Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 3, 394 – 420

Задача Коші для одного класу псевдодиференціальних систем у просторах періодичних функцій

Владислав А. Літовченко

(*Представлена А. Є. Шишковим*)

Анотація. Для одного класу псевдодиференціальних систем досліджуються властивості фундаментальних матриць розв'язків, встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для цих систем у просторах узагальнених періодичних функцій типу ультрарозподілів Жевре. Для окремого підкласу систем, який містить періодичні $2\overrightarrow{b}$-параболічні системи з коефіцієнтами, залежними лише від часу, описуються максимальні класи коректної розв'язності задачі Коші.

2000 MSC. 35G10, 35S30.

Ключові слова та фрази. Задача Коші, параболічні системи, псевдодиференціальні оператори, класи Жевре, формальні ряди, згортувач.

Вступ

Простори формальних тригонометричних рядів Фур'є, теорія яких була започаткована наприкінці 70-х років минулого століття М. Л. Горбачуком та В. І. Горбачук [1] і достатньо розвинута на сьогодні, слугують природним середовищем дослідження задачі Коші для диференціальних рівнянь з частинними похідними, а також параболічних псевдодиференціальних рівнянь. Зокрема, формальні ряди, як основний засіб дослідження, дають можливість відшукати зображення загального вигляду всіх гладких (у відповідних областях) розв'язків зазначених рівнянь, дослідити множини граничних значень їх розв'язків при $t \to +0$, та описати максимальні класи коректної розв'язності задачі Коші для цих рівнянь [2–5].

Стаття надійшла в редакцію 19.04.2006

ISSN 1810 – 3200.

Природно очікувати, що теорія просторів формальних тригонометричних рядів у поєднанні з класичною теорією параболічних систем [6–8], дасть достатньо ефективний інструментарій дослідження задачі Коші для систем зазначених рівнянь параболічного типу, який, певною мірою, дозволить поширити відомі результати для еволюційних рівнянь на випадок систем таких рівнянь.

У даній роботі, завдяки опуклим донизу функціям, описується клас 2π-періодичних систем псевдодиференціальних рівнянь із залежними від часу символами, який містить у собі $2\overrightarrow{b}$-параболічні диференціальні системи з неперервними, залежними від часу коефіцієнтами. Дійсні частини характеристичних коренів цих систем підпорядковані спеціальній умові, що накладає обмеження на їх поведінку в $\mathbb{R}^n$ (фактично ця умова є класичною умовою параболічності для диференціальних систем з частинними похідними).

Для таких систем вивчаються властивості фундаментальних матриць розв'язків (ф.м.р.) та досліджується коректна розв'язність задачі Коші у випадку, коли початкові дані є 2π-періодичними узагальненими функціями типу ультрарозподілів Жевре. Для часткового випадку систем знайдено сукупність усіх початкових 2π-періодичних узагальнених функцій, при яких розв'язок відповідної задачі Коші за просторовою змінною володіє тими ж властивостями гладкості й поведінкою похідних, що і ф.м.р. Даний результат одержано завдяки критерію згортувача в просторах 2π-періодичних цілих функцій, які є прототипом просторів Б. Л. Гуревича (відомих як простори типу W [9]) на випадок періодичних елементів. З'ясувалося, що ці простори є певним узагальненням відомих класів Жевре типу Рум'є [10], елементи яких є 2π-періодичні цілі функції.

1. Простори основних і узагальнених функцій

Нехай $\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел; $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — його елементи (вектори), $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ — скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$, $\|x\|^2 = (x, x)$, $C_{2\pi}^{\infty}(L)$ — простір усіх нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій, визначених на L; $\widehat{C}(L)$ — сукупність усіх обмежених за модулем функцій на L, а $\omega_j(\cdot)$ — зростаючі, неперервні функції на $[0; +\infty)$, причому $\omega_j(0) = 0$ і $\lim_{t\to+\infty} \omega_j(t) = +\infty$, $j = \overline{1, n}$. Покладемо $\Omega_j(t) = \int_0^t \omega_j(\xi) d\xi$, для $t \geq 0$ і $j = \overline{1, n}$. При кожному $j \in \{1; \ldots; n\}$ функція $\Omega_j(\cdot)$ володіє такими властивостями [7,11]: 1) вона диференційовна, зростаюча на $[0; +\infty)$; 2) $\Omega_j(0) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} \Omega_j(t) = +\infty$; 3) $\Omega_j(\cdot)$ — опукла (донизу) функція, тобто: а) $\forall \{t_1, t_2\} \subset [0; +\infty)$:

$\Omega_j(t_1)+\Omega_j(t_2)\le \Omega_j(t_1+t_2)$; б) $\forall\,\delta\ge 1\ \forall\, t\in[0;+\infty)$: $\Omega_j(\delta t)\ge \delta\Omega_j(t)$; в) $\forall\delta\in(0;1)\ \forall\, t\in[0;+\infty)$: $\Omega_j(\delta t)\le\delta\Omega_j(t)$. Довизначимо $\Omega_j(\cdot)$, $j=\overline{1,n}$, на $(-\infty,0)$ парно і покладемо $\overrightarrow{\Omega}(x)\overset{def}{=}\{\Omega_1(x_1);\dots,\Omega_n(x_n)\}$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Поряд з $\overrightarrow{\Omega}$, подібним чином, за функціями $\mu_j(\cdot)$, аналогічними до $\omega_j(\cdot)$, $j=\overline{1,n}$, визначимо вектор-функцію $\overrightarrow{M}(x)\overset{def}{=}\{M_1(x_1);\dots;M_n(x_n)\}$, $x\in\mathbb{R}^n$, і розглянемо $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ — сукупність усіх функцій φ з $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, які допускають аналітичне продовження на весь $\mathbb{C}^n=\mathbb{C}\times\times\dots\times\mathbb{C}$, таких, що

$$|\varphi(x+iy)|\le c\mathrm{e}^{(1,\overrightarrow{M}(\delta y))},\qquad (x+iy)\in\mathbb{C}^n, \tag{1.1}$$

де c,δ — додатні сталі, залежні лише від φ, а $(1,\overrightarrow{M}(\delta y))\overset{def}{=}\sum_{j=1}^n M_j(\delta y_j)$. Позначимо через $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$, $b>0$, множину всіх тих елементів з $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, для яких нерівність (2.1) виконується при $\delta=b$. І визначимо в $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$ норму наступним чином:

$$\|\varphi\|_b=\sup_{\substack{x\in[0;2\pi]\\ y\in\mathbb{R}^n}}\big\{|\varphi(x+iy)|\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(by))}\big\},\qquad \varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$$

(тут $[0;2\pi]=[0;2\pi]^n\subset\mathbb{R}^n$). З цією нормою $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$ — лінійний нормований простір.

Правильні такі допоміжні твердження.

Лема 1.1. *Нехай послідовність $\{\varphi_\nu,\nu\ge1\}\subset\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$ рівномірно збігається на кожній множині $U\overset{def}{=}[0;2\pi]\times\mathbb{K}$, де $\mathbb{K}$ — компакт з $\mathbb{R}^n$ і $\|\varphi_\nu\|_b<c$, $\nu\ge1$. Тоді її граничне значення φ належить до простору $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$, причому $\|\varphi\|_b<c$.*

Доведення. Зафіксуємо довільно точку $z_0=x_0+iy_0\in\mathbb{C}^n$ так, щоб $\{x_0,y_0\}\in U$. З рівномірної збіжності $\{\varphi_\nu,\nu\ge1\}$ на кожному компакті U одержимо, що

$$\begin{gathered}\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\nu_0\ge1\quad \forall\,\nu\ge\nu_0\quad \forall\,x\in[\![0;2\pi]\!]\\ \forall\,y\in\mathbb{K}(y_0)\overset{def}{=}\{y\in\mathbb{R}^n\big|\|y-y_0\|\le1\}:\\ |\varphi(x+iy)|<\varepsilon+|\varphi_\nu(x+iy)|.\end{gathered}$$

Перемноживши почленно останню нерівність на $\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(by))}$, дістанемо

$$\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(by))}|\varphi(x+iy)|<\varepsilon+\|\varphi_\nu\|_b<\varepsilon+c,\qquad \{x,y\}\in[\![0;2\pi]\!]\times\mathbb{K}(y_0).$$

Звідси, зваживши на довільність вибору точки z_0, приходимо до висновку, що

$$\|\varphi\|_b < \varepsilon + c.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ — довільне, то $\|\varphi\|_b < c$. Лему доведено. $\square$

Лема 1.2. *Якщо $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$ поточково збігається до нуля в $\mathbb{C}^n$ і фундаментальна в $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$, то вона також збігається до нуля і в цьому просторі.*

Доведення. Оскільки послідовність $\varphi_\nu, \nu \geq 1$, поточково збігається до нуля в $\mathbb{C}^n$ і фундаментальна за нормою $\|\cdot\|_b$, то безпосередньо з означення цієї норми та відомого критерія збіжності Больцано-Коші, одержимо рівномірну збіжність цієї послідовності до нуля на кожному компакті U. Така збіжність, у свою чергу, забезпечує рівномірну збіжність послідовності $g_\mu(\nu, \cdot) = \varphi_\nu(\cdot) - \varphi_\mu(\cdot)$, $\mu \geq 1$, до функції φ_ν (при кожному $\nu \geq 1$) на кожній множині U.

З означення фундаментальності $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ по нормі $\|\cdot\|_b$ випливає, що

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu_0 \geq 1 \quad \forall\, \mu > \nu_0 : \ \|g_\mu(\nu, \cdot)\|_b < \varepsilon,$$

для всіх $\nu > \nu_0$. Звідси, зваживши на твердження леми 1.1, дістанемо

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu_0 \geq 1 \quad \forall\, \nu > \nu_0 : \ \|\varphi_\nu\|_b < \varepsilon,$$

тобто, збіжність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ до нуля за нормою $\|\cdot\|_b$. Лему доведено. $\square$

Наступне твердження характеризує повноту простору $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$.

Теорема 1.1. *Простір $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$ є банаховим відносно норми $\|\cdot\|_b$.*

Доведення. Припустимо, що $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$ — фундаментальна послідовність за нормою $\|\cdot\|_b$. Тоді, як уже було зазначено при доведенні леми 1.2, ця послідовність є рівномірно збіжною на кожній множині U до деякої функції φ.

З фундаментальності $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ також випливає її обмеженість у $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$. Дійсно, для $\varepsilon = 1$ знайдеться номер ν_0 такий, що для всіх $\nu > \nu_0$

$$\|\varphi_\nu - \varphi_{\nu_0}\|_b < 1.$$

Звідси, зваживши на обмеженість $\|\varphi_{\nu_0}\|_b$ та нерівність

$$\|\varphi_\nu\|_b \leq \|\varphi_\nu - \varphi_{\nu_0}\|_b + \|\varphi_{\nu_0}\|_b$$

(яка одержується безпосередньо з означення $\|\cdot\|_b$), приходимо до обмеженості $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ у $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$. Тоді, згідно з твердженням леми 1.1, функція φ належить до $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$.

Послідовність різниці $\varphi_\nu - \varphi$, $\nu \geq 1$, також фундаментальна за нормою $\|\cdot\|_b$ (бо $\|\varphi_\nu - \varphi - (\varphi_\mu - \varphi)\|_b = \|\varphi_\nu - \varphi_\mu\|_b$) і прагне до нуля в кожній точці $\mathbb{C}^n$. Отже, $\|\varphi_\nu - \varphi\|_b \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 0$ (див. лему 1.2). Теорему доведено. □

Зазначимо, що $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b_1} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b_2}$ для всіх $b_1 \leq b_2$, причому $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}} = \bigcup_{b>0} \mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$. Топологію в $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ задамо як топологію індуктивної границі просторів $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$: $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}} = \lim_{b\to+\infty} ind\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$. Отже, говоритимемо що послідовність $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ збігається в просторі $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ до φ (позначатимемо $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}} \varphi$), якщо $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$ при деякому $b > 0$ і $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}} \varphi$.

Надалі використовуватимемо таке означення ([12]): послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{C}^n)$ називатимемо правильно збіжною, якщо вона рівномірно збігається на кожному компакті $U \subset \mathbb{C}^n$.

Теорема 1.2 (критерій збіжності). *Для того, щоб послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ збігалася в $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, необхідно й достатньо, щоб вона була обмеженою в цьому просторі та правильно збігалася.*

Доведення. Спочатку доведемо достатність, тобто переконаємося в тому, що якщо послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ обмежена за нормою $\|\cdot\|_b$ (при деякому $b > 0$) і рівномірно збігається до φ на кожному компакті U, то функція $\varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ є границею $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\}$ за топологією простору $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$.

Те, що $\varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ очевидно (згідно з лемою 1.1). Доведемо $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}} \varphi$ (тобто, що $g_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}} 0$, де $g_\nu = \varphi - \varphi_\nu, \nu \geq 1$). Для цього досить переконатися в існуванні такого $b_1 > 0$, що $\{g_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b_1}$ і $g_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b_1}} 0$.

Оскільки

$$0 \leq \mathrm{e}^{(1,\overrightarrow{M}(by))}\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(2by))} \leq \mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(by))} \xrightarrow[\|y\|\to+\infty]{} 0,$$

то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|y\| > \delta: \ \mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(2by))} < \frac{\varepsilon}{c}\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(by))},$$

де c — константа, що обмежує $\|g_\nu\|_b$, $\nu \geq 1$. Отже, для вказаних y та $x \in [0, 2\pi]$,

$$|g_\nu(x+iy)|\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(2by))} < \frac{\varepsilon}{c}|g_\nu(x+iy)|\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(by))} \leq \frac{\varepsilon}{c}\|g_\nu\|_b \leq \varepsilon. \quad (1.2)$$

Для решти y з $\mathbb{R}^n$, згідно з правильною збіжністю $\{g_\nu, \nu \geq 1\}$ до нуля, маємо

$$\begin{gathered}\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu_0 \geq 1 \quad \forall\, \nu \geq \nu_0 \quad \forall\, x \in [0, 2\pi] \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|y\| \leq \delta : \\ |g_\nu(x+iy)|\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(2by))} < \varepsilon \mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{M}(2by))} < \varepsilon.\end{gathered} \quad (1.3)$$

Об'єднуючи (1.2) і (1.3), одержимо

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu_0 \geq 1 \quad \forall\, \nu \geq \nu_0 : \ \|g_\nu\|_{2b} < \varepsilon.$$

Таким чином, послідовність $g_\nu, \nu \geq 1$, збігається до нуля в просторі $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},2b}$. Обмеженість $\{g_\nu, \nu \geq 1\}$ у цьому просторі стає очевидною, якщо зважити на те, що $\|g_\nu\|_b < c, \nu \geq 1$. Достатність доведено.

Доведемо необхідність. Оскільки $\{\varphi; \varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$ (при деякому $b > 0$) і $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}} \varphi$, то для $\varepsilon = 1$ знайдеться такий номер ν_0, що для всіх $\nu \geq \nu_0$ виконуватиметься нерівність $\|\varphi_\nu - \varphi\|_b < 1$. Звідси, зваживши на обмеженість $\|\varphi\|_b$ (бо $\varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$), та на нерівність

$$\|\varphi_\nu\|_b \leq \|\varphi_\nu - \varphi\|_b + \|\varphi\|_b,$$

приходимо до обмеженості послідовності $\varphi_\nu, \nu \geq 1$, за нормою $\|\cdot\|_b$.

Далі, з $\|\varphi_\nu - \varphi\|_b \to 0$ одержуємо

$$\begin{gathered}\forall\, \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu_0 \geq 1 \quad \forall\, \nu \geq \nu_0 \quad \forall\, x \in [0, 2\pi] \quad \forall\, y \in \mathbb{K} : \\ |\varphi_\nu(x+iy) - \varphi(x+iy)| < \varepsilon\big(\max_{y\in\mathbb{K}} \mathrm{e}^{(1,\overrightarrow{M}(by))}\big).\end{gathered}$$

Теорему доведено. □

Оскільки $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}} \subset \mathbb{C}^\infty_{2\pi}$, то згідно з відомою теоремою Діріхле, кожен елемент простору $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ розвивається на $\mathbb{R}^n$ у поточково збіжний до нього ряд Фур'є

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(\varphi)\mathrm{e}^{i(k,x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ \varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}},$$

де $c_k(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi]} \varphi(x)\mathrm{e}^{-i(k,x)}dx$ — k-ий коефіцієнт Фур'є.

Наступне твердження характеризує елементи простору $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ у термінах коефіцієнтів Фур'є.

Теорема 1.3. *Нехай функції $\Omega_j(\cdot)$, $M_j(\cdot)$, $j=\overline{1,n}$, — взаємодвоїсті за Юнгом* [7]*. Тоді для того, щоб елемент φ з $\mathbb{C}_{2\pi}^{\infty}$ належав до простору $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, необхідно і достатнььо, щоб*

$$\exists\,\{c;\delta\}\subset(0;+\infty)\quad\forall\,k\in\mathbb{Z}^n:\ |c_k(\varphi)|\le ce^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))}. \tag{1.4}$$

Доведення. Спочатку доведемо необхідність. Оскільки $\varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, то згідно з інтегральною теоремою Коші,

$$\begin{aligned}|c_k(\varphi)|&=(2\pi)^{-n}\left|\int\limits_{[0,2\pi]}\varphi(x+iy)\mathrm{e}^{-i(k,x+iy)}\,dx\right|\\&\le c\int\limits_{[0,2\pi]}\mathrm{e}^{(1,\overrightarrow{M}(\delta y))+(k,y)}\,dx\\&=c_1\mathrm{e}^{(1,\overrightarrow{M}(\delta y))+(k,y)}\qquad(\forall\,y\in\mathbb{R}^n\ \forall\,k\in\mathbb{Z}^n),\end{aligned}$$

де c_1 — додатня стала, не залежна від k,x,y. Тепер для кожного $j\in\{1;\dots;n\}$ виберемо знак y_j так, щоб $y_jk_j=-|y_j||k_j|$, $k_j\in\mathbb{Z}$, а величину y_j – так, щоб нерівність Юнга

$$y_jk_j\le M_j(\delta y_j)+\Omega_j(\delta^{-1}k_j),\quad\delta>0,$$

перетворилася б у рівність, тобто

$$-|y_j|\,|k_j|=M_j(\delta y_j)+\Omega_j(\delta^{-1}k_j).$$

Тоді,

$$|c_k(\varphi)|\le c_1\,e^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta^{-1}k))},\qquad k\in\mathbb{Z}^n.$$

Доведемо достатність. Зазначимо, що функція φ з $\mathbb{C}_{2\pi}^{\infty}$, для якої виконується умова (1.4), допускає аналітичне продовження на $\mathbb{C}^n$ згідно з правилом

$$\varphi(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}c_k(\varphi)\mathrm{e}^{i(k,z)},\qquad z\in\mathbb{C}^n.$$

Скористаємося цією рівністю для доведення того, що $\varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$. Завдяки умові (1.4) маємо

$$|\varphi(x+iy)|\le c\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}e^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))}\cdot e^{\sum_{j=1}^n|k_j||y_j|}.$$

Звідси, згідно з відповідними нерівностями Юнга, одержуємо, що

$$|\varphi(x+iy)|\le c\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}e^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta 2^{-1}k))}\right)\cdot e^{(1,\overrightarrow{M}(2\delta^{-1}y))},\qquad x+iy\in\mathbb{C}^n.$$

Теорему доведено. $\square$

З теорем 1.2, 1.3 приходимо до очевидного наслідку.

Наслідок 1.1. *Для того, щоб послідовність* $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ *збігалася в* $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ *до елемента* φ*, необхідно й достатньо, щоб:*

1) $c_k(\varphi_\nu) \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} c_k(\varphi)$*,* $k \in \mathbb{Z}^n$*;*

2) $\exists\{c;\delta\} \subset (0;+\infty) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \quad \forall\, \nu \geq 1 : |c_k(\varphi_\nu)| \leq ce^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))}$

(*тут і надалі* $\overrightarrow{\Omega}$ *— вектор-функція, двоїста за Юнгом до* $\overrightarrow{M}$).

Правильне наступне твердження.

Лема 1.3. *Для кожного елемента* φ *з* $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$*, його ряд Фур'є збігається до* φ *за топологією простору* $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$*.*

Доведення. Розглянемо залишок ряду Фур'є функції φ з $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$:

$$R_r(x) = \sum_{||k|\geq r|} c_k(\varphi)\mathrm{e}^{i(k,x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ |k| = k_1 + \cdots + k_n,\ k \in \mathbb{Z}^n.$$

Згідно з наслідком 1.1, досить переконатися, що: 1) $\forall\, k \in \mathbb{Z}^n$: $c_k(R_r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$; 2) $\exists\{c;\delta\} \subset (0;+\infty)$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}^n$ $\forall\, r \geq 1$: $|c_k(R_r)| \leq ce^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))}$.

Оскільки

$$c_k(R_r) = \begin{cases} 0, & -r < |k| < r, \\ c_k(\varphi), & ||k| \geq r|, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}^n,\ r \geq 1,$$

то умови 1), 2) виконуються. Лему доведено. □

У просторі $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ визначені й неперервні операції додавання, віднімання, множення, зсуву та згортки

$$(\varphi * \psi)(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{[0;2\pi]} \varphi(\xi)\psi(x-\xi)d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad \{\varphi,\psi\} \subset \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}},$$

при цьому коефіцієнти Фур'є згортки обчислюються за формулою

$$c_k(\varphi * \psi) = c_k(\varphi)c_k(\psi), \quad k \in \mathbb{Z}^n.$$

Далі, нехай $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$ — сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ зі слабкою збіжністю. Зазначимо, що $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}} = \lim_{b\to\infty} \mathrm{pr}\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M},b}$, де $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M},b}$ — простір, топологічно спряжений з $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M},b}$.

Дію узагальненої функції $f \in \mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$ на елемент $\varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ позначимо $\langle f, \varphi \rangle$.

Зіставлення

$$\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}} \ni \varphi \to f_\varphi \in \mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}} : \ \langle f_\varphi, \psi \rangle = (2\pi)^{-n} \int\limits_{[0;2\pi]} \overline{\varphi(x)} \psi(x)\, dx \quad (\forall\, \psi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}),$$

визначає неперервне вкладення простору $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ у $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$, де $\overline{(\cdot)}$ — позначає комплексну спряженість. Згідно з твердженням леми 1.3

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \lim_{r\to+\infty} \Big\langle f, \sum_{-r\le|k|\le r} c_k(\varphi) \mathrm{e}^{i(k,x)} \Big\rangle \\ &= \lim_{r\to+\infty} \sum_{-r\le|k|\le r} c_k(\varphi) \langle f, \mathrm{e}^{i(k,x)} \rangle \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f)} c_k(\varphi), \qquad \varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}},\ f \in \mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}, \end{aligned}$$

де $\overline{c_k(f)} = \langle f, \mathrm{e}^{i(k,x)} \rangle$.

Рядом Фур'є узагальненої 2π-періодичної функції f з $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$ назвемо такий ряд:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f)} \mathrm{e}^{i(k,x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 1.4. *Ряд Фур'є узагальненої функції f з $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$ збігається до f у сенсі збіжності в просторі $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$.*

Доведення. Нехай $\{S_r(\cdot) = \sum_{-r\le|k|\le r} \overline{c_k(f)} \mathrm{e}^{i(k,\cdot)},\ r \ge 1\}$ — послідовність частинних сум ряду Фур'є функціонала f. Очевидно, що $S_r(\cdot) \in \mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$ при кожному фіксованому $r \ge 1$. Тоді для кожного φ з $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$

$$\langle S_r, \varphi \rangle = \sum_{-r\le|k|\le r} \overline{c_k(f)} c_k(\varphi), \qquad r \ge 1,$$

бо

$$\langle \mathrm{e}^{i(k,x)}, \varphi(x) \rangle = (2\pi)^{-n} \int\limits_{[0;2\pi]} \overline{\mathrm{e}^{i(k,x)}} \varphi(x)\, dx = c_k(\varphi),$$

а, отже,

$$\lim_{r\to+\infty} \langle S_r, \varphi \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f)} c_k(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle.$$

Теорему доведено. □

Наступне твердження характеризує елементи з $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$ у термінах їх коефіцієнтів Фур'є.

Теорема 1.5. *Для того, щоб узагальнена 2π-періодична функція f з Φ' належала до простору $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\forall\, 0<\delta\ll 1 \quad \exists\, c(\delta)>0 \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}^n: \ |c_k(f)|\le c(\delta)e^{(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))} \tag{1.5}$$

(тут $\overrightarrow{\Omega}$ — вектор-функція, разом з якою $\overrightarrow{M}$ — взаємодвоїсті за Юнгом, а Φ' — простір усіх формальних тригонометричних рядів [1]*).*

Доведення. Доведемо достатність. Спочатку переконаємося, що 2π-періодичний функціонал f, для якого виконується умова (1.5), визначений на елементах з $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$. Нехай φ — довільний елемент з $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, тоді згідно з теоремою 1.3

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|c_k(f)||c_k(\varphi)|\le c_\varphi\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|c_k(f)|\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta_\varphi k))}$$
$$\le c_\varphi c(\delta_\varphi/2)\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta_\varphi 2^{-1}k))}<+\infty.$$

Звідси одержуємо, що

$$|\langle f,\varphi\rangle|=\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\overline{c_k(f)}c_k(\varphi)\right|<+\infty,$$

тобто, визначеність f на $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$.

Лінійність і неперервність f у просторі $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ — очевидні.

Для доведення необхідності, зафіксуємо довільним чином f з $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$. Цьому функціоналу зіставимо у відповідність сукупність 2π-періодичних функцій

$$\widehat{\varphi}_{\delta,f}(\cdot)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\mathrm{sign}(\mathrm{Re}\ c_k(f))\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))+i(k,\cdot)},$$

$$\check{\varphi}_{\delta,f}(\cdot)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\mathrm{sign}(\mathrm{Im}\ \overline{c_k(f)})\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))+i(k,\cdot)},\qquad 0<\delta\ll 1,$$

кожна з яких є елементом з $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ (див. теорему 1.3). Тоді,

$$\langle f,\widehat{\varphi}_{\delta,f}(\cdot)\rangle=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\mathrm{Re}\,c_k(f)|\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))}$$
$$+\,i\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\mathrm{sign}\,(\mathrm{Re}\,c_k(f))\mathrm{Im}\,\overline{c_k(f)}\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))},$$

$$\langle f, \check{\varphi}_{\delta,f}(\cdot)\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \operatorname{Re} c_k(f) \operatorname{sign}(\operatorname{Im} \overline{c_k(f)}) \mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))} + i \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\operatorname{Im} \overline{c_k(f)}| \mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))}, \qquad 0<\delta\ll 1,$$

і, оскільки $f \in \mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$, то зазначені числові ряди збіжні. Отже, для кожного $0<\delta\ll 1$ існують додатні сталі $c_1(\delta)$, $c_2(\delta)$ такі, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^n$:

$$|\operatorname{Re}\, c_k(f)| \le c_1(\delta)\mathrm{e}^{(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))}; \quad |\operatorname{Im}\, \overline{c_k(f)}| \le c_2(\delta)\mathrm{e}^{(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta k))}.$$

Звідси вже приходимо до виконання умови (1.5). Теорему доведено. □

Наслідок 1.2. *Дельта-функція Дірака $\delta(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} 1\cdot e^{i(k,\cdot)}$ належить до $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$.*

Узагальнену 2π-періодичну функцію f з Φ' називатимемо згортувачем у просторі $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, якщо: 1) $\forall\varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}} : (f*\varphi)(\cdot) = \langle f, \varphi(\xi+\cdot)\rangle \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$; 2) для кожної збіжної послідовності $\{\varphi_\nu, \nu\ge 1\}\subset\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ до $\varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ у просторі $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, відповідна послідовність $f*\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}} f*\varphi$.

Наступне твердження характеризує згортувачі в $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$.

Теорема 1.6 (критерій згортувача). *Для того, щоб f з Φ' був згортувачем у просторі $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, необхідно й достатньо, щоб $f\in\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$.*

Доведення. Нехай $f\in\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$. Тоді для кожного елемента φ з $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, згідно з твердженням теорем 1.3, 1.5, одержуємо, що

$$\begin{aligned}|c_k(f*\varphi)| &= |c_k(f)||c_k(\varphi)| \\ &\le c_\varphi \mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta_\varphi k))} c(\delta_\varphi/2)\mathrm{e}^{(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta_\varphi 2^{-1}k))} \\ &\le c_\varphi c(\delta_\varphi/2)\mathrm{e}^{-(1,\overrightarrow{\Omega}(\delta_\varphi 2^{-1}k))}, \qquad k\in\mathbb{Z}^n,\end{aligned}$$

тобто, $f*\varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$.

Аналогічним чином переконуємося в тому, що операція $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}\ni\varphi\to f*\varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ є неперервною в $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$. Достатність доведено.

Доведемо необхідність. Для цього скористаємося методом від протилежного. Припустимо, що f не належить до $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$. Тоді знайдеться хоча б одна функція φ_0 з $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ така, що ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\overline{c_k(f)}c_k(\varphi_0)$ — розбіжний.

З іншого боку, оскільки f — згортувач у $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, то $(f * \varphi_0) \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, а отже, дельта-функція Дірака визначена на $f * \varphi_0$, як елемент з $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$ (див. наслідок 1.2), таким чином,

$$|\langle \delta(\cdot), f * \varphi_0 \rangle| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f)} c_k(\varphi_0) \right| < +\infty.$$

Одержане протиріччя доводить визначеність f на елементах з $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$. Неперервність f очевидна. Теорему доведено. □

Наслідок 1.3. *У просторі $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$ визначена й неперервна операція згортки, причому для всіх $\{f; g\} \subset \mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$:*

1) $\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, \langle g, \varphi(\xi + x) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$;

2) $c_k(f * g) = \overline{c_k(f) c_k(g)}, \quad k \in \mathbb{Z}^n$.

Далі, нехай $\mathbb{G}_{\{\beta\}}$ — клас Жевре (типу Рум'є) порядку $\beta > 0$ 2π-періодичних функцій [10], а $L_2([0; 2\pi])$ — відомий простір Лебега 2π-періодичних функцій, тоді мають місце такі очевидні вкладення:

$$\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}} \subset \mathbb{G}_{\{\beta\}} \subset \mathbb{C}^\infty_{2\pi} \subset L_2([\![0; 2\pi]\!]) \subset (\mathbb{C}^\infty_{2\pi})' \subset \mathbb{G}'_{\{\beta\}} \subset \mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}} \subset \Phi', \quad \beta \geq 1.$$

Зазначимо, що якщо $M_j(\cdot) = |\cdot|^{\frac{1}{1-\beta}}$, $0 < \beta < 1$, $j = \overline{1, n}$, то $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}} = \mathbb{G}_{\{\beta\}}$. Отже, простір $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ є певним узагальненням класичного класу Жевре 2π-періодичних функцій, які допускають аналітичне продовження на весь простір $\mathbb{C}^n$.

За вектор-функцією $\overrightarrow{\Omega}(\cdot)$ побудуємо клас $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}([0; T_0])$, $0 < T_0 < +\infty$, функцій $a_j : [0; T_0] \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ таких, що: 1) $\exists\, b_j(\cdot) \in \widehat{C}([0; T_0])$: $|a_j(t, k)| \leq |b_j(t)||L_j(k)|$, де функція $L_j(\cdot)$ така, що для всіх $0 < \delta \ll 1$:

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \left\{ |L_j(k)| \mathrm{e}^{-\delta(1, \overrightarrow{\Omega}(k))} \right\} \leq c_j \delta^{-1}, \qquad c_j \neq c_j(\delta);$$

$$2)\ \exists\, c_j \geq 0\ \forall\, t \in [0; T_0]\ \forall\, 0 < \varepsilon \ll 1\ \exists\, \nu_j(\varepsilon) > 0,\ \nu_j(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$

$$\forall \in \mathbb{Z}^n :\ |a_j(t + \varepsilon, k) - a_j(t, k)| \leq \nu_j(\varepsilon)(|L_j(k)| + c_j)$$

(тут $L_j(\cdot)$ — функція з попередньої умови).

Зазначимо, що клас $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}([0; T_0])$ замкнений відносно операцій додавання, віднімання та множення на неперервну функцію $b(t)$, $t \in [0; T_0]$.

Для $a(\cdot,\cdot)$ з $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}$ покладемо

$$f_a(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \overline{a(t,k)}\mathrm{e}^{i(k,\cdot)}, \qquad t\in[0;T_0].$$

Згідно з описом класу $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}$ та теоремою 1.5, не важко переконатися, що f_a належить простору до $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$ при кожному фіксованому t з $[0;T_0]$ (тут $\overrightarrow{M}$ — вектор-функція, двоїста за Юнгом з $\overrightarrow{\Omega}$). У просторі $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ означимо оператор A_a за правилом

$$A_a\varphi = f_a * \varphi, \qquad \varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}.$$

Оскільки f_a — згортувач у $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, то $A_a : \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}} \to \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, причому A_a — лінійний та неперервний оператор у $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ (бо такою є операція згортки).

Розглянемо кілька прикладів оператора A_a. Нехай $a(t,k) \equiv \prod_{j=1}^n (ik_j)^{l_j},\ l\in\mathbb{Z}^n_+,\ k\in\mathbb{Z}^n$, тоді для кожного елемента φ з $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$

$$(A_a\varphi)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\prod_{j=1}^n (ik_j)^{l_j}\right)c_k(\varphi)\mathrm{e}^{i(k,x)} = D_x^l\varphi(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

тобто, A_a — збігається з диференціальним оператором $D_x^l = \frac{\partial^{|l|}\cdot}{\partial x_1^{l_1}\cdots\partial x_n^{l_n}}$.

Якщо $a(t,k)\equiv \prod_{j=1}^n |k_j|^{\alpha_j}\mathrm{e}^{\alpha_j\pi i/2\mathrm{sign}(k_j)},\ \alpha_j>0,\ j=\overline{1,n},\ k\in\mathbb{Z}^n$, то

$$(A_a\varphi)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\prod_{j=1}^n (ik_j)^{\alpha_j}\right)c_k(\varphi)\mathrm{e}^{i(k,x)}$$
$$= \big(\mathcal{D}_+^{(\alpha)}\varphi\big)(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ \varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}},$$

де $\mathcal{D}_+^{(\alpha)}$ — n-вимірний оператор Вейля дробового диференціювання тригонометричних рядів [13].

Нехай тепер $n=1$ і $a(t,k)\equiv\Omega_1(k),\ k\in\mathbb{Z}$. Тоді

$$(A_a\varphi)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Omega_1(k)c_k(\varphi)\mathrm{e}^{ikx} = \left(\Omega_1(|D_x|)\varphi\right)(x), \qquad x\in\mathbb{R},\ \varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}.$$

У цьому випадку оператор A_a збігається з псевдодиференціальним оператором Е. Поста, породженим оператором $\sqrt{D_x^2}$, символом якого є $\Omega_1(\cdot)$ (див. [13, с. 282;], [14]).

Виходячи з наведених прикладів, оператор згортки A_a надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором у просторі $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ з символом a (залежним від параметра t).

Зазначимо також, що оператор A_a легко продовжується на простір $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$:
$$\widehat{A}_a f = f_a * f, \qquad f \in \mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}},$$
причому
$$\langle \widehat{A}_a f, \varphi \rangle = \langle f, A_a \varphi \rangle, \qquad \varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}},$$
оскільки $A_a \varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ (при кожному фіксованому t з $[0; T_0]$).

Далі, нехай Ψ — простір основних функцій. Позначимо через Ψ' — простір, топологічно спряжений з Ψ; Ψ^m, $(\Psi')^m$ — декартові степені (з натуральним показником m) просторів Ψ й Ψ' з покомпонентною збіжністю у, відповідно, Ψ та Ψ'; $P\Psi^m$ — множину всеможливих квадратних матриць порядку m, рядками яких є елементи з Ψ^m (також з покомпонентною збіжністю в просторі Ψ).

Говоритимемо, що узагальнена вектор-функція f^T з $(\Psi')^m$ є згортувачем у класі Ψ^m, якщо: 1) $(p * f)(\cdot) = (\sum_{j=1}^m \langle f_j(\xi), p_{ij}(\xi + \cdot)\rangle)_{i=1}^m \in \Psi^{m^T}$ $(\forall p \in P\Psi^m)$; 2) $\forall \{p; p_\nu, \nu \geq 1\} \subset P\Psi^m, p_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{P\Psi^m} p : p_\nu * f \xrightarrow[\nu \to +\infty]{\Psi^{m^T}} p * f$ (тут індекс T позначає операцію транспонування, причому під транспонуванням векторного простору розумітимемо транспонування всіх елементів цього простору).

Через $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t} = (A_{a_{ij}})_{i,j=1}^m$ позначимо матричний псевдодиференціальний оператор у просторі $(\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}})^{m^T}$ з параметром $t \in [0; T_0]$, побудований за матрицею-символом $\mathcal{A}_t(\cdot) = (a_{ij}(t, \cdot))_{i,j=1}^m$ кожен елемент якої належить до класу $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}([0; T_0])$, тобто — оператор, дія якого на елементах φ з $(\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}})^{m^T}$, при кожному фіксованому $t \in [0; T_0]$, задається наступним чином:
$$(\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t} \varphi)(t, \cdot) = \left\{ \sum_{j=1}^m (A_{a_{1j}} \varphi_j)(t, \cdot); \ldots ; \sum_{j=1}^m (A_{a_{mj}} \varphi_j)(t, \cdot) \right\}^T,$$
де $A_{a_{ij}}$ — псевдодиференціальний оператор у просторі $\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$ з символом a_{ij}.

2. Задача Коші

Розглянемо систему
$$D_t u(t, x) = (\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t} u)(t, x), \qquad (t, x) \in (0; T_0] \times \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$
де $u = \{u_1, \ldots ; u_m\}^T$, а $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t} = (A_{a_{ij}})_{i,j=1}^m$ — матричний псевдодиференціальний оператор з попереднього пункту.

Припустимо, що для (2.1) виконується аналог рівномірної за t умови параболічності:

$$\begin{gathered}\exists\,\delta^*>0\quad \exists\,c^*\in\mathbb{R}\quad \forall\,t\in[0;T_0]\quad \forall\,k\in\mathbb{Z}^n:\\ \max_{j=\overline{1,m}}\mathrm{Re}\lambda_j(t,k)\le -\delta^*(1,\overrightarrow{\Omega}(k))+c^*,\end{gathered}\tag{2.2}$$

де λ_j — власні числа матриці $\mathcal{A}_t$ — символу матричного оператора $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t}$.

Оскільки $\overrightarrow{\Omega}(\cdot)$ є опуклою вектор-функцією на $\mathbb{R}^n$, то умову (2.2) надалі називатимемо умовою опуклості системи (2.1), а саму систему — опуклою.

Якщо для системи (2.1) задати початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0}=f,\qquad f\in(\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{m^T},\tag{2.3}$$

то розв'язком задачі Коші (2.1), (2.3) називатимемо вектор-функцію $u(t,x)$, $(t,x)\in(0;T_0]\times\mathbb{R}^n$, яка: 1) при кожному фіксованому t з $(0;T_0]$ належить до області визначення $\mathcal{D}(\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t})$ матричного псевдодиференціального оператора $\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t}$; 2) сильно диференційовна по t на $(0;T_0]$: для всіх $t\in(0;T_0]$ і $k\in\mathbb{Z}^n$ виконується рівність $(c_k(u))'_t=c_k(u'_t)$; 3) задовольняє систему (2.1) у звичайному розумінні, а початкову умову (2.3) — у сенсі збіжності в $(\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{m^T}$ (тобто в розумінні слабкої збіжності).

Знайдемо ф.м.р. $G_t(\cdot)$, $t\in(0;T_0]$, системи (2.1) і дослідимо її властивості.

Згідно з означенням розв'язку задачі Коші (2.1), (2.3) приходимо до висновку, що розв'язування системи (2.1) рівносильне розв'язуванню такої системи:

$$D_tc_k(t)=\mathcal{A}_tc_k(t),\qquad t\in(0;T_0],\ k\in\mathbb{Z}^n,\tag{2.4}$$

яка є лінійною системою звичайних диференціальних рівнянь з параметром k.

Нехай $\Theta(t;k,\tau)=(\theta^{ij}(t;k,\tau))_{i,j=1}^m$ для всіх $\tau\in[0;T_0),t\in(\tau;T_0]$ і $k\in\mathbb{Z}^n$, є розв'язком системи (2.4), що задовольняє (у звичайному розумінні) початкову умову

$$\Theta(t;k,\tau)\Big|_{t=\tau}=E\tag{2.5}$$

(тут E — одинична матриця). Такий розв'язок надалі називатимемо матрицею Гріна або матрицантом системи (2.4).

Зазначимо, що зроблені припущення на елементи матриці $\mathcal{A}_t$ забезпечують існування такого матриканта, причому будь-який інший розв'язок системи (2.4) має вигляд $C_k = \Theta C$, $k \in \mathbb{Z}^n$, де C — довільна матриця-стовпець з елементами, залежними лише від k (див., напр., [15]).

Лема 2.1. *Для кожного* $\tau \in [0; T_0)$ *існує* $0 < \varepsilon \ll 1$ *таке, що для всіх* $t \in (\tau; \tau + \varepsilon]$ *і* $k \in \mathbb{Z}^n$ *виконується нерівність*

$$|\Theta(t; k, \tau)| \le c \exp\{-(t-\tau)\delta(1, \overrightarrow{\Omega}(k))\},$$

де c, δ *— додатні сталі, не залежні від* t, τ *і* k, *а* $|(b_{ij})_{i,j=1}^{m,l}| = \max_{i=\overline{1,m}\ j=\overline{1,l}} |b_{ij}|$.

Доведення. Подамо (2.4) у вигляді

$$D_t\Theta = \mathcal{A}_{t^*}(k)\Theta + q(t,k), \tag{2.6}$$

де $q(t,k) = (\mathcal{A}_t(k) - \mathcal{A}_{t^*}(k))\Theta(t; k, \tau)$, а t^* — довільна фіксована точка з $[\tau; T_0]$.

Розв'язавши задачу Коші (2.6), (2.5) зійдемося на тому, що матрицант системи (2.4) допускає таке зображення:

$$\Theta(t; k, \tau) = \mathrm{e}^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(k)} + \int\limits_{\tau}^{t} \mathrm{e}^{(t-\sigma)\mathcal{A}_{t^*}(k)} q(\sigma, k)\, d\sigma,$$

де $\mathrm{e}^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}} = E + \sum_{j=1}^{\infty}((t-\tau)\mathcal{A}_{t^*})^j/j!$.

Згідно з твердженням леми з [7, с. 78]

$$\|\mathrm{e}^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(k)}\| \le \exp\{(t-\tau)\max_{j=\overline{1,m}} \mathrm{Re}\lambda_j(t^*, k)\}$$
$$\times \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} (2(t-\tau)\|\mathcal{A}_{t^*}(k)\|)^j\right) \qquad (\forall\, t \in [\tau; T_0])$$

(тут $\|A\|$ — норма матриці $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$, тобто норма відповідного оператора в m-вимірному просторі). Звідси, зваживши на умову опуклості (2.2) та властивості елементів матриці $\mathcal{A}_{t^*}$, скориставшись при цьому оцінкою [7]

$$\max_{j=\overline{1,m}} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2 \le \|A\|^2 \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2,$$

одержимо, що

$$|\mathrm{e}^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(k)}| \le c \exp\{(t-\tau)(c^* - (\delta^*/2)(1, \overrightarrow{\Omega}(k)))\}$$
$$\times \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} ((t-\tau) \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \{|L_*(k)| \mathrm{e}^{-(t-\tau)\delta^*(2j)^{-1}(1,\overrightarrow{\Omega}(k))}\})^j\right)$$
$$\le c_1 \exp\{-(t-\tau)(\delta^*/2)(1, \overrightarrow{\Omega}(k))\},$$
$$\tau \in [0; T_0),\ \{t, t^*\} \subset [\tau; T_0] \quad (2.7)$$

(тут і надалі через $L_*(\cdot)$ позначатимемо відповідну функцію з умови 1), що в описі класу $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}$; а c_1 — додатна стала, не залежна від t, t^*, τ і k).

Використовуючи нерівність (2.7), знайдемо

$$|\Theta(t; k, \tau)| \le c_1 \exp\{-(t-\tau)(\delta^*/2)(1, \overrightarrow{\Omega}(k))\}$$
$$+ c_1 m \int_\tau^t \exp\{-(t-\sigma)(\delta^*/2)(1, \overrightarrow{\Omega}(k))\} |q(\sigma, k)|\, d\sigma. \quad (2.8)$$

Оскільки $|q(t,k)| \le m|\mathcal{A}_t(k) - \mathcal{A}_{t^*}(k)|\, |\Theta(t; k, \tau)|$, то врахувавши властивості елементів матриці $\mathcal{A}_t$ за змінною t, поклавши $t^* = \tau$, для всіх t з $(\tau; \tau+\varepsilon]$ і $k \in \mathbb{Z}^n$, одержимо

$$|q(t,k)| \le m\nu(\varepsilon)(|L_*(k)| + c)|\Theta(t; k, \tau)|,$$

де $\nu(\cdot)$ — аналог функції $\nu_j(\cdot)$ з опису умови 2) з означення класу $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}$. Звідси та з нерівності (2.8), дістанемо

$$|\Theta(t; k, \tau)| \exp\{(t-\tau)(\delta^*/2)(1, \overrightarrow{\Omega}(k))\}$$
$$\le c_1 + c_1 m^2 \nu(\varepsilon)(|L_*(k)| + c)$$
$$\times \int_\tau^t \exp\{(\sigma-\tau)(\delta^*/2)(1, \overrightarrow{\Omega}(k))\} |\Theta(\sigma; k, \tau)|\, d\sigma,$$
$$t \in (\tau; \tau+\varepsilon],\ \tau \in [0; T_0],\ k \in \mathbb{Z}^n.$$

Тепер, поклавши

$$\varphi(t) = |\Theta(t; k, \tau)| \exp\{(t-\tau)(\delta^*/2)(1, \overrightarrow{\Omega}(k))\}, \qquad \psi(t) = c_1,$$

$$\chi(t) = c_1 m^2 \nu(\varepsilon)(|L_*(k)| + c)$$

і врахувавши твердження леми 2 з [6, с. 300], прийдемо до

$$|\Theta(t;k,\tau)| \exp\{(t-\tau)(\delta^*/2)(1,\overrightarrow{\Omega}(k))\} \\ \le c_1 + (c_1 m)^2 \nu(\varepsilon)(|L_*(k)|+c) \\ \times \int\limits_\tau^t \exp\{(t-\sigma)c_1 m^2 \nu(\varepsilon)(|L_*(k)|+c)\}\,d\sigma \\ \le c_1(1+\exp\{(t-\tau)2c_1 m^2\nu(\varepsilon)(|L_*(k)|+c)\}).$$

Далі, виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $2^4 c_1 c_* m^2 \nu(\varepsilon) B \le \delta^*$, де c_* — константа, що відповідає функції $L_*(\cdot)$ (див. умову 1) з опису класу $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}$); B — найменше серед $\widehat{B} > 0$ таких, що $l^l \le \widehat{B}^l l!$, $l \in \mathbb{Z}_+$, а c_1 — константа з оцінки (2.8), тоді

$$\mathrm{e}^{-(t-\tau)(\delta^*/4)(1,\overrightarrow{\Omega}(k))} \exp\{(t-\tau)2c_1 m^2 \nu(\varepsilon)|L_*(k)|\} \\ \le \mathrm{e}^{-(t-\tau)(\delta^*/4)(1,\overrightarrow{\Omega}(k))} \sum_{l=0}^{\infty} ((t-\tau)2c_1 m^2\nu(\varepsilon)|L_*(k)|)^l/l! \\ \le \sum_{l=0}^{\infty} \Big((t-\tau)2c_1 m^2 \nu(\varepsilon) \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \{|L_*(k)|\mathrm{e}^{-(t-\tau)\delta^*(4l)^{-1}(1,\overrightarrow{\Omega}(k))}\}\Big)^l/l! \\ \le \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l},$$

а отже, для $\tau \in [0;T_0]$, $t \in (\tau;\tau+\varepsilon]$ і $k \in \mathbb{Z}^n$,

$$|\Theta(t;k,\tau)| \le c_2 \exp\{-(t-\tau)(\delta^*/4)(1,\overrightarrow{\Omega}(k))\}, \tag{2.9}$$

де c_2 — додатна стала, не залежна від τ, t, k і ε. Лему доведено. □

Наслідок 2.1. *Існують додатні сталі c і δ такі, що для всіх $t \in (\tau;T_0]$, $\tau \in [0;T_0)$ і $k \in \mathbb{Z}^n$*

$$|\Theta(t;k,\tau)| \le c\exp\{-(t-\tau)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(k))\}.$$

Даний наслідок стає очевидним, якщо зважити на те, що згідно з попередньою лемою існує таке розбиття $\{t_j\}_{j=1}^k$ проміжку $(\tau;t]$, $t \in (\tau;T_0]$, на кожному елементі $(t_j;t_{j+1}]$ якого для матриціанта Θ виконується нерівність (2.9) з оціночними сталими, не залежними від t, t_j, t_{j+1} і k, а також, на одну з відомих властивостей матриціанта [15]:

$$\Theta(t_j;\cdot,t_0) = \Theta(t_j;\cdot,t_1)\Theta(t_1;\cdot,t_0) \qquad (\forall\,\{t_0,t_1,t\} \subset (\tau;T_0]).$$

З наслідку 2.1 та теореми 1.3 приходимо до такого твердження.

Лема 2.2. *Нехай вектор-функції* $\overrightarrow{M}$ *та* $\overrightarrow{\Omega}$ *взаємодвоїсті за Юнгом. Тоді матрична функція* $G_t(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Theta_t(k)e^{i(k,\cdot)}$ *належить до класу* $P\mathbb{G}^m_{\overrightarrow{M}}$ *при кожному фіксованому* t *з* $(0;T_0]$, *де* $\Theta_t(\cdot)\overset{\text{def}}{=}\Theta(t;\cdot,0)$.

Наступні допоміжні твердження характеризують властивості $G_t(\cdot)$.

Лема 2.3. *Нехай* $f \in (\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{mT}$, *тоді кожен елемент вектор-функції* $G_t * f$ *— сильно диференційовний по* t *на* $(0;T_0]$.

Доведення. Із того, що f — згортувач у класі $P\mathbb{G}^m_{\overrightarrow{M}}$, а $G_t(\cdot) \in P\mathbb{G}^m_{\overrightarrow{M}}$ (див. твердження теореми 1.6 і леми 2.2), одержуємо рівність

$$c_k(G_t * f) = \Theta_t(k)\overline{c_k(f)}, \qquad k \in \mathbb{Z}^n,\ t \in (0;T_0],$$

з якої, зваживши на те, що $\Theta_t(\cdot)$ — звичайний розв'язок системи (2.4), приходимо до

$$(c_k(G_t * f))'_t = \mathcal{A}_t(k)\Theta_t(k)\overline{c_k(f)}, \qquad k \in \mathbb{Z}^n,\ t \in (0;T_0].$$

Доведемо тепер диференційовність по t на $(0;T_0]$ вектор-функції $G_t * f$, $f \in (\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{mT}$. Для цього досить переконатися в існуванні скінченної границі виразу

$$\Psi^j_{\Delta t}(t,x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{l=1}^{m}((\theta^{jl}_{(t+\Delta t)}(k)-\theta^{jl}_t(k))/\Delta t)\overline{c_k(f_l)}\right)\mathrm{e}^{i(k,x)},$$
$$j=\overline{1,m},\ x\in\mathbb{R}^n,\ t\in(0;T_0],$$

при $\Delta t \to 0$ (тут $\theta^{jl}_t(\cdot)$ — елемент матриціанта $\Theta_t(\cdot)$, а $c_k(f) = (c_k(f_l))^{mT}_{l=1}$).

Оскільки матриціант $\Theta_t(\cdot)$ диференційовний по t на $(0;T_0]$ у звичайному розумінні [15], то згідно з теоремою про скінченні прирости,

$$(\Theta_{(t+\Delta t)}(\cdot)-\Theta_t(\cdot))/\Delta t = \mathcal{A}_{\tau_1}(\cdot)\Theta_{\tau_1}(\cdot),$$
$$\tau_1 = t+\varepsilon\Delta t,\ \varepsilon\in(0;1),\ t\in(0;T_0],\ 0<|\Delta t|\ll 1$$

(бо $\Theta_\tau(\cdot)$ — звичайний розв'язок системи (2.4) для всіх τ з $(0;T_0]$). Тоді

$$\Psi^j_{\Delta t}(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{m}a_{js}(\tau_1,k)\theta^{sl}_{\tau_1}(k)\right)\overline{c_k(f_l)}\right)\mathrm{e}^{i(k,x)}. \tag{2.10}$$

Безпосередньо з властивостей елементів матриці $\mathcal{A}_t$ (див. умову 2) з опису $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}$) та з диференційовності матриціанта $\Theta_t(k)$, приходимо до неперервності по τ на $(0;T_0]$ функції $a_{js}(\tau,k)\theta_\tau^{sl}(k)$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^n$, $\{j,s,l\}\subset\{1;\dots;m\}$, з якої одержуємо, що

$$\lim_{\tau\to t}(a_{js}(\tau,k)\theta_\tau^{sl}(k)) = a_{js}(t,k)\theta_t^{sl}(k) \qquad (\forall\, t\in(0;T_0]).$$

Далі, доведемо рівномірну збіжність по Δt ряду з рівності (2.10) для достатньо малих Δt, всіх $(t,x)\in(0;T_0]\times\mathbb{R}^n$ та $j=\overline{1,m}$. Згідно з властивостями елементів матриці $\mathcal{A}_t$ та наслідком 2.1 одержуємо, що

$$|a_{js}(\tau,k)\theta_\tau^{sl}(k)| \le c_1|L_*(k)|\mathrm{e}^{-\delta\tau(1,\overrightarrow{\Omega}(k))},$$
$$k\in\mathbb{Z}^n,\ \tau\in(0;T_0],\ \{j,s,l\}\subset\{1;\dots;m\},$$

де δ, c_1 — додатні сталі, не залежні від k і τ. Скориставшись твердженням теореми 1.5, дістанемо існування додатньої сталої c_μ такої, що для всіх $0<\mu\ll\delta t/4$, $|\Delta t|<t/2$ і $k\in\mathbb{Z}^n$

$$\begin{aligned}
&|a_{js}(t+\varepsilon\Delta t,k)\theta^{sl}_{(t+\varepsilon\Delta t)}(k)|\,|c_k(f_l)| \\
&\qquad\le c_1c_\mu|L_*(k)|\mathrm{e}^{-\delta2^{-1}t(1,\overrightarrow{\Omega}(k))}\mathrm{e}^{(1,\overrightarrow{\Omega}(\mu k))} \\
&\qquad\le c_1c_\mu\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\{|L_*(k)|\mathrm{e}^{-\delta4^{-1}t(1,\overrightarrow{\Omega}(k))}\right\}\mathrm{e}^{-(\delta4^{-1}t-\mu)(1,\overrightarrow{\Omega}(k))}, \\
&\qquad\qquad t\in(0;T_0],\ \varepsilon\in(0;1),
\end{aligned}$$

а відтак, і рівномірну збіжність по Δt зазначеного ряду.

Таким чином,

$$((G_t*f)(x))'_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\mathcal{A}_t(k)\Theta_t(k)\overline{c_k(f)}\mathrm{e}^{i(k,x)}, \qquad t\in(0;T_0],\ x\in\mathbb{R}^n,$$

а, отже,

$$c_k((G_t*f)'_t) = (c_k(G_t*f))'_t, \qquad k\in\mathbb{Z}^n,\ t\in(0;T_0].$$

Лему доведено. □

Безпосередньо з доведення попереднього твердження одержуємо такий наслідок.

Наслідок 2.2. *Для кожного f з $(\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{m^T}$ вектор-функція $u(t,\cdot)=(G_t*f)(\cdot)$, $t\in(0;T_0]$, є розв'язком системи* (2.1).

Лема 2.4. *Матрична функція $G_t(\cdot)$ прямує до $\delta(\cdot)E$ при $t\to+0$ у $P(\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^m$, де $P(\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^m$ — клас всіляких квадратних матриць, рядками яких є елементи з $(\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^m$ з поелементною збіжністю в просторі $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$, а $\delta(\cdot)$ — дельта-функція Дірака.*

Доведення. Нехай $\varphi^T = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ — довільна вектор-функція з $\mathbb{G}^m_{\overrightarrow{M}}$. Тоді зваживши на структуру [15] матриціанта Θ та властивості матриці $\mathcal{A}_t$, одержимо, що

$$(G_t * \varphi)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Theta_t(k) c_k(\varphi) \mathrm{e}^{i(k,x)} \xrightarrow[t \to +0]{} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} E c_k(\varphi) \mathrm{e}^{i(k,x)} = \varphi(x),$$
$$x \in \mathbb{R}^n$$

(тут $c_k^T(\varphi) = (c_k(\varphi_1), \dots, c_k(\varphi_m))$, $k \in \mathbb{Z}^n$, — послідовність коефіцієнтів Фур'є вектор-функції φ^T).

Отже, $(G_t * \varphi)(\cdot) \to \varphi(\cdot) = (\delta * \varphi)(\cdot)$ при $t \to +0$, тобто $G_t(\cdot) \to \delta(\cdot)E$ у $P(\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^m$. Лему доведено. $\square$

Наступне твердження характеризує розв'язність задачі Коші (2.1), (2.3).

Теорема 2.1. *Нехай елементи матричного символу* $\mathcal{A}_t$ *системи* (2.1) *належать до класу* $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}([0; T_0])$*;* $M_\nu(\cdot)$ *— функція, разом з якою* $\Omega_\nu(\cdot)$ *є взаємодвоїстими за Юнгом* ($\nu \in \{1; \dots; n\}$), *а* $f \in (\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{m^T}$. *Тоді для задачі Коші* (2.1), (2.3) *існує єдиний розв'язок* u, *який неперервно залежить від початкових даних, причому для всіх* $t \in (0; T_0]$:

1) $u(t, \cdot) \in \mathbb{G}^{m^T}_{\overrightarrow{M}}$;

2) $u(t, \cdot) = (G_t * f)(\cdot)$.

Доведення. Якщо $f \in (\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{m^T}$, то згідно з теоремою 1.6, f — згортувач у класі $\mathbb{G}^m_{\overrightarrow{M}}$, а отже, $G_t * f$ належить до $\mathbb{G}^{m^T}_{\overrightarrow{M}}$ при кожному фіксованому $t \in (0; T_0]$ (див. лему 2.2). Більше того, як зазначено в наслідку 2.2, ця вектор-функція є звичайним розв'язком системи (2.1). Те, що $u(t, \cdot) = (G_t * f)(\cdot)$ задовольняє початкову умову (2.3) (у розумінні слабкої збіжності) випливає з твердження леми 2.4.

Єдиність розв'язку задачі Коші (2.1), (2.3) встановлюється традиційно — методом від протилежного. А щодо його неперервної залежності від початкових даних, то нехай $\{f; f_\nu, \nu \geq 1\}$ — довільним чином фіксована послідовність з $(\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{mT}$ така, що $f_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{(\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{m^T}} f$, тобто

$$\langle f_{j,\nu}, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f_{j,\nu})} c_k(\varphi) \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{c_k(f_j)} c_k(\varphi) = \langle f_j, \varphi \rangle,$$
$$j = \overline{1, m}, \ \varphi \in \mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}.$$

Тоді з цих співвідношень одержуємо, що і

$$\langle u_{j,\nu}, \varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{l=1}^m \theta_t^{jl}(k)\overline{c_k(f_{l,\nu})}\right)c_k(\varphi)$$
$$\xrightarrow[\nu\to+\infty]{} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{l=1}^m \theta_t^{jl}(k)\overline{c_k(f_l)}\right)c_k(\varphi) = \langle u_j, \varphi\rangle,$$

для всіх $j=\overline{1,m}$ і $\varphi\in\mathbb{G}_{\overrightarrow{M}}$, тобто $u_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{(\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{m^T}} u$. Теорему доведено. $\square$

Зазначимо, що при деяких додаткових припущеннях на систему (2.1) та вектор-функцію $\overrightarrow{\Omega}$, сформульовані умови в теоремі 2.1 є не лише достатніми, але й необхідними для коректної розв'язності задачі Коші (2.1), (2.3). Опишемо ці припущення: A) функції $\Omega_j(\cdot)$, $j=\overline{1,n}$, окрім раніше описаних властивостей, володіють ще й такою:

$$\Omega_j(\delta x)\geq \widehat{f}_{1j}(\delta)\Omega_j(x)+\widehat{f}_{2j}(\delta), \qquad \delta\in(0;1),\ x\in\mathbb{R},$$

де $\widehat{f}_{1j}(\cdot)$, $\widehat{f}_{2j}(\cdot)$ — довільні функції, обмежені на $(0;1)$, причому $\widehat{f}_{1j}(\cdot)>0$; B) система (2.1) задовольняє не лише умову (2.2), а є такою, що

$$\exists\,\delta_0^*>0\quad \exists\,c_0^*\in\mathbb{R}\quad \forall\,t\in[0;T_0]\quad \forall\,k\in\mathbb{Z}^n:$$
$$\min_{j=\overline{1,m}}\mathrm{Re}\lambda_j(t,k)\geq -\delta_0^*(1,\overrightarrow{\Omega}(k))+c_0^*,$$

де λ_j, $j=\overline{1,m}$, — власні числа матричного символу $\mathcal{A}_t$ системи (2.1).

Правильне таке допоміжне твердження.

Лема 2.5. *Нехай для системи* (2.1) *виконується припущення B), а* $\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$ *— обернена матриця до матриціанта* $\Theta(t;\cdot,\tau)$ *системи* (2.4) *при* $\tau\in[0;t)$, $t\in(0;T_0]$. *Тоді існують додатні сталі* c_0, δ_0, *не залежні від* τ, t *і* k *такі, що для всіх* $\tau\in[0;t)$, $t\in(0;T_0]$, $k\in\mathbb{Z}^n$

$$|\Theta^{-1}(t;k,\tau)|\leq c_0\exp\{(t-\tau)\delta_0(1,\overrightarrow{\Omega}(k))\}.$$

Доведення. Перш за все зазначимо, що $\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau)=\Theta(\tau;\cdot,t)$, $\tau\in[0;t)$, $t\in(0;T_0]$, бо $E=\Theta(\tau;\cdot,\tau)=\Theta(\tau;\cdot,t)\Theta(t;\cdot,\tau)$, $t\in[\tau;T_0]$ (див. відповідні властивості матриціанта [15]). Отже, $\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$ — нормований розв'язок такої задачі Коші:

$$D_\tau\Theta^{-1}(t;k,\tau)=\mathcal{A}_\tau(k)\Theta^{-1}(t;k,\tau), \qquad (\tau,k)\in[0;t)\times\mathbb{Z}^n, \tag{2.11}$$
$$\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau)\big|_{\tau=t}=E.$$

Далі діятимемо аналогічно, як і при доведенні леми 2.1. Зафіксуємо довільне τ^* з $[0;T_0]$ і подамо систему з (2.11) у вигляді

$$D_\tau \Theta^{-1} = \mathcal{A}_{\tau^*}(k)\Theta^{-1} + q(\tau,k),$$

де $q(\tau,\cdot) = (\mathcal{A}_\tau(\cdot) - \mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot))\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$. Тоді

$$\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau) = \mathrm{e}^{(\tau-t)\mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)} + \int\limits_t^\tau \mathrm{e}^{(t-\sigma)\mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)} q(\sigma,\cdot)\,d\sigma,$$

причому правильні такі нерівності

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{e}^{(\tau-t)\mathcal{A}_{\tau^*}(k)}| \\
&\le \exp\big\{(\tau-t)\min_{j=\overline{1,m}}\mathrm{Re}\lambda_j(\tau^*,k)\big\}\Big(1+\sum_{j=1}^{m-1}(2(t-\tau)\|\mathcal{A}_{\tau^*}(k)\|)^j\Big) \\
&\qquad \le c\exp\big\{(t-\tau)2\delta_0^*(1,\overrightarrow{\Omega}(k))\big\} \\
&\times\Big(1+\sum_{j=1}^{m-1}((t-\tau)\sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\big\{|L_*(k)|\mathrm{e}^{-(t-\tau)\delta_0^*/j(1,\overrightarrow{\Omega}(k))}\big\})^j\Big) \\
&\qquad \le c_1\exp\{(t-\tau)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(k))\}, \qquad \tau\in[0;t),
\end{aligned}$$

де c_1 — додатна стала, не залежна від t,τ,τ^* і k, а $\delta = 2\delta_0^*$.

Звідси вже, зваживши на те, що при $\tau^* = t$ для всіх τ з $[t-\varepsilon,t)$, $0<\varepsilon\ll 1$ і $k\in\mathbb{Z}^n$

$$|q(\tau,k)| \le m\nu(\varepsilon)(|L_*(k)|+c)|\Theta^{-1}(t;k,\tau)|,$$

дістанемо

$$\begin{aligned}
&|\Theta^{-1}(t;k,\tau)|\exp\big\{(\tau-t)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(k))\big\}| \\
&\qquad \le c_1 + c_1 m^2\nu(\varepsilon)(|L_*(k)|+c) \\
&\qquad\quad \times\int\limits_t^\tau \exp\big\{(\sigma-t)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(k))\big\}|\Theta^{-1}(t;k,\sigma)|\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Тепер, скориставшись аналогом леми 2 з [6, с. 300], прийдемо до

$$\begin{aligned}
&|\Theta^{-1}(t;k,\tau)|\exp\big\{(\tau-t)\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(k))\big\}| \\
&\qquad \le c_1(1+\exp\big\{(t-\tau)2c_1m^2\nu(\varepsilon)(|L_*(k)|+c)\big\}).
\end{aligned}$$

А відтак, зафіксувавши відповідним чином $\varepsilon > 0$ (див. доведення леми 2.1), дістанемо оцінку

$$|\Theta^{-1}(t;k,\tau)| \le c_2 \exp\left\{(t-\tau)4\delta_0^*(1,\overrightarrow{\Omega}(k))\right\}, \qquad (2.12)$$

для всіх $\tau \in [t-\varepsilon, t)$, $t \in (0;T_0]$ і $k \in \mathbb{Z}^n$, де c_2 — додатна стала, не залежна від τ, t, k і ε.

На завершення зазначимо, що міркуючи аналогічним чином, як і при обгрунтуванні наслідку 2.1, зважаючи при цьому на рівність $\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau) = \Theta(\tau;\cdot,t)$, оцінка (2.12) легко поширюється по змінній τ на увесь проміжок $[0;t)$ для кожного фіксованого t з $(0;T_0]$. Лему доведено. □

Основний результат цього пункту сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються припущення A) і B); елементи матриці $\mathcal{A}_t$ належать до класу $\mathcal{L}_{\overrightarrow{\Omega}}([0;T_0])$, а функції $M_\nu(\cdot)$ і $\Omega_\nu(\cdot)$, $\nu = \overline{1,n}$, — взаємодвоїсті за Юнгом. Тоді для того, щоб задача Коші (2.1), (2.3) була коректно розв'язною, необхідно й достатньо, щоб $f \in (\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{m^T}$. При цьому завжди її розв'язок u:*

1) $u(t,\cdot) \in \mathbb{G}^{m^T}_{\overrightarrow{M}}$;

2) $u(t,\cdot) = (G_t * f)(\cdot)$, $t \in (0;T_0]$.

Доведення. Достатність одержується з теореми 2.1. Доведемо необхідність. Нехай u — розв'язок системи (2.1). Тоді

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k(u) \mathrm{e}^{i(k,x)}, \qquad (t,x) \in (0;T_0] \times \mathbb{R}^n,$$

де $c_k(u) = (\langle \mathrm{e}^{i(k,x)}, u_1\rangle, \ldots, \langle \mathrm{e}^{i(k,x)}, u_m\rangle)^T$. Оскільки u — звичайний розв'язок системи (2.1), то $c_k(u)$ — розв'язок системи (2.4). Виходячи зі структури загального розв'язку системи (2.4) одержимо, що

$$c_k(u) = \Theta_t(k) c_k, \qquad (t,x) \in (0;T_0] \times \mathbb{R}^n,$$

при деякому фіксованому (не залежному від t) вектор-стовпці $c_k = (c_{1,k}, \ldots, c_{m,k})^T$. Зважаючи на те, що $u \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\mathcal{A}_t}) \subset H^{m^T}$, де $H = L_2([0;2\pi])$, дістанемо

$$|c_k(u_j)| = \left|\sum_{l=1}^m \theta_t^{jl}(k) c_{l,k}\right| \le \|u_j\|_H, \qquad j = \overline{1,m},\ k \in \mathbb{Z}^n,\ t \in (0;T_0],$$

або

$$|\Theta_t(k)c_k| \leq c, \qquad k \in \mathbb{Z}^n,\ t \in (0; T_0], \tag{2.13}$$

де $c = \max_{j=\overline{1,m}}\{\|u_j\|_H\}$, а $\|\cdot\|_H$ — норма в просторі H.

Перемноживши почленно нерівність (2.13) на $m|\Theta^{-1}(t;k,0)|$ і скориставшись очевидною нерівністю

$$|(b_{ij})_{i,j=1}^m (d_{i1})_{i=1}^m| \leq m|(b_{ij})_{i,j=1}^m||(d_{i1})_{i=1}^m|,$$

одержимо, що

$$|c_k| \leq cm|\Theta^{-1}(t;k,0)|, \qquad k \in \mathbb{Z}^n,\ t \in (0; T_0].$$

Звідси вже, враховуючи лему 2.5, а також теорему 1.5, приходимо до висновку, що формальні тригонометричні ряди $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_{j,k}\mathrm{e}^{i(k,x)}$, $j = \overline{1,m}$, є елементами з простору $\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}}$.

Далі, оскільки $u(t,\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \Theta_t(k)c_k\mathrm{e}^{i(k,\cdot)}$, $t \in (0;T_0]$, — єдиний розв'язок системи (2.1), який задовольняє початкову умову (2.3), то $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k\mathrm{e}^{i(k,\cdot)}$. Теорему доведено. □

Отже, $(\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^{m^T}$ є, у певному розумінні, максимальним класом узагальнених 2π — періодичних початкових даних, у якому коректно розв'язна (у вказаному сенсі) задача Коші для системи (2.1).

Тепер наведемо твердження, яке характеризує граничні значення розв'язку системи (2.1) при $t \to +0$ у класі $H^m = (L_2([0;2\pi]))^m$.

Теорема 2.3. *Нехай для системи* (2.1) *виконується умова* (2.2)*, а u — розв'язок задачі Коші* (2.1)*,* (2.3)*, побудований за $f^T \in (\mathbb{G}'_{\overrightarrow{M}})^m$. Тоді для того, щоб f^T належав до H^m, необхідно й достатньо, щоб*

$$\exists\, c > 0\ \ \forall\, 0 < t \ll 1\ \ \forall\, j = \overline{1,m}: \ \ \|u_j(t,\cdot)\|_H \leq c, \tag{2.14}$$

при цьому завжди $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{H^{m^T}} f$.

Доведення. З виконання умови (2.14), зваживши на структуру розв'язку задачі Коші (2.1), (2.3) (див. теорему 2.1), одержимо, що

$$\|u_j(t,\cdot)\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left| \sum_{l=1}^m \theta_t^{jl}(k)c_k(f_l) \right|^2 \leq c^2 \qquad (\forall\, t \in (0;T_0]).$$

Звідси, здійснивши граничний перехід при $t \to +0$, на підставі (2.5) дістанемо

$$\|f_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^\infty |c_k(f_j)|^2 \leq c^2, \qquad j = \overline{1,m},$$

тобто $f^T \in H^m$.

Навпаки, якщо $f^T \in H^m$, то згідно з наслідком 2.1, для всіх $j = \overline{1,m}$ і $t \in (0;T_0]$

$$\begin{aligned}\|u_j(t,\cdot)\|_H^2 &\le c^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{l=1}^m \mathrm{e}^{-t\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(k))}|c_k(f_l)|\right)^2 \\ &\le c^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{l=1}^m |c_k(f_l)|\right)^2 \le (cm)^2\sum_{l=1}^m \|f_l\|_H^2 < +\infty.\end{aligned}$$

Крім цього,

$$\begin{aligned}\|u_j(t,\cdot)-f_j\|_H^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\left(\sum_{l=1}^m \theta_t^{jl}(k)c_k(f_l)\right) - c_k(f_j)\right|^2 \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\left|\sum_{l=1}^m \theta_t^{jl}(k)c_k(f_l)\right| + |c_k(f_j)|\right)^2 \\ &\le 2\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\sum_{l=1}^m \theta_t^{jl}(k)c_k(f_l)\right|^2 + \|f_j\|_H^2\right) \\ &\le 2\left(c^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{l=1}^m \mathrm{e}^{-t\delta(1,\overrightarrow{\Omega}(k))}|c_k(f_l)|\right)^2 + \|f_j\|_H^2\right) \\ &\le 2\left((cm)^2\left(\sum_{l=1}^m \|f_l\|_H^2\right) + \|f_j\|_H^2\right) < +\infty \qquad (\forall\, t \in (0;T_0]).\end{aligned}$$

Отже,

$$\|u_j(t,\cdot)-f_j\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left|\sum_{l=1}^m \left(\theta_t^{jl}(k)-\delta_{lj}\right)c_k(f_l)\right|^2 \underset{t\to+0}{\longrightarrow} 0,$$

$$j=\overline{1,m},\ \ \delta_{lj} = \begin{cases}1, & l=j,\\ 0, & l\ne j\end{cases}$$

(див. умову (2.5)). Теорему доведено. □

На завершення зазначимо, що 2π — періодичні параболічні за Ейдельманом системи з неперервними, залежними лише від часу коефіцієнтами, є частковим випадком систем виду (2.1). Для цих систем виконуються припущення A) та B) при цьому, $\Omega_j(\cdot) = (\cdot)^{2b_j}$, $M_j(\cdot) = (\cdot)^{\frac{2b_j}{2b_j-1}}$, $b_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,n}$, а умова опуклості (2.2) еквівалентна умові рівномірної за t $\overrightarrow{2b}$-параболічності.

Література

[1] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции* // Докл. АН СССР, **257** (1981), N 4, 799–804.

[2] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.* Киев: Наук. думка, 1984, 283 с.

[3] В. В. Городецкий, *Задача Коши для параболических по Шилову уравнений в классах обобщенных периодических функций* // Изв. вузов. Математика. (1988), N 5, 82–84.

[4] В. В. Городецький, Я. М. Дрінь, *Параболічні псевдодиференціальні рівняння у просторах узагальнених періодичних функцій* // Доп. АН УРСР. (1991), N 8, 18–22.

[5] В. В. Городецький, *Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу.* Чернівці: Рута, 1998, 219 с.

[6] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа.* М.: Мир, 1968, 428 с.

[7] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.* М.: Физматгиз, 1958, 274 с.

[8] С. Д. Эйдельман, *Параболические системы.* М.: Наука, 1964, 444 с.

[9] Б. Л. Гуревич, *Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для дифференциально-разностных уравнений* // Докл. АН СССР. **108** (1956), N 6, 1001–1003.

[10] J. L. Lions, E. Magenes, *Problems aux Limites non Homogenes et Applications.* V. 3. Dunod, Paris, 1970, 271 p.

[11] В. А. Літовченко, *Коректна розв'язність задачі Коші для одного рівняння інтегрального вигляду* // Укр. мат. журн. **56** (2004), N 2, 185–197.

[12] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций* М.: Физматгиз, 1958, 307 с.

[13] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987, 688 с.

[14] В. А. Літовченко, *Зображення узагальненого диференціювання за Е. Постом у класичній формі дробового диференціювання* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. Чернівці: Рута, (2000), 54–61.

[15] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* 4-е изд. М.: Наука, 1968, 552 с.

Відомості про авторів

Владислав Антонович Літовченко

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського 2,
58012, Чернівці
Україна
E-Mail: vladlit@chnu.cv.ua