L_4 \leq l(t) \leq L_3,\ H_1 \leq h(t) \leq H_3,\ |p(t)| \leq M_5, |g(t)| \leq M_6,\ \frac{M_0}{2} \leq v(y_1,y_2,t) \leq M_1 + \frac{M_0}{2},\ \frac{M_2}{2} \leq w_1(y_1,y_2,t) \leq M_3, |w_2(y_1,y_2,t)| \leq M_3\}$. З побудови множини $\mathcal{N}$ випливає, що оператор P відображає її в себе. Щоб встановити, що оператор P є цілком неперервним, достатньо використати доведену в [7] компактність інтегральних операторів, що входять до рівнянь (2.16), (2.17). Для дослідження компактності операторів, що визначаються рівняннями (2.3), (2.4), (2.13)–(2.15), достатньо підставити в них інтегральні зображення функцій $v, w_i,\ i = 1, 2, l, h$. Отже, оператор P цілком неперервний на множині $\mathcal{N}$. За теоремою Шаудера розв'язок системи рівнянь (2.3), (2.4), (2.13)–(2.17) існує, а отже, існує і розв'язок задачі (1.7)–(1.12). $\square$

3. Єдиність розв'язку задачі (1.7)–(1.12)

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < \varphi_0 \le \varphi(x_1, x_2) \le \varphi_1 < \infty;\ \mu_5(0) \ne 0,\ \mu_6(0) \ne 0,\ \mu_7(t) \ne 0,$ $t \in [0, T];\ \mu_2(x_2, t) \ne 0,\ (x_2, t) \in [0, \infty) \times [0, T];\ \mu_4(x_1, t) \ne 0,$ $(x_1, t) \in [0, \infty) \times [0, T];$

2) $f \in C^{1,0}([0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, T])\ \mu_{i\,t\,x_2} \in C([0, \infty) \times [0, T]),\ i = 1, 2,$ $\mu_{ktx_1} \in C([0, \infty) \times [0, T]),\ k = 3, 4.$

Тоді розв'язок задачі (1.7)–(1.12) *единий.*

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки $(a_i(t), l_i(t), h_i(t),$ $v_i(y_1, y_2, t)),\ i = 1, 2$ задачі (1.7)–(1.12). Внаслідок виконання умов теореми маємо $l_1(0) = l_2(0),\ h_1(0) = h_2(0)$. Введемо позначення: $\frac{a_i(t)}{l_i^2(t)} \equiv \widetilde{a_{1i}}(t),\ \frac{a_i(t)}{h_i^2(t)} \equiv \widetilde{a_{2i}}(t),\ \frac{l_i'(t)}{l_i(t)} \equiv q_{1i}(t),\ \frac{h_i'(t)}{h_i(t)} \equiv q_{2i}(t)$. Тоді функції $b_1(t) \equiv \widetilde{a_{12}}(t) - \widetilde{a_{11}}(t),\ b_2(t) \equiv \widetilde{a_{22}}(t) - \widetilde{a_{21}}(t),\ q_1(t) \equiv q_{12}(t) - q_{11}(t), q_2(t) \equiv q_{22}(t) - q_{21}(t),\ v(y_1, y_2, t) \equiv v_2(y_1, y_2, t) - v_1(y_1, y_2, t)$ є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} v_t = \widetilde{a_{11}}(t) v_{y_1 y_1} &+ \widetilde{a_{21}}(t) v_{y_2 y_2} + y_1 q_{11}(t) v_{y_1} + y_2 q_{21}(t) v_{y_2} \\ &+ b_1(t) v_{2 y_1 y_1} + b_2(t) v_{2 y_2 y_2} + y_1 q_1(t) v_{2 y_1} + y_2 q_2(t) v_{2 y_2} \\ &\quad + f(y_1 l_2(t), y_2 h_2(t), t) - f(y_1 l_1(t), y_2 h_1(t), t), \\ &\qquad (y_1, y_2, t) \in Q_T, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$v(y_1, y_2, 0) = 0, \qquad (y_1, y_2) \in [0, 1] \times [0, 1], \tag{3.2}$$

$$\left. \begin{aligned} v(0, y_2, t) &= \mu_1(y_2 h_2(t), t) - \mu_1(y_2 h_1(t), t), \\ v(1, y_2, t) &= \mu_2(y_2 h_2(t), t) - \mu_2(y_2 h_1(t), t), \end{aligned} \right. \quad (y_2, t) \in [0, 1] \times [0, T], \tag{3.3}$$

$$\left. \begin{aligned} v(y_1, 0, t) &= \mu_3(y_1 l_2(t), t) - \mu_3(y_1 l_1(t), t), \\ v(y_1, 1, t) &= \mu_4(y_1 l_2(t), t) - \mu_4(y_1 l_1(t), t), \end{aligned} \right. \quad (y_1, t) \in [0, 1] \times [0, T], \tag{3.4}$$

$$\int_0^1\int_0^1 v(y_1,y_2,t)\,dy_2\,dy_1 = \mu_5(t)\Big(\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}-\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}\Big),$$
$$t\in[0,T], \quad (3.5)$$

$$\int_0^1\int_0^1 y_2 v(y_1,y_2,t)\,dy_2\,dy_1 = \mu_6(t)\Big(\frac{1}{l_2(t)h_2^2(t)}-\frac{1}{l_1(t)h_1^2(t)}\Big),$$
$$t\in[0,T], \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} b_1(t)v_{2y_1}\left(0,x_0h_2^{-1}(t),t\right) &= -\widetilde{a_{11}}(t)v_{y_1}\left(0,x_0h_2^{-1}(t),t\right)\\ &- \widetilde{a_{11}}(t)\left(v_{1y_1}\left(0,x_0h_2^{-1}(t),t\right)-v_{1y_1}\left(0,x_0h_1^{-1}(t),t\right)\right)\\ &+\mu_7(t)\Big(\frac{1}{l_2(t)}-\frac{1}{l_1(t)}\Big), \qquad t\in[0,T]. \quad (3.7)\end{aligned}$$

Задача (3.1)–(3.4) зводиться до системи рівнянь

$$\begin{aligned} v(y_1,y_2,t) &= \int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}_{11\xi_1}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\big(\mu_1(\xi_2h_2(\tau),\tau)\\ &\qquad -\mu_1(\xi_2h_1(\tau),\tau)\big)\widetilde{a_{11}}(\tau)d\xi_2 d\tau\\ &-\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}_{11\xi_1}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\big(\mu_2(\xi_2h_2(\tau),\tau)\\ &\qquad -\mu_2(\xi_2h_1(\tau),\tau)\big)\widetilde{a_{11}}(\tau)\,d\xi_2\,d\tau\\ &+\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}_{11\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\big(\mu_3(\xi_1l_2(\tau),\tau)\\ &\qquad -\mu_3(\xi_1l_1(\tau),\tau)\big)\widetilde{a_{21}}(\tau)\,d\xi_1\,d\tau\\ &-\int_0^t\int_0^1 \widetilde{G}_{11\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\big(\mu_4(\xi_1l_2(\tau),\tau)\\ &\qquad -\mu_4(\xi_1l_1(\tau),\tau)\big)\widetilde{a_{21}}(\tau)\,d\xi_1\,d\tau\\ &+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 \widetilde{G}_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\big(b_1(\tau)v_{2\xi_1\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\tau)\\ &+b_2(\tau)v_{2\xi_2\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\tau)+\xi_1q_1(\tau)v_{2\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\tau)+\xi_2q_2(\tau)v_{2\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\tau)\end{aligned}$$

$$+ f(\xi_1 l_2(\tau), \xi_2 h_2(\tau), \tau) - f(\xi_1 l_1(\tau), \xi_2 h_1(\tau), \tau)$$
$$+ \xi_1 q_{11}(\tau) w_1(\xi_1, \xi_2, \tau) + \xi_2 q_{21}(\tau) w_2(\xi_1, \xi_2, \tau)\big)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau, \quad (3.8)$$

$$w_1(y_1, y_2, t) = -\int_0^t \int_0^1 \widetilde{G}_{21}(y_1, y_2, t, 0, \xi_2, \tau)$$
$$\times \big(\xi_2 \big(h_2'(\tau)\mu_{1\eta}(\eta, \tau)\big|_{\eta=\xi_2 h_2(\tau)} - h_1'(\tau)\mu_{1\zeta}(\zeta, \tau)\big|_{\zeta=\xi_2 h_1(\tau)}\big)$$
$$- \widetilde{a_{11}}(\tau)\big(\mu_{1\eta\eta}(\eta, \tau)\big|_{\eta=\xi_2 h_2(\tau)} - \mu_{1\zeta\zeta}(\zeta, \tau)\big|_{\zeta=\xi_2 h_1(\tau)}\big)$$
$$+ \mu_{1\tau}(\xi_2 h_2(\tau), \tau) - \mu_{1\tau}(\xi_2 h_1(\tau), \tau)\big) d\xi_2\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 \widetilde{G}_{21}(y_1, y_2, t, 1, \xi_2, \tau)$$
$$\times \big(\xi_2 \big(h_2'(\tau)\mu_{2\eta}(\eta, \tau)\big|_{\eta=\xi_2 h_2(\tau)} - h_1'(\tau)\mu_{2\zeta}(\zeta, \tau)\big|_{\zeta=\xi_2 h_1(\tau)}\big)$$
$$- \widetilde{a_{11}}(\tau)\big(\mu_{2\eta\eta}(\eta, \tau)\big|_{\eta=\xi_2 h_2(\tau)} - \mu_{2\zeta\zeta}(\zeta, \tau)\big|_{\zeta=\xi_2 h_1(\tau)}\big)$$
$$+ \mu_{2\tau}(\xi_2 h_2(\tau), \tau) - \mu_{2\tau}(\xi_2 h_1(\tau), \tau)\big)\, d\xi_2\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 \widetilde{G}_{21\xi_2}(y_1, y_2, t, \xi_1, 0, \tau)\widetilde{a_{21}}(\tau)$$
$$\times \big(l_2(\tau)\mu_{3\eta}(\eta, \tau)\big|_{\eta=\xi_1 l_2(\tau)} - l_1(\tau)\mu_{3\zeta}(\zeta, \tau)\big|_{\zeta=\xi_1 l_1(\tau)}\big)\, d\xi_1\, d\tau$$
$$- \int_0^t \int_0^1 \widetilde{G}_{21\xi_2}(y_1, y_2, t, \xi_1, 1, \tau)\widetilde{a_{21}}(\tau)$$
$$\times \big(l_2(\tau)\mu_{4\eta}(\eta, \tau)\big|_{\eta=\xi_1 l_2(\tau)} - l_1(\tau)\mu_{4\zeta}(\zeta, \tau)\big|_{\zeta=\xi_1 l_1(\tau)}\big)\, d\xi_1\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \widetilde{G}_{11y_1}(y_1, y_2, t, \xi_1, \xi_2, \tau)$$
$$\times \Big(\xi_1 q_1(\tau) v_{2\xi_1}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \xi_2 q_2(\tau) v_{2\xi_2}(\xi_1, \xi_2, \tau)$$
$$+ b_1(\tau)\Big(v_{2\xi_1\xi_1} + \frac{l_2^2(\tau)}{h_2^2(\tau)} v_{2\xi_2\xi_2}\Big) + \widetilde{a_{11}}(\tau)\Big(\frac{l_2^2(\tau)}{h_2^2(\tau)} - \frac{l_1^2(\tau)}{h_1^2(\tau)}\Big) v_{2\xi_2\xi_2}$$
$$+ f(\xi_1 l_2(\tau), \xi_2 h_2(\tau), \tau) - f(\xi_1 l_1(\tau), \xi_2 h_1(\tau), \tau)$$
$$+ \xi_1 q_{11}(\tau) w_1(\xi_1, \xi_2, \tau) + \xi_2 q_{21}(\tau) w_2(\xi_1, \xi_2, \tau)\Big)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau, \quad (3.9)$$

$$w_2(y_1, y_2, t) = -\int_0^t \int_0^1 \widetilde{G}_{12}(y_1, y_2, t, \xi_1, 0, \tau)$$

$$\times \big(\xi_1\big(l_2'(\tau)\mu_{3\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_1 l_2(\tau)} - l_1'(\tau)\mu_{3\zeta}(\zeta,\tau)\big|_{\zeta=\xi_1 l_1(\tau)}\big)$$
$$- \widetilde{a_{21}}(\tau)\big(\mu_{3\eta\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_1 l_2(\tau)} - \mu_{3\zeta\zeta}(\zeta,\tau)\big|_{\zeta=\xi_1 l_1(\tau)}\big)$$
$$+ \mu_{3\tau}(\xi_1 l_2(\tau),\tau) - \mu_{3\tau}(\xi_1 l_1(\tau),\tau)\big)\, d\xi_1\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 \widetilde{G}_{12}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)$$
$$\times \big(\xi_1\big(l_2'(\tau)\mu_{4\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_1 l_2(\tau)} - l_1'(\tau)\mu_{4\zeta}(\zeta,\tau)\big|_{\zeta=\xi_1 l_1(\tau)}\big)$$
$$- \widetilde{a_{21}}(\tau)\big(\mu_{4\eta\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_1 l_2(\tau)} - \mu_{4\zeta\zeta}(\zeta,\tau)\big|_{\zeta=\xi_1 l_1(\tau)}\big)$$
$$+ \mu_{4\tau}(\xi_1 l_2(\tau),\tau) - \mu_{4\tau}(\xi_1 l_1(\tau),\tau)\big)\, d\xi_1\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 \widetilde{G}_{12\xi_1}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\widetilde{a_{11}}(\tau)$$
$$\times \big(h_2(\tau)\mu_{1\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_2 h_2(\tau)} - h_1(\tau)\mu_{1\zeta}(\zeta,\tau)\big|_{\zeta=\xi_2 h_1(\tau)}\big)\, d\xi_2\, d\tau$$
$$- \int_0^t \int_0^1 \widetilde{G}_{11\xi_1}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\widetilde{a_{11}}(\tau)$$
$$\times \big(h_2(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_2 h_2(\tau)} - h_1(\tau)\mu_{2\zeta}(\zeta,\tau)\big|_{\zeta=\xi_2 h_1(\tau)}\big)\, d\xi_2\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \widetilde{G}_{11y_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)$$
$$\times \Big(\xi_1 q_1(\tau) v_{2\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\tau) + \xi_2 q_2(\tau) v_{2\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\tau)$$
$$+ b_1(\tau)\Big(v_{2\xi_1\xi_1} + \frac{l_2^2(\tau)}{h_2^2(\tau)} v_{2\xi_2\xi_2}\Big) + \widetilde{a_{11}}(\tau)\Big(\frac{l_2^2(\tau)}{h_2^2(\tau)} - \frac{l_1^2(\tau)}{h_1^2(\tau)}\Big) v_{2\xi_2\xi_2}$$
$$+ f(\xi_1 l_2(\tau),\xi_2 h_2(\tau),\tau) - f(\xi_1 l_1(\tau),\xi_2 h_1(\tau),\tau)$$
$$+ \xi_1 q_{11}(\tau) w_1(\xi_1,\xi_2,\tau) + \xi_2 q_{21}(\tau) w_2(\xi_1,\xi_2,\tau)\Big)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau, \quad (3.10)$$

де $w_i(y_1,y_2,t) \equiv v_{y_i}(y_1,y_2,t),\ i=1,2,\ \widetilde{G}_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)$ — функція Гріна першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \widetilde{a_{11}}(t) v_{y_1 y_1} + \widetilde{a_{21}}(t) v_{y_2 y_2}.$$

З рівнянь (2.11), (2.12) знаходимо

$$q_1(t) \int_0^1 (1-y_2)\mu_2(y_2 h_2(t),t)\, dy_2$$

$$+ b_1(t)\int_0^1(1-y_2)(v_{2y_1}(1,y_2,t)-v_{2y_1}(0,y_2,t))\,dy_2$$

$$= -\widetilde{a_{11}}(t)\int_0^1(1-y_2)(v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t))\,dy_2$$

$$-\widetilde{a_{21}}(t)\int_0^1 v_{y_2}(y_1,0,t)\,dy_1$$

$$+ b_2(t)\int_0^1(v_{2y_2}(y_1,0,t)-\mu_4(y_1l_2(t),t)+\mu_3(y_1l_2(t),t))\,dy_1$$

$$- q_{11}(t)\int_0^1(1-y_2)(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_2(y_2h_1(t),t))\,dy_2$$

$$+ \mu_5'(t)\Big(\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}-\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}\Big)-\mu_6'(t)\Big(\frac{1}{l_2(t)h_2^2(t)}-\frac{1}{l_1(t)h_1^2(t)}\Big)$$

$$+\widetilde{a_{21}}(t)\int_0^1(\mu_3(y_1l_2(t),t)-\mu_3(y_1l_1(t),t)+\mu_4(y_1l_1(t),t)-\mu_4(y_1l_2(t),t))\,dy_1$$

$$-\int_0^1\int_0^1(1-y_2)(f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t)-f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t))\,dy_1\,dy_2, \tag{3.11}$$

$$q_1(t)\int_0^1\mu_2(y_2h_2(t),t)dy_2+q_2(t)\int_0^1\mu_4(y_1l_2(t),t)dy_1$$

$$+ b_1(t)\int_0^1(v_{2y_1}(1,y_2,t)-v_{2y_1}(0,y_2,t))\,dy_2$$

$$= -\widetilde{a_{11}}(t)\int_0^1(v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t))\,dy_2$$

$$-\widetilde{a_{21}}(t)\int_0^1(v_{y_2}(y_1,1,t)-v_{y_2}(y_1,0,t))\,dy_1$$

$$- q_{11}(t)\int_0^1(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_2(y_2h_1(t),t))\,dy_2$$

$$
\begin{aligned}
&- q_{21}(t)\int\limits_0^1 (\mu_4(y_1 l_2(t),t) - \mu_4(y_1 l_1(t),t))\,dy_1\\
&- b_2(t)\int\limits_0^1 (v_{2y_2}(y_1,1,t) - v_{2y_2}(y_1,0,t))\,dy_1\\
&+ \mu_5'(t)\Big(\frac{1}{l_2(t)h_2(t)} - \frac{1}{l_1(t)h_1(t)}\Big)\\
&- \int\limits_0^1\int\limits_0^1 (f(y_1 l_2(t), y_2 h_2(t), t) - f(y_1 l_1(t), y_2 h_1(t), t))\,dy_1\,dy_2. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Виключимо з отриманих рівнянь $b_2(t)$. Виходячи з введених позначень, маємо

$$
\begin{aligned}
b_2(t) &= \frac{a_2(t)}{h_2^2(t)} - \frac{a_1(t)}{h_1^2(t)} = \widetilde{a_{12}}(t)\frac{l_2^2(t)}{h_2^2(t)} - \widetilde{a_{11}}(t)\frac{l_1^2(t)}{h_1^2(t)}\\
&= b_1(t)\frac{l_2^2(t)}{h_2^2(t)} + \widetilde{a_{11}}(t)\left(\frac{l_2^2(t)}{h_2^2(t)} - \frac{l_1^2(t)}{h_1^2(t)}\right), \qquad t\in[0,T]. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Підставляючи співвідношення (3.13) у (3.11) та (3.12), отримаємо

$$
\begin{aligned}
&q_1(t)\int\limits_0^1 (1-y_2)\mu_2(y_2 h_2(t),t)\,dy_2\\
&- b_1(t)\left(\frac{l_2^2(t)}{h_2^2(t)}\int\limits_0^1 (v_{2y_2}(y_1,0,t) - \mu_4(y_1 l_2(t),t) + \mu_3(y_1 l_2(t),t))\,dy_1\right.\\
&\left.\qquad - \int\limits_0^1 (1-y_2)(v_{2y_1}(1,y_2,t) - v_{2y_1}(0,y_2,t))\,dy_2\right)\\
&= -\widetilde{a_{11}}(t)\int\limits_0^1 (1-y_2)(v_{y_1}(1,y_2,t) - v_{y_1}(0,y_2,t))\,dy_2\\
&- \widetilde{a_{21}}(t)\int\limits_0^1 v_{y_2}(y_1,0,t)\,dy_1 + \widetilde{a_{11}}(t)\left(\frac{l_2^2(t)}{h_2^2(t)} - \frac{l_1^2(t)}{h_1^2(t)}\right)\\
&\times\int\limits_0^1 (v_{2y_2}(y_1,0,t) - \mu_4(y_1 l_2(t),t) + \mu_3(y_1 l_2(t),t))\,dy_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- q_{11}(t)\int_0^1 (1-y_2)(\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_2(y_2h_1(t),t))\,dy_2\\
&+ \mu_5'(t)\left(\frac{1}{l_2(t)h_2(t)}-\frac{1}{l_1(t)h_1(t)}\right)-\mu_6'(t)\left(\frac{1}{l_2(t)h_2^2(t)}-\frac{1}{l_1(t)h_1^2(t)}\right)\\
&-\int_0^1\int_0^1 (1-y_2)(f(y_1l_2(t),y_2h_2(t),t)-f(y_1l_1(t),y_2h_1(t),t))\,dy_1\,dy_2\\
&+ \widetilde{a_{21}}(t)\int_0^1 (\mu_3(y_1l_2(t),t)-\mu_3(y_1l_1(t),t)+\mu_4(y_1l_1(t),t)\\
&- \mu_4(y_1l_2(t),t)\,dy_1, \qquad t\in[0,T], \quad (3.14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&q_1(t)\int_0^1 \mu_2(y_2h_2(t),t)\,dy_2 + q_2(t)\int_0^1 \mu_4(y_1l_2(t),t)\,dy_1\\
&+ b_1(t)\Bigg(\frac{l_2^2(t)}{h_2^2(t)}\int_0^1 (v_{2y_2}(y_1,1,t)-v_{2y_2}(y_1,0,t))\,dy_1\\
&+\int_0^1 (v_{2y_1}(1,y_2,t)-v_{2y_1}(0,y_2,t))\,dy_2\Bigg)\\
&= -\widetilde{a_{11}}(t)\int_0^1 (v_{y_1}(1,y_2,t)-v_{y_1}(0,y_2,t))\,dy_2\\
&- \widetilde{a_{21}}(t)\int_0^1 (v_{y_2}(y_1,1,t)-v_{y_2}(y_1,0,t))\,dy_1\\
&- \widetilde{a_{11}}(t)\left(\frac{l_2^2(t)}{h_2^2(t)}-\frac{l_1^2(t)}{h_1^2(t)}\right)\int_0^1 (v_{2y_2}(y_1,1,t)-v_{2y_2}(y_1,0,t))\,dy_1\\
&- q_{11}(t)\int_0^1 (\mu_2(y_2h_2(t),t)-\mu_2(y_2h_1(t),t))\,dy_2\\
&- q_{21}(t)\int_0^1 (\mu_4(y_1l_2(t),t)-\mu_4(y_1l_1(t),t))\,dy_1
\end{aligned}
$$

$$
+ \mu_5'(t)\left(\frac{1}{l_2(t)h_2(t)} - \frac{1}{l_1(t)h_1(t)}\right) - \int_0^1\int_0^1 (f(y_1 l_2(t), y_2 h_2(t), t) \\
- f(y_1 l_1(t), y_2 h_1(t), t))\, dy_1\, dy_2, \qquad t \in [0,T]. \quad (3.15)
$$

Виразимо $l_i(t)$, $h_i(t)$ через $q_1(t)$ та $q_2(t)$:

$$
l_i(t) = l_0 \exp\int_0^t q_{1i}(\tau)\, d\tau, \quad h_i(t) = h_0 \exp\int_0^t q_{2i}(\tau)\, d\tau, \qquad i = 1, 2.
$$

Тоді

$$
h_2(t) - h_1(t) = h_0 \int_0^t q_2(\tau)\, d\tau \int_0^1 \exp\left(\int_0^t (q_{21}(\tau) + \sigma q_2(\tau))\, d\tau\right) d\sigma,
$$

$$
l_2(t) - l_1(t) = l_0 \int_0^t q_1(\tau)\, d\tau \int_0^1 \exp\left(\int_0^t (q_{11}(\tau) + \sigma q_1(\tau))\, d\tau\right) d\sigma,
$$

$$
\frac{1}{l_2(t)} - \frac{1}{l_1(t)} = -\frac{1}{l_0} \int_0^t q_1(\tau)\, d\tau \int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (q_{11}(\tau) + \sigma q_1(\tau))\, d\tau\right) d\sigma,
$$

$$
\frac{1}{l_2(t)\, h_2(t)} - \frac{1}{l_1(t)\, h_1(t)} = -\frac{1}{l_0\, h_0} \int_0^t (q_1(\tau) + q_2(\tau))\, d\tau \\
\times \int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (q_{11}(\tau) + q_{21}(\tau) + \sigma(q_1(\tau) + q_2(\tau)))\, d\tau\right) d\sigma,
$$

$$
\frac{1}{l_2(t)\, h_2^2(t)} - \frac{1}{l_1(t)\, h_1^2(t)} = -\frac{1}{l_0\, h_0^2} \int_0^t (q_1(\tau) + 2q_2(\tau))\, d\tau \\
\times \int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (q_{11}(\tau) + 2q_{21}(\tau) + \sigma(q_1(\tau) + 2q_2(\tau)))\, d\tau\right) d\sigma.
$$

Перетворимо за допомогою формули Лагранжа різницю

$$
\mu_1(y_2 h_2(t), t) - \mu_1(y_2 h_1(t), t) = y_2(h_2(t) - h_1(t)) \\
\times \int_0^1 \mu_{1x}(y_2(h_1(t) + \sigma(h_2(t) - h_1(t))), t)\, d\sigma.
$$

Використовуючи подібні перетворення для зображення інших різниць, які входять до системи рівнянь (3.7)–(3.10), (3.14), (3.15), легко переконатись у тому, що ця система є однорідною системою інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих ($b_1(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, $v(y_1, y_2, t)$, $w_i(y_1, y_2, t)$, $i = 1, 2$) з інтегровними ядрами. Внаслідок єдиності розв'язку таких систем випливає, що вона має тільки тривіальний розв'язок. Звідси отримуємо єдиність розв'язку задачі (1.7)–(1.12). □

Література

[1] L. Lorenzi, *An identification problem for a one-phase Stefan problem* // J. Inv. Ill-Posed Problems, **9** (2001), N 6, 1–27.

[2] М. І. Іванчов, *Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності* // Укр. мат. журн., **55** (2003), N 7, 901–910.

[3] І. Є. Баранська, *Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею* // Мат. методи та фіз.-мех. поля, **48** (2005), N 2, 32–42.

[4] М. І. Іванчов, *Задача з вільною межею для рівняння дифузії в прямокутнику* // Мат. методи та фіз.-мех. поля, **45** (2002), N 4, 67–75.

[5] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, В. А. Солонников, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 1967.

[6] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, М.: Мир, 1968.

[7] M. Ivanchov, *Inverse problems for equations of parabolic type*, Lviv: VNTL Publishers, 2003.

Відомості про авторів

Ірина Є. Баранська, Микола Іванович Іванчов

Львівський національний університет імені І. Франка
вул. Університетська 1,
Львів, 79000
Україна
E-Mail: ivanchov@franko.lviv.ua