Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 3, 421 – 433

Точные константы в неравенствах для промежуточных производных

Антон А. Лунёв

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Найдены точные константы в неравенствах типа Колмогорова для промежуточных производных, используя теорему Ф. Рисса.

2000 MSC. 26D10.

Ключевые слова и фразы. Соболевское пространство, линейный функционал, дифференциальное уравнение, матрица типа Вандермонда, обратная матрица, элементарный симметрический многочлен.

1. Введение

Будем рассматривать соболевское пространство $W_2^n(\mathbb{R}_+)$, $n \in \mathbb{N}$, состоящее из всех (комплекснозначных) функций $f(x)$, определенных на положительной полуоси $x \geq 0$, имеющих абсолютно непрерывную на любом отрезке $[0, b]$, $b > 0$, производную $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n-1$ и обладающих конечной нормой

$$\|f\| = \|f\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+)} := \left(\int_0^{+\infty} \Big(|f(x)|^2 + |f^{(n)}(x)|^2 \Big) \, dx \right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Нашей целью является вычисление точных, т.е. наименьших возможных, констант в неравенствах типа Колмогорова

$$|f^{(k)}(0)| \leq A_{n,k} \|f\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+)}, \qquad k \in \{0, \dots, n-1\}. \tag{1.2}$$

Известные результаты о константах в неравенствах для промежуточных производных в различных случаях содержатся, например, в

Статья поступила в редакцию 26.03.2007

ISSN 1810 – 3200.

монографии [10, §2.4]. Так, для пространства $W_2^n(\mathbb{R})$ точные константы в подобных неравенствах нашел Л. В. Тайков [9] (см. также [10, п. 2.4.4]). Именно он получил простую явную формулу:

$$A_{n,k}^* = \left(2n \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)^{-1/2},$$

где $A_{n,k}^*$ — наименьшая константа в неравенствах

$$|f^{(k)}(0)| \le A_{n,k}^* \|f\|_{W_2^n(\mathbb{R})}.$$

Случай полуоси оказался значительно труднее для исследования. В частности, В. Н. Габушин [1] (см. также [10, п. 2.4.5]) нашел функции (в виде линейных комбинаций убывающих экспонент), экстремальные для неравенств (1.2). Однако неявно определяемые этим результатом числа $A_{n,k}$ не были вычислены эффективно.

Г. А. Калябин исследовал эту задачу в работах [2, 3]. В недавней работе [4] он полностью решил проблему и нашел явные формулы для констант $A_{n,k}$. Именно, он доказал следующий результат.

Теорема 1.1 ([4]). *Для каждого $k \in \{0 \dots, n-1\}$ наименьшая константа $A_{n,k}$ в* (1.2) *дается формулой*

$$A_{n,k} = \left(\sin \frac{\pi(2k+1)}{2n}\right)^{-1/2} \prod_{s=1}^{k} \operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2n}. \tag{1.3}$$

Формулы (1.3) позволяют исследовать многие свойства констант $A_{n,k}$. Например, из них очевидно следует симметричность: $A_{n,k} = A_{n,n-1-k}$ и общие свойства констант при фиксированном n: они ведут себя так же регулярно, как биномиальные коэффициенты C_n^k, которые монотонно возрастают по k при $k < n/2$ (см. [4]). Отметим также некоторые асимптотические формулы для этих констант, полученные в [4]:

$$A_{n,k} \approx \frac{e^{nK(\alpha)}}{2\sqrt{n \sin(\pi\alpha)}}, \quad \text{при} \quad k \to \infty, \quad (n-k) \to \infty,$$

где $\alpha = \frac{2k+1}{2n}$ и $K(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi\alpha/2} \ln(\operatorname{ctg} x) dx$. Из них, в частности следует, что $\max_k A_{n,k} \approx e^{nK_0}/2\sqrt{n}$, где $K_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \ln(\operatorname{ctg} x) dx$.

В настоящей работе мы предлагаем элементарное доказательство теоремы 1.1, базирующееся на другой идее. Именно, наше доказательство существенно опирается на теорему Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве. Мы вычисляем норму функционала L_k $\big(L_k(f) = f^{(k)}(0)\big)$, реализуя его в виде

$L_k(f) = (f, g_k)$, $g_k \in W_2^n(\mathbb{R}_+)$ и вычисляя норму $\|g_k\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+)}$ элемента g_k. Более того, теорема Рисса позволяет заменить квадрат нормы этого элемента значением функционала на нём, то есть вместо интеграла в (1.1) вычислять k-тую производную в нуле $g_k^{(k)}(0)$.

2. Доказательство теоремы 1.1

Рассмотрим в $W_2^n(\mathbb{R}_+)$ линейный функционал $L_k(f) := f^{(k)}(0)$. Тогда искомая константа $A_{n,k}$ является, очевидно, нормой этого функционала. Как известно, $W_2^n(\mathbb{R}_+)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = (f, g)_{W_2^n(\mathbb{R}_+)} := \int\limits_0^{+\infty} \Big(f(x)\overline{g(x)} + f^{(n)}(x)\overline{g^{(n)}(x)} \Big)\, dx. \tag{2.1}$$

По теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция $g_k \in W_2^n(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$L_k(f) = (f, g_k), \qquad f \in W_2^n(\mathbb{R}_+), \tag{2.2}$$

при этом, $\|L_k\| = \|g_k\|$. Используя равенство (2.2), получим

$$A_{n,k}^2 = \|L_k\|^2 = \|g_k\|^2 = (g_k, g_k) = L_k(g_k) = g_k^{(k)}(0). \tag{2.3}$$

2.1. Реализация функционала $L_k(f)$

Найдем функцию $g(x) = g_k(x)$, реализующую функционал $L_k(f)$ по формуле (2.2). Согласно (2.2), учитывая определение $L_k(f)$ и равенство (2.1), получим:

$$f^{(k)}(0) = \int\limits_0^{+\infty} \Big(f(x)\overline{g(x)} + f^{(n)}(x)\overline{g^{(n)}(x)} \Big)\, dx$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} \Big(f(x)h(x) + f^{(n)}(x)h^{(n)}(x) \Big)\, dx, \tag{2.4}$$

где $h(x) = \overline{g(x)}$. Предположим вначале, что $h \in W_2^{2n}(\mathbb{R}_+)$. Преобразуем второе слагаемое в интеграле, интегрируя по частям:

$$\int\limits_0^{+\infty} f^{(n)}(x)h^{(n)}(x)dx$$
$$= \left(\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p f^{(n-p-1)}(x)h^{(n+p)}(x) \right)\Bigg|_0^{+\infty}$$
$$+ (-1)^n \int\limits_0^{+\infty} f(x)h^{(2n)}(x)\, dx.$$

Учитывая поведение на бесконечности функций из соболевского пространства на полупрямой и их производных, подставим полученное соотношение в (2.4). В результате получим:

$$f^{(k)}(0) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)(h(x) + (-1)^n h^{(2n)}(x))\, dx$$
$$+ \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{p+1} f^{(n-p-1)}(0)h^{(n+p)}(0). \quad (2.5)$$

Равенство (2.5) выполняется для всех функций $f \in W_2^n(\mathbb{R}_+)$ тогда и только тогда, когда функция h — решение задачи

$$h^{(2n)} + (-1)^n h = 0, \quad h \in W_2^{2n}(\mathbb{R}_+), \quad (2.6)$$

$$h^{(n+p)}(0) = (-1)^{n-k}\delta_p^{n-1-k}, \quad p \in \{0, \dots, n-1\}, \quad (2.7)$$

где δ_i^j — символ Кронекера.

Общее решение уравнения (2.6), исчезающее на бесконечности имеет вид

$$h(x) = \sum_{p=0}^{n-1} c_p e^{\lambda_p x}, \quad (2.8)$$

где λ_p — корни уравнения $\lambda^{2n} = (-1)^{n+1}$, лежащие в левой полуплоскости $\mathbb{C}_l = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda < 0\}$,

$$\lambda_p = e^{i\pi \frac{2p+n+1}{2n}} = \varepsilon^{p+\frac{n+1}{2}}, \qquad p \in \{0, \dots, n-1\}, \quad (2.9)$$

$\varepsilon = e^{\frac{i\pi}{n}}$, $\varepsilon^r := e^{\frac{i\pi r}{n}}$. Из (2.8) имеем

$$h^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^{n-1} c_p \lambda_p^s. \quad (2.10)$$

Используя (2.7) и (2.10), приходим к системе линейных уравнений для $\{c_p\}_{p=0}^{n-1}$:

$$A\overrightarrow{c} = \overrightarrow{b}, \tag{2.11}$$

где $A := \left(\lambda_q^{n+p}\right)_{p,q=0}^{n-1}$ и $\overrightarrow{b} = \left((-1)^{n-k}\delta_p^{n-1-k}\right)_{p=0}^{n-1}$.

В матричной форме система (2.11) запишется так:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0^n & \lambda_1^n & \cdots & \lambda_{n-1}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_0^{2n-2-k} & \lambda_1^{2n-2-k} & \cdots & \lambda_{n-1}^{2n-2-k} \\ \lambda_0^{2n-1-k} & \lambda_1^{2n-1-k} & \cdots & \lambda_{n-1}^{2n-1-k} \\ \lambda_0^{2n-k} & \lambda_1^{2n-k} & \cdots & \lambda_{n-1}^{2n-k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_0^{2n-1} & \lambda_1^{2n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \cdots \\ c_{n-2-k} \\ c_{n-1-k} \\ c_{n-k} \\ \cdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ (-1)^{n-k} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя (2.9), получим

$$A = \left(\lambda_q^{n+p}\right)_{p,q=0}^{n-1} = \left(\varepsilon^{(q+\frac{n+1}{2})(n+p)}\right)_{p,q=0}^{n-1} = \left(\varepsilon^{pq}\varepsilon^{p\frac{n+1}{2}}\varepsilon^{qn}\varepsilon^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)_{p,q=0}^{n-1}.$$

Обозначим $V := (\varepsilon^{pq})_{p,q=0}^{n-1}$. Ясно, что V — невырожденная матрица Вандермонда. Пусть $V^{-1} = (v_{p,q})_{p,q=0}^{n-1}$. Так как, $A = D_1VD_2$, где

$$D_1 = \operatorname{diag}(1, \varepsilon^{\frac{n+1}{2}}, \ldots, \varepsilon^{(n-1)\frac{n+1}{2}}),$$

а

$$D_2 = \operatorname{diag}(\varepsilon^{\frac{n(n+1)}{2}}, \varepsilon^{\frac{n(n+1)}{2}+n}, \ldots, \varepsilon^{\frac{n(n+1)}{2}+n(n-1)}),$$

то

$$A^{-1} = D_2^{-1}V^{-1}D_1^{-1} = \left(v_{p,q}\varepsilon^{-q\frac{n+1}{2}}\varepsilon^{-pn}\varepsilon^{-\frac{n(n+1)}{2}}\right)_{p,q=0}^{n-1}.$$

Из (2.11) имеем $\overrightarrow{c} = A^{-1}\overrightarrow{b}$. Так как в столбце $\overrightarrow{b}$ только $(n-1-k)$-тый элемент отличен от нуля, то

$$c_p = (-1)^{n-k}v_{p,n-1-k}\varepsilon^{-(n-1-k)\frac{n+1}{2}}\varepsilon^{-pn}\varepsilon^{-\frac{n(n+1)}{2}}, \qquad p \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Учитывая, что $\varepsilon^n = -1$, получим

$$c_p = \varepsilon^{n(n-k)-(n-1-k)\frac{n+1}{2}-pn-\frac{n(n+1)}{2}}v_{p,n-1-k} = \varepsilon^{\frac{-n+1}{2}-k\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-pn}v_{p,n-1-k}. \tag{2.12}$$

Таким образом, задача (2.6)–(2.7) имеет решение. Поэтому найденная функция $g(x) = \overline{h(x)}$ реализует функционал L_k по формуле (2.2).

Используя (2.10), (2.12) и (2.9), получим

$$h^{(k)}(0)=\sum_{p=0}^{n-1}c_p\lambda_p^k=\sum_{p=0}^{n-1}\varepsilon^{\frac{-n+1}{2}-k\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-pn}\upsilon_{p,n-1-k}\varepsilon^{pk}\varepsilon^{k\frac{n+1}{2}}$$

$$=\sum_{p=0}^{n-1}\varepsilon^{\frac{-n+1}{2}+k}\varepsilon^{p(k-n)}\upsilon_{p,n-1-k}.$$

Так как $g^{(k)}(0)=A_{n,k}^2\in\mathbb{R}_+$, то $g^{(k)}(0)=\overline{g^{(k)}(0)}=h^{(k)}(0)$. Поэтому, используя (2.3), приходим к основной формуле

$$A_{n,k}^2=\sum_{p=0}^{n-1}\varepsilon^{\frac{-n+1}{2}+k}\varepsilon^{p(k-n)}\upsilon_{p,n-1-k}. \tag{2.13}$$

2.2. Вспомогательные утверждения

Введем еще некоторые обозначения.

Пусть $\sigma_q(x_1,\dots,x_m)$ — элементарный симметрический многочлен степени q от переменных $x_1,\dots,x_m$:

$$\sigma_q(x_1,\dots,x_m):=\sum_{1\le j_1<\dots<j_q\le m}x_{j_1}\dots x_{j_q}.$$

Далее $(n,k)_x$ — обобщенный биномиальный коэффициент:

$$(n,k)_x:=\frac{(1-x^n)\dots(1-x^{n-k+1})}{(1-x^1)\dots(1-x^k)}=\frac{\prod_{s=n-k+1}^{n}(1-x^s)}{\prod_{s=1}^{k}(1-x^s)},$$

где $x\in\mathbb{C}$, $x^p\neq1$ при $p\in\{1,\dots,n-1\}$, $n\in\mathbb{N}$, $k\in\{1,\dots,n-1\}$. При $k=0$ и $k=n$ считаем по определению $(n,k)_x=1$.

Нам понадобятся некоторые алгебраические утверждения.

Лемма 2.1 ([6, стр. 72]). *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $x,z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ и $x^k\neq1$ при $k\in\{1,\dots,n-1\}$. Тогда справедливо равенство*

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x^kz)=\sum_{k=0}^{n}(n,k)_x x^{\frac{k(k+1)}{2}}z^k. \tag{2.14}$$

Лемма 2.2. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ и $x^p\neq1$ при $p\in\{1,\dots,n-1\}$. Тогда для всех $k\in\{0,\dots,n\}$ справедливо тождество*

$$\sigma_k(1,x,\dots,x^{n-1})=(n,k)_x x^{\frac{k(k-1)}{2}}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Подставив $z = 1/xt$ в (2.14) и домножив полученное равенство на t^n, получим

$$\prod_{k=1}^{n}\left(t + x^{k-1}\right) = \sum_{k=0}^{n}(n,k)_x x^{\frac{k(k-1)}{2}} t^{n-k}. \tag{2.16}$$

Но по теореме Виета

$$\prod_{k=1}^{n}\left(t + x^{k-1}\right) = \sum_{k=0}^{n}\sigma_k(1,x,\ldots,x^{n-1})t^{n-k}. \tag{2.17}$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях t в правых частях равенств (2.16) и (2.17), получим требуемое. □

Лемма 2.3. *Пусть $x_0,\ldots,x_{n-1}$ — различные комплексные числа. Тогда матрица*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} = \left(x_q^p\right)_{p,q=0}^{n-1}$$

обратима и если $V^{-1} = (v_{p,q})_{p,q=0}^{n-1}$, то

$$v_{p,n-1-q} = \frac{(-1)^q s_{p,q}}{f_p},$$

где $s_{p,q} = \sigma_q(x_0,\ldots,x_{p-1},x_{p+1},\ldots,x_{n-1})$, а $f_p = \prod_{s=0,\, s\neq p}^{n-1}(x_p - x_s)$.

Доказательство. Как известно (смотрите, например, [7, стр. 32]):

$$\det(V) = \prod_{0\le i<j<n}^{n-1}(x_j - x_i). \tag{2.18}$$

Так как все x_p различны, то $\det(V) \neq 0$. Поэтому матрица V обратима, и

$$V^{-1} = \left((-1)^{p+q}\frac{\det(V_{p,q})}{\det(V)}\right)_{p,q=0}^{n-1}, \tag{2.19}$$

где $V_{p,q}$ — матрица, соответствующая алгебраическому дополнению элемента x_p^q матрицы V. Согласно [7, упр. 346]

$$\det(V_{p,q}) = \sigma_{n-1-q}(x_0,\ldots,x_{p-1},x_{p+1},\ldots,x_{n-1})\prod_{\substack{0\le i<j<n \\ i,j\neq p}}^{n-1}(x_j - x_i). \tag{2.20}$$

Подставляя (2.18) и (2.20) в (2.19), получим требуемое. □

Лемма 2.4. *Пусть* $x \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *и* $x^p \neq 1$ *при* $p \in \{1, \dots, n-1\}$. *Тогда матрица* $V = (x^{pq})_{p,q=0}^{n-1}$ *обратима и* $V^{-1} = (v_{p,k})_{p,k=0}^{n-1}$, *где*

$$v_{p,n-1-k} := \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} (\sigma_{k-j}) \frac{(n-1,p)_x x^{\frac{p(p+1)}{2}}}{\prod_{s=1}^{n-1} (1-x^s)} \left(-x^{j-n+1}\right)^p,$$

и $\sigma_q = \sigma_q(1, x, \dots, x^{n-1})$.

Доказательство. По лемме 2.3

$$v_{p,n-1-k} = (-1)^k \frac{s_{p,k}}{f_p}, \tag{2.21}$$

где $s_{p,k} = \sigma_k(1, x, \dots, x^{p-1}, x^{p+1}, \dots, x^{n-1})$ и

$$\begin{aligned} f_p = \prod_{s=0,\, s\neq p}^{n-1} (x^p - x^s) \\ &= (-1)^p x^{\frac{p(p-1)}{2}} x^{(n-1-p)p} \prod_{s=1}^{p} (1-x^s) \prod_{s=1}^{n-1-p} (1-x^s) \\ &= \prod_{s=1}^{n-1} (1-x^s) \frac{1}{(n-1,p)_x} x^{-\frac{p(p+1)}{2}} (-x^{n-1})^p. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Очевидно, что $s_{p,0} = \sigma_0 = 1$. Заметим, что при $k \in \{1, \dots, n-1\}$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \sigma_k = \sigma_k(1, x, \dots, x^{n-1}) &= \sum_{0 \le j_1 < \dots < j_k \le n-1} x^{j_1} \dots x^{j_k} \\ &= \sum_{\substack{0 \le j_1 < \dots < j_k \le n-1 \\ j_s \neq p,\, 1 \le s \le k}} x^{j_1} \dots x^{j_k} + \sum_{\substack{0 \le j_1 < \dots < j_{k-1} \le n-1 \\ j_s \neq p,\, 1 \le s \le k-1}} x^p x^{j_1} \dots x^{j_{k-1}} \\ &= s_{p,k} + x^p s_{p,k-1}. \end{aligned}$$

Откуда

$$s_{p,k} = \sigma_k - x^p s_{p,k-1}. \tag{2.23}$$

Из (2.23) индукцией по k легко получаем, что

$$s_{p,k} = \sum_{j=0}^{k} (\sigma_{k-j}) (-x^p)^j = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (\sigma_{k-j}) (x^j)^p. \tag{2.24}$$

Используя (2.24) и (2.22), находим

$$\frac{s_{p,k}}{f_p} = \frac{1}{\prod_{s=1}^{n-1} (1-x^s)} (n-1,p)_x x^{\frac{p(p+1)}{2}} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (\sigma_{k-j}) (-x^{j-n+1})^p.$$

Подставляя это выражение в (2.21), получим требуемое. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0, \dots, m-1\}$. Тогда для любого допустимого $x \in \mathbb{R}$ справедливо тождество*

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \frac{\prod_{s=0}^{j-1}\cos\, sx \prod_{s=0}^{m-j-1}\cos\, sx}{\prod_{s=1}^{j}\sin sx \prod_{s=1}^{m-j}\sin sx}$$
$$= (-1)^k \frac{1}{\sin mx} \prod_{s=1}^{k} \operatorname{ctg} sx \prod_{s=1}^{m-1-k} \operatorname{ctg} sx. \quad (2.25)$$

(*Произведение вида $\prod_{s=n}^{n-1} a_s$ будем считать по определению равным* 1).

Доказательство. Пусть m фиксированное натуральное число. Докажем равенство (2.25) индукцией по k.

При $k = 0$ равенство (2.25) примет вид

$$\frac{\prod_{s=0}^{m-1}\cos sx}{\prod_{s=1}^{m}\sin sx} = \frac{1}{\sin mx} \prod_{s=1}^{m-1} \operatorname{ctg} sx,$$

и, очевидно, следует из определения $\operatorname{ctg} x$.

Пусть, далее, равенство (2.25) верно для $k = l-1 \in \{0, \dots, m-2\}$. Проверим его для $k = l$. Имеем

$$\sum_{j=0}^{l}(-1)^j \frac{\prod_{s=0}^{j-1}\cos sx \prod_{s=0}^{m-j-1}\cos sx}{\prod_{s=1}^{j}\sin sx \prod_{s=1}^{m-j}\sin sx}$$
$$= (-1)^{l-1} \frac{1}{\sin mx} \prod_{s=1}^{l-1} \operatorname{ctg} sx \prod_{s=1}^{m-l} \operatorname{ctg} sx + (-1)^l \frac{\prod_{s=0}^{l-1}\cos\, sx \prod_{s=0}^{m-l-1}\cos sx}{\prod_{s=1}^{l}\sin sx \prod_{s=1}^{m-l}\sin sx}$$
$$= (-1)^l \prod_{s=1}^{l-1} \operatorname{ctg} sx \prod_{s=1}^{m-l} \operatorname{ctg} sx \left(\frac{1}{\sin lx \cos(m-l)x} - \frac{1}{\sin mx}\right)$$
$$= (-1)^l \prod_{s=1}^{l-1} \operatorname{ctg} sx \prod_{s=1}^{m-l} \operatorname{ctg} sx \frac{\cos lx \sin(m-l)x}{\sin lx \cos(m-l)x}$$
$$= (-1)^l \prod_{s=1}^{l} \operatorname{ctg} sx \prod_{s=1}^{m-l-1} \operatorname{ctg} sx.$$

□

2.3. Вывод формулы для $A_{n,k}$

Так как $\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{n}}$, то $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon^p \neq 1$ при $p \in \{1, \dots, n-1\}$. Значит, по лемме 2.4 получим

$$v_{p,n-1-k} = \frac{1}{\prod_{s=1}^{n-1}(1-\varepsilon^s)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} (\sigma_{k-j}) \times (n-1,p)_\varepsilon \varepsilon^{\frac{p(p+1)}{2}} \left(-\varepsilon^{j-n+1}\right)^p. \quad (2.26)$$

Откуда по формуле (2.13)

$$A_{n,k}^2 = \varepsilon^{\frac{-n+1}{2}+k} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\varepsilon^{p(k-n)} \frac{1}{\prod_{s=1}^{n-1}(1-\varepsilon^s)} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} (\sigma_{k-j}) \times (n-1,p)_\varepsilon \varepsilon^{\frac{p(p+1)}{2}} \left(-\varepsilon^{j-n+1}\right)^p \right)$$

$$= \varepsilon^{\frac{-n+1}{2}+k} \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=0}^{n-1} \left((-1)^{k-j} \sigma_{k-j} \frac{1}{\prod_{s=1}^{n-1}(1-\varepsilon^s)} \times (n-1,p)_\varepsilon \varepsilon^{\frac{p(p+1)}{2}} (-\varepsilon^{j+k-2n+1})^p \right).$$

Так как $\varepsilon^{2n} = 1$, то

$$A_{n,k}^2 = \varepsilon^{\frac{-n+1}{2}+k} \sum_{j=0}^{k} \left((-1)^{k-j} \sigma_{k-j} \frac{1}{\prod_{s=1}^{n-1}(1-\varepsilon^s)} \times \sum_{p=0}^{n-1} (n-1,p)_\varepsilon \varepsilon^{\frac{p(p+1)}{2}} (-\varepsilon^{j+k+1})^p \right).$$

Во внутренней сумме воспользуемся леммой 2.1 при $x = \varepsilon$ и $z = -\varepsilon^{k+j+1}$, а во внешней сумме сделаем замену $j \to k-j$. В результате имеем

$$A_{n,k}^2 = \varepsilon^{\frac{-n+1}{2}+k} \sum_{j=0}^{k} \left((-1)^j \sigma_j \frac{1}{\prod_{s=1}^{n-1}(1-\varepsilon^s)} \prod_{s=1}^{n-1} (1-\varepsilon^{s+2k-j+1}) \right).$$

Из леммы 2.2 при $x = \varepsilon$ получим, что $\sigma_j = (n,j)_\varepsilon \varepsilon^{j(j-1)/2}$. Поэтому

$$A_{n,k}^2 = \varepsilon^{\frac{-n+1}{2}+k} \sum_{j=0}^{k} \left((-1)^j \frac{\prod_{s=n-j+1}^{n}(1-\varepsilon^s)}{\prod_{s=1}^{j}(1-\varepsilon^s)} \varepsilon^{\frac{j(j-1)}{2}} \times \frac{1}{\prod_{s=1}^{n-1}(1-\varepsilon^s)} \prod_{s=1}^{n-1} (1-\varepsilon^{s+2k-j+1}) \right).$$

Но $1-\varepsilon^n = 2$. Поэтому

$$A_{n,k}^2 = 2\varepsilon^{\frac{-n+1}{2}+k}\sum_{j=0}^{k}\left((-1)^j \frac{\prod_{s=1}^{n-1}(1-\varepsilon^{s+2k-j+1})}{\prod_{s=1}^{j}(1-\varepsilon^s)\prod_{s=1}^{n-j}(1-\varepsilon^s)}\varepsilon^{\frac{j(j-1)}{2}}\right). \tag{2.27}$$

Заметим, что

$$1-\varepsilon^s = \varepsilon^{s/2}\left(\varepsilon^{-s/2}-\varepsilon^{s/2}\right) = -2i\varepsilon^{s/2}\frac{e^{is\frac{\pi}{2n}}-e^{-is\frac{\pi}{2n}}}{2i} = -2i\varepsilon^{s/2}\sin tx,$$

где $x = \frac{\pi}{2n}$. Подставляя полученное соотношение в (2.27), получим

$$\begin{aligned}
A_{n,k}^2 &= 2\varepsilon^{\frac{-n+1}{2}+k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{(-2i)^{n-1}}{(-2i)^j(-2i)^{n-j}}\frac{\varepsilon^{\frac{(2k-j+2)+\ldots+(2k-j+n)}{2}}}{\varepsilon^{\frac{1+\ldots+j}{2}}\varepsilon^{\frac{1+\ldots+(n-j)}{2}}} \\
&\quad\times\frac{\prod_{s=1}^{n-1}\sin(s+2k-j+1)x}{\prod_{s=1}^{j}\sin sx\prod_{s=1}^{n-j}\sin sx}\varepsilon^{\frac{j(j-1)}{2}} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\varepsilon^{kn}i\varepsilon^{-n/2}\frac{\prod_{s=1}^{n-1}\sin(s+2k-j+1)x}{\prod_{s=1}^{j}\sin sx\prod_{s=1}^{n-j}\sin sx} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\frac{\prod_{s=2k-j+2}^{2k-j+n}\sin sx}{\prod_{s=1}^{j}\sin sx\prod_{s=1}^{n-j}\sin sx} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\frac{\prod_{s=1}^{2k-j+n}\sin sx}{\prod_{s=1}^{j}\sin sx\prod_{s=1}^{n-j}\sin sx\prod_{s=1}^{2k-j+1}\sin sx} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\frac{\prod_{s=n-j+1}^{2k-j+n}\sin sx}{\prod_{s=1}^{j}\sin sx\prod_{s=1}^{2k-j+1}\sin sx} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\frac{\prod_{s=n-j+1}^{2k-j+n}\cos(n-s)x}{\prod_{s=1}^{j}\sin sx\prod_{s=1}^{2k-j+1}\sin sx} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\frac{\prod_{s=j-2k}^{j-1}\cos sx}{\prod_{s=1}^{j}\sin sx\prod_{s=1}^{2k-j+1}\sin sx} \\
&= (-1)^k\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{\prod_{s=0}^{j-1}\cos sx\prod_{s=0}^{2k-j}\cos sx}{\prod_{s=1}^{j}\sin sx\prod_{s=1}^{2k-j+1}\sin sx}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 2.5 при $m = 2k+1$. Тогда получим

$$A_{n,k}^2 = (-1)^k(-1)^k \frac{1}{\sin(2k+1)x} \prod_{s=1}^{k} \operatorname{ctg} sx \prod_{s=1}^{k} \operatorname{ctg} sx = \frac{1}{\sin(2k+1)x} \left(\prod_{s=1}^{k} \operatorname{ctg} sx \right)^2.$$

Откуда получаем, что

$$A_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{\sin(2k+1)x}} \prod_{s=1}^{k} \operatorname{ctg} sx.$$

Так как $x = \frac{\pi}{2n}$, то формула (1.3) доказана.

Автор выражает глубокую благодарность М. М. Маламуду за постановку задачи, а также идею доказательства (использовать теорему Рисса). Автор также признателен М. М. Маламуду и Л. Л. Оридороге за ряд ценных замечаний и внимание к работе.

Литература

[1] В. Н. Габушин, *О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полуоси* // Математические заметки, **6** (1969), N 5, 573–582.

[2] Г. А. Калябин, *Наилучшие операторы продолжения для соболевских пространств на полупрямой* // Функциональный анализ и его приложения, **36** (2002), вып. 2, 28–37.

[3] Г. А. Калябин, *О точных константах в неравенствах Колмогорова для пространств Соболева $W_2^n(\mathbb{R}_+)$* // Доклады РАН, **388** (2003), N 2, 159–161.

[4] Г. А. Калябин, *Точные константы в неравенствах для промежуточных производных (случай Габушина)* // Функциональный анализ и его приложения, **38** (2004), вып. 3, 29–38.

[5] Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* Физматгиз, 1961.

[6] В. А. Кречмар, *Задачник по алгебре. Издание шестое.* М.: Наука, 1968.

[7] И. В. Проскуряков, *Сборник задач по линейной алгебре. Издание шестое.* М.: Наука, 1978.

[8] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* ЛГУ, 1950.

[9] Л. В. Тайков, *Неравенства колмогоровского типа и наилучшие формулы численного дифференцирования* // Математические заметки, **4** (1968), N 2, 233–238.

[10] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений.* М.: Издательство МГУ, 1976.

Сведения об авторах

Антон Андреевич Лунёв

Донецкий национальный университет
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: Anton_Lunyov@mail.ru