Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 3, 378 – 393

Свободные операции на локально нильпотентных многообразиях групп

Владимир В. Лиманский

(*Представлена Б. В. Новиковым*)

Аннотация. В работе рассматриваются свободные в пределах нильпотентного многообразия нулевой экспоненты разложения конечнопорожденных групп, у которых факторгруппы по коммутанту — без кручения. Доказано, что такие разложения изоморфны с точностью до бесконечных циклических сомножителей.

2000 MSC. 20E34.

Ключевые слова и фразы. Нильпотентная группа, многообразие групп, вербальное произведение, изоморфизмы.

1. Введение

1.1. В пределах любого многообразия групп $\mathfrak{M}$ определена операция свободного умножения (см. [8]). Если G и H — группы из $\mathfrak{M}$, то их $\mathfrak{M}$-свободное умножение $G\,(\mathfrak{M})\,H$ можно определить с точностью до изоморфизма как фактор-группу $F/\mathfrak{M}\,(F)$, где $F = G * H$ — абсолютно свободное произведение групп G и H, а $\mathfrak{M}\,(F)$ — вербальная подгруппа F, соответствующая многообразию $\mathfrak{M}$. При этом $G\,(\mathfrak{M})\,H$ содержит подгруппы, изоморфные G и H (и отождествляемые с ними), порождается этими подгруппами (сомножителями), и любые гомоморфизмы подгрупп G и H в любую группу из многообразия $\mathfrak{M}$ продолжаются до гомоморфизма $G\,(\mathfrak{M})\,H$. Если $\mathfrak{M}$ — многообразие всех групп, то $G\,(\mathfrak{M})\,H$ совпадает с их свободным произведением $F = G * H$, если $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ — многообразие коммутативных групп, то $G\,(\mathfrak{M})\,H$ совпадает с прямым произведением $G \times H$ групп G и H.

1.2. Как и в случае прямого произведения, можно предложить "внешнее" определение $\mathfrak{M}$-свободного произведения (начало пункта 1.1) и "внутреннее" определение (третье предложение пункта 1.1) при помощи универсального свойства. Эти два определения совпадают с

Статья поступила в редакцию 9.01.2007

ISSN 1810 – 3200.

точностью до изоморфизма. При “внутреннем” определении $\mathfrak{M}$-свободное произведение обладает свойствами коммутативности: $G(\mathfrak{M})H = H(\mathfrak{M})G$; ассоциативности: $(G\,(\mathfrak{M})\,H)\,(\mathfrak{M})\,K = G\,(\mathfrak{M})\,(H\,(\mathfrak{M})\,K)$. Эти свойства без ссылок будут использоваться в работе. Без ссылок будет осуществляться переход от одного типа определения к другому.

1.3. Для элементов $\mathfrak{M}$-свободного умножения групп G_i, $1 \le i \le n$, которое будет обозначаться через $G = \prod_{i=1}^{n}(\mathfrak{M})G_i$, имеется так называемая правильная запись: $x \in G$, $x = x_1 \dots x_n v$, $x_i \in G_i$; v лежит в декартовой подгруппе (см. [8, 18.35]). Декартова подгруппа совпадает с ядром эпиморфизма G на прямое произведение групп G_i, продолжающего тождественные отображения этих групп.

Утверждение 1.1 ([8, 18.32, 33]). *Для группы $G = \prod_{i=1}^{n}(\mathfrak{M})G_i$ определены проекции $\pi_i : G \to G_i$ на сомножители, причем $\pi_i(x) = x_i$, $i = \overline{1, n}$.*

1.4. Операция свободного в пределах многообразия $\mathfrak{M}$ произведения в работах О. Н. Головина [1, 2], Морана [14, 15] продолжена до ассоциативной и коммутативной операции на класс всех групп. Эта операция называется вербальным произведением. Если G и H — любые группы, то их вербальное произведение, соответствующее многообразию $\mathfrak{M}$, можно определить как $G(\mathfrak{M})H = F/\mathfrak{M}(F) \cap [G, H]$; $F = G * H$ (см. [8, с. 53–60]).

1.5. Задача изучения условий, при которых любые два прямых разложения группы обладают изоморфными продолжениями, — классическая в алгебре. Еще Ремак [16] установил справедливость указанного свойства для прямых разложений конечной группы. В. Крулль [13], О. Ю. Шмидт [12], А. Г. Курош [3] распространили теорему Ремака на другие классы алгебраических систем. О. Н. Головин [2] ввел нильпотентные умножения групп (вербальные, соответствующие многообразию нильпотентных класса $\le n$ групп) и сформулировал задачу обобщения теоремы Ремака — Шмидта для этих операций. На многообразии $\mathfrak{N}_n$ нильпотентных порядка $\le n$ групп нильпотентные умножения совпадают с $\mathfrak{N}_n$-свободными произведениями. Некоторые продвижения в решении задачи Головина содержатся в работах О. Н. Головина [2], М. Ш. Цаленко [9], Р. Стрёйк [17, 18]. Полностью проблема Головина решена в работе автора [4] (см. также [5]).

1.6. Пусть K — абстрактный класс групп. Это означает, что если $G \in K$, то любая изоморфная с G группа тоже из K. Пусть для G и H из K справедливо, что их вербальное произведение $G\,(\mathfrak{M})\,H \in K$ (замкнутость K относительно этой операции). Обозначим через $K\,[\mathfrak{M}]$ коммутативную полугруппу, элементы которой — классы $[G]$, составленные из групп, изоморфных группе G из K, а операция определена по правилу $[G]\,[H] = [G\,(\mathfrak{M})\,H]$.

В случаях, когда теорема об изоморфизмах не имеет места, ее обобщением будет описание строения полугруппы $K[\mathfrak{M}]$. Можно усмотреть некоторую аналогию этой задачи с вычислением K-функтора в алгебраической K-теории. Справедливость теоремы об изоморфизмах была бы эквивалентна свойству полугруппы $K[\mathfrak{M}]$ быть свободной.

1.7. Ниже будут сформулированы основные гипотезы и сделаны ссылки на имеющиеся результаты по тематике настоящей работы.

В настоящей работе рассматривается локально нильпотентное многообразие $\mathfrak{M}$ экспоненты нуль (т. е. когда бесконечная циклическая группа лежит в $\mathfrak{M}$). Пусть K — класс конечнопорожденных нильпотентных групп. Введем на $K[\mathfrak{M}]$ отношение конгруэнции θ: $a\theta b \iff ac^k = bc^l$, c — это класс бесконечной циклической группы, k и l — некоторые натуральные числа.

Гипотеза 1.1. *$K[\mathfrak{M}]/\theta$ — свободная коммутативная полугруппа.*

В настоящей работе справедливость этой гипотезы установлена для случая многообразия $\mathfrak{M}$ нильпотентных ступени $\leq n$ групп и класса K конечнопорожденных нильпотентных ступени $\leq n$ групп G таких, что G/G' — без кручения. Некоторые продвижения в исследовании изоморфизмов нильпотентных разложений конечнопорожденных нильпотентных групп содержатся в работе А. Л. Шмелькина [10]. Полугруппа $K[\mathfrak{M}]$ не является свободной коммутативной. Соответствующие примеры приведены в работе [4]. Однако для случая, когда K — класс конечнопорожденных нильпотентных ступени ≤ 2 групп без кручения, а $\mathfrak{M}$ — многообразие 1) абелевых, 2) нильпотентных ступени ≤ 2 групп, это верно (см. [4]).

Обобщением гипотезы будет задача описания строения полугруппы $K[\mathfrak{M}]$.

Ниже приведены определения, обозначения и результаты, используемые в работе.

1.8. Многообразие — это класс групп, удовлетворяющих заданному множеству тождеств.

1.9. Многообразие называется локально нильпотентным, если его конечнопорожденные группы нильпотентны.

1.10. Для многообразия $\mathfrak{M}$ и группы G через $\mathfrak{M}(G)$ обозначается вербальная подгруппа G, порожденная значениями всех тождеств из $\mathfrak{M}$ на группе G.

1.11. Многообразие называется нильпотентным класса n, если оно определено тождеством $[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}] = 1$. Здесь $[x_1, x_2] =$

$x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$, $[x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}] = [[x_1, x_2, \ldots, x_k], x_{k+1}]$.

1.12. Через $\gamma_k(G)$ будет обозначаться k–ый член нижнего центрального ряда группы G, т. е. вербальная подгруппа, соответствующая тождеству $[x_1, \ldots, x_k] = 1$. В частности, $\gamma_2(G) = G'$ — коммутант группы G.

1.13. Группа G называется магнусовой, если $\gamma_{k+1}(G)/\gamma_k(G)$ не имеют кручения, $k \geq 1$.

Теорема 1.1. *Если G — нильпотентная группа и $g_1, \ldots, g_k$ порождают G по модулю коммутанта G', то $g_1, \ldots, g_k$ порождают G.*

Следствие 1.1. *Если $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм нильпотентных групп, являющийся эпиморфизмом по модулю коммутантов, то φ — эпиморфизм.*

Теорема 1.2. *При выполнении условий следствия* 1.1 *эпиморфный эндоморфизм конечнопорожденной нильпотентной группы G без кручения — автоморфизм* (*т. е. G — хопфова*).

Теорема 1.3 ([7]). *Если H_i — ретракты G_i, то группа, порожденная H_i в $G_1(\mathfrak{M})G_2$, совпадает с $H_1(\mathfrak{M})H_2$.*

1.14. Большую роль в работе играет функтор, сопоставляющий группе G ее фактор-группу $G/G' = \overline{G}$, а гомоморфизму $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм $\overline{\varphi} : \overline{G} \to \overline{H}$, $\overline{\varphi}(gG') = \varphi(g)H'$ (обозначения $\overline{G}$ для G/G' и $\overline{\varphi}$ будут использоваться в дальнейшем). Основную роль в применениях данного функтора играет следствие 1.1 и следующее

Утверждение 1.2. *Если $G = \prod_{i=1}^{n}(\mathfrak{M})G_i$, а $\pi_i : G \to \overline{G_i}$ — проекции $\mathfrak{M}$–свободного произведения на сомножители, то $\overline{G} = \overline{G_1} \times \cdots \times \overline{G_n}$, а $\overline{\pi_i} : \overline{G} \to \overline{G_i}$ — проекции этого прямого произведения на соответствующие сомножители.*

Теорема 1.4. *Если $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$ (т. е. $\mathfrak{M}_1$ определяется большим множеством тождеств, чем $\mathfrak{M}$) и $D = G(\mathfrak{M})H$; $G \in \mathfrak{M}$, $H \in \mathfrak{M}$, то $D/\mathfrak{M}_1(D) \cong G_1\,(\mathfrak{M}_1)\,H_1$, где $G_1 \cong G/\mathfrak{M}_1(G)$, $H_1 \cong H/\mathfrak{M}_1(H)$.*

Доказательство. При естественном эпиморфизме $\sigma : D \to D/\mathfrak{M}_1(D)$ ретракты G и H группы D переходят в группы G_1 и H_1. Т. к. $\operatorname{Ker}\sigma \cap G = \mathfrak{M}_1(D) \cap G = \mathfrak{M}_1(G)$, $\operatorname{Ker}\sigma \cap H = \mathfrak{M}_1(D) \cap H = \mathfrak{M}_1(H)$, то $G_1 \cong G/\mathfrak{M}_1(G)$, $H_1 \cong H/\mathfrak{M}_1(H)$. Группа $D/\mathfrak{M}_1(D)$ порождается G_1 и H_1. Пусть $T = G_1\,(\mathfrak{M}_1)\,H_1$. Гомоморфизмы $G_1 \to D/\mathfrak{M}_1(D)$ и $H_1 \to D/\mathfrak{M}_1(D)$, тождественные на G_1 и H_1, продолжаются до эпиморфизма $\lambda : T \to D/\mathfrak{M}_1(D)$. Эпиморфизмы $G \to G_1$, $H \to H_1$ продолжаются до эпиморфизма $\mu_1 : D \to T$. Так как $T \in \mathfrak{M}_1$, то

$\operatorname{Ker}\mu_1 \supseteq \mathfrak{M}_1(D)$ и найдется эпиморфизм $\mu : D/\mathfrak{M}_1(D) \to T$ такой, что $\mu\sigma = \mu_1$. Проверка на G_1 и H_1 показывает, что $\lambda\mu$ и $\mu\lambda$ — тождественные. Поэтому $D/\mathfrak{M}_1(D) \cong G_1\,(\mathfrak{M}_1)\,H_1$. □

2. Основное разложение

2.1. В этом параграфе все группы предполагаются конечнопорожденными. Это, как правило, не будет оговариваться. Пусть $\mathfrak{M}$ — локально нильпотентное многообразие экспоненты 0. Будем $\mathfrak{M}$-разложения $K(\mathfrak{M})L$ групп из $\mathfrak{M}$ обозначать через $K \circ L$.

Пусть G — конечнопорожденная группа из $\mathfrak{M}$ такая, что $\overline{G} = G/G'$ — группа без кручения. Пусть $G = G_1 \circ G_2 = H_1 \circ H_2$ — два $\mathfrak{M}$-разложения G, а $p_i : G \to G_i$ и $q_j : G \to H_j$ — проекции вербального произведения; $i, j = 1, 2$. Гомоморфизмы p_i, q_j будут рассматриваться как эндоморфизмы G. В соответствии с 1.14 и 1.2, $\overline{G} = \overline{G_1} \times \overline{G_2} = \overline{H_1} \times \overline{H_2}$ — два прямых разложения свободной коммутативной группы $\overline{G}$. Пусть $\eta : G \to \overline{G}$ — естественный эпиморфизм. Выберем свободные базисы: $a_1, \ldots, a_k$ группы $\overline{G_1}$; $a_{k+1}, \ldots, a_n$ группы $\overline{G_2}$; $b_1, \ldots, b_l$ группы $\overline{H_1}$; $b_{l+1}, \ldots, b_n$ группы $\overline{H_2}$. Пусть g_i, $1 \le i \le k$, — естественные прообразы a_i, $1 \le i \le k$, в G_1; g_i, $k+1 \le i \le n$, — прообразы a_i, $k+1 \le i \le n$, в G_2; h_j, $1 \le j \le l$, — прообразы b_j, $1 \le j \le l$, в H_1; h_j, $l+1 \le j \le n$, — прообразы b_j, $l+1 \le j \le n$, в H_2. В соответствии с 1.1 получаем системы образующих в G_1, G_2, H_1, H_2.

Пусть F будет $\mathfrak{M}$-свободная группа ранга n с системой $\mathfrak{M}$-свободных образующих x_i, $1 \le i \le n$. Рассмотрим эпиморфизм $\xi : F \to G$, продолжающий отображения $\xi(x_i) = g_i$, $1 \le i \le n$. Отображение $\overline{\xi} : \overline{F} \to \overline{G}$ будет изоморфизмом $\overline{\xi}(x_i F') = a_i$, $1 \le i \le n$. Выберем в F такие элементы y_j, что $\xi(y_j) = h_j$, $1 \le j \le n$. Система y_j будет еще одной системой $\mathfrak{M}$–свободных образующих F. Пусть $F_1 = \mathrm{gp}\{x_i,\ 1 \le i \le k\}$, $F_2 = \mathrm{gp}\{x_i,\ k+1 \le i \le n\}$, $\Phi_1 = \mathrm{gp}\{y_j,\ 1 \le j \le l\}$, $\Phi_2 = \mathrm{gp}\{y_j,\ l+1 \le j \le n\}$. Тогда F_1, F_2, Φ_1, Φ_2 — подгруппы F, которые сами $\mathfrak{M}$-свободны, и $\xi(F_i) = G_i$, $\xi(\Phi_j) = H_j$; $i, j = 1, 2$. Кроме того, $F = F_1 \circ F_2 = \Phi_1 \circ \Phi_2$ будут $\mathfrak{M}$-разложениями.

2.2. Рассмотрим некоторую группу D из $\mathfrak{M}$ и ее изоморфные копии $D_1, D_2, \ldots, D_m$; $\tau_i : D \to D_i$ — изоморфизмы, относительно которых D отождествляется с D_i. Если φ_i — эндоморфизмы D, то далеко не всегда найдется гомоморфизм $\varphi : D \to \prod_{\alpha=1}^{m}(\mathfrak{M})D_\alpha$ такой, что $\pi_i\varphi = \tau_i\varphi_i$, $1 \le i \le m$. Здесь $\pi_i : \prod_{\alpha=1}^{m}(\mathfrak{M})D_\alpha \to D_i$ — проекции $\mathfrak{M}$-произведения. Однако если φ существует, то будем называть систему φ_i согласованной, а сами φ_i — компонентами φ.

Таким образом, имеем

Определение 2.1. *Система эндоморфизмов* $\varphi_i : D \to D,\ 1 \le i \le m$, *согласована, если для некоторых изоморфизмов* $\tau_i : D \to D_i$ *найдется такой гомоморфизм* $\varphi : D \to \prod_{\alpha=1}^{m}(\mathfrak{M})D_\alpha$, *что* $\forall x \in D$ *правильная запись* $\varphi(x)$ *имеет вид* $\varphi(x) = x_1x_2\ldots x_m v$, *где* $x_i = \tau_i\varphi_i(x) \in D_i$; $v \in [D_\alpha]$ *— элемент из декартовой подгруппы.*

Утверждение 2.1. *Понятие согласованной системы эндоморфизмов не зависит от выбора системы отождествлений* τ_i, $1 \le i \le m$.

Доказательство. Пусть задана другая система эндоморфизмов $\mu_i : D \to \tilde{D}_i,\ 1 \le i \le m$. Пусть σ — изоморфизм

$$\prod_{\alpha=1}^{m}(\mathfrak{M})G_\alpha \to \prod_{\alpha=1}^{m}(\mathfrak{M})\tilde{G}_\alpha,$$

продолжающий $\mu_i\tau_i^{-1},\ 1 \le i \le m$. Тогда $\sigma\varphi : D \to \prod_{\alpha=1}^{m}(\mathfrak{M})\tilde{G}_\alpha$ имеет компоненты φ_i. □

Пример 2.1. Если D будет $\mathfrak{M}$-свободна, то любая ее система эндоморфизмов согласована.

Теорема 2.1. *Если* $\varphi_i,\ 1 \le i \le m$, *и* $\psi_j,\ 1 \le j \le r$, *— согласованные системы эндоморфизмов* D, *то* $\psi_j\varphi_i,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le r$, *— согласованная система эндоморфизмов* D.

Доказательство. Пусть $\tau_i : D \to D_i$ и $\mu_j : D \to D^j$ — системы отождествляющих изоморфизмов для $\varphi_i,\ 1 \le i \le m$, и $\psi_j,\ 1 \le j \le r$. Пусть $\varphi : D \to \prod_{i=1}^{m}(\mathfrak{M})D_i,\ \ \psi : D \to \prod_{j=1}^{r}(\mathfrak{M})D^j$ — гомоморфизмы такие, что $\pi_i\varphi = \tau_i\varphi_i,\ \ \theta_j\psi = \mu_j\psi_j$. Здесь π_i и θ_j — проекции на сомножители первого и второго $\mathfrak{M}$-произведений соответственно. Рассмотрим систему изоморфных копий D_i^j группы D, $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le r$, а $\nu_i^j : D \to D_i^j$ и $\varkappa_i^j$ — соответствующие изоморфизмы и проекции. Пусть изоморфизмы $\gamma_i : \prod_{j=1}^{r}(\mathfrak{M})D^j \to \prod_{j=1}^{r}(\mathfrak{M})D_i^j$ продолжают $\nu_i^j(\mu_j)^{-1}$. Пусть $\gamma_j\psi\tau_i^{-1} : G_i \to \prod_{j=1}^{r}(\mathfrak{M})D_i^j$, а $\zeta : \prod_{i=1}^{m} D_i \to \prod_{i=1}^{m}(\mathfrak{M})\prod_{j=1}^{r}(\mathfrak{M})D_i^j = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{r}(\mathfrak{M})D_i^j$. Покажем, что компоненты $\zeta\varphi$ совпадают с $\nu_i^j\psi_j\pi_i$. Если $x \in D$, то $\varphi(x) = \left(\prod_{i=1}^{m}\tau_i\varphi_i(x)\right)u$ — правильная запись $\varphi(x)$. Здесь $u \in [D_i]$ — элемент декартовой подгруппы. Элемент u при действии ζ переходит в элемент декартовой подгруппы. При действии ζ на $\tau_i\varphi_i(x)$ получим $\gamma_i\psi\tau_i^{-1}\tau_i\varphi_i(x) = (\prod_{j=1}^{r}\nu_i^j(\mu_j)^{-1}\psi_j\varphi_i(x))w$; w лежит в декартовой подгруппе $\prod_{j=1}^{r}(\mathfrak{M})D_i^j$. Поэтому компоненты $\zeta\varphi$ — это $\nu_i^j\psi_j\varphi_i$. Значит, система $\psi_j\varphi_i,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le r$, согласована. □

2.3. Теореме 2.1 можно придать вид, удобный для дальнейшего использования.

Следствие 2.1. *Если системы φ_i, $1 \le i \le m$, и ψ_j, $1 \le j \le r$, согласованы, то, составив формальные суммы $\varphi_1 + \dots + \varphi_m$, $\psi_1 + \dots + \psi_r$ и раскрыв скобки по дистрибутивности в формальном произведении $(\psi_1 + \dots + \psi_r)(\varphi_1 + \dots + \varphi_m)$, получим формальную сумму $\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} \psi_j \psi_i$, система слагаемых которой согласована.*

Утверждение 2.2. *Системы p_1, p_2 и q_1, q_2 обе согласованные для $D = G$ (см. 2.1).*

Пример 2.2. Если D будет $\mathfrak{M}$-свободна, то любая ее система эндоморфизмов согласована.

Следствие 2.2. *После раскрытия скобок по дистрибутивности в формальном ассоциативном, но не коммутативном произведении*

$$\underbrace{(p_1 + p_2)(q_1 + q_2) \dots (p_1 + p_2)(q_1 + q_2)}_{2s \text{ сомножителей}}$$

получается формальная сумма, соответствующая согласованной системе из 2^{2s} гомоморфизмов $p_{\alpha_1} q_{\beta_1} \dots p_{\alpha_s} q_{\beta_s}$; $\alpha_i, \beta_j = 1, 2$.

Утверждение 2.3. *Если φ_i, $1 \le i \le m$, — согласованная система эндоморфизмов G, а θ — еще один эндоморфизм G, то система $\varphi_i \theta$, $1 \le i \le m$, согласована.*

Следствие 2.3. *Система из 2^{2s} эндоморфизмов $p_{\alpha_1} q_{\beta_1} \dots p_{\alpha_s} q_{\beta_s} p_1$, $\alpha_i, \beta_j = 1, 2$, согласована.*

2.4. После перехода к фактор-группам по коммутантам отображения $\overline{p_i}$ и $\overline{q_j}$ становятся проекциями на сомножители прямых разложений, и для них верны соотношения (в кольце эндоморфизмов группы $\overline{G}$):

$$\overline{p_1} + \overline{p_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2} = 1; \tag{2.1}$$

$$\overline{p_1}\ \overline{p_2} = \overline{p_2}\ \overline{p_1} = \overline{q_1}\ \overline{q_2} = \overline{q_2}\ \overline{q_1} = 0; \tag{2.2}$$

$$\overline{p_i^2} = \overline{p_i}, \quad \overline{q_j^2} = \overline{q_j}; \qquad i, j = 1, 2. \tag{2.3}$$

2.5. Пусть M_{2s} — множество последовательностей длины $2s$ с компонентами из $\{1, 2\}$; $\alpha \in M_{2s}$, $\alpha = (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_s, \beta_s)$; $\alpha_i, \beta_j = 1, 2$; $|M_{2s}| = 2^{2s}$. Рассмотрим 2^{2s} изоморфных копий группы G. Группы этой совокупности будем обозначать через G^α, $\alpha \in M_{2s}$. Здесь мультииндекс α использован, чтобы отличать копии группы G друг от друга. Пусть $D_s = \prod_{\alpha\in M_{2s}}(\mathfrak{M})G^\alpha$, $\sigma_\alpha : G \to G^\alpha$ — изоморфизмы, осуществляющие отождествление. Рассмотрим эндоморфизмы $\overline{f_\alpha} = \overline{p_{\alpha_1}}\ \overline{q_{\beta_1}}\ldots\overline{p_{\alpha_s}}\ \overline{q_{\beta_s}}\ \overline{p_1}$, соответствующие согласованной системе $f_\alpha = p_{\alpha_1}q_{\beta_1}\ldots p_{\alpha_s}q_{\beta_s}p_1$ (см. 2.2). Введем на M_{2s} отношение эквивалентности: α эквивалентно α', если $\overline{f_\alpha} = \overline{f_{\alpha'}}$; $\alpha,\alpha'\in M_{2s}$.

Теорема 2.2. *Для любого k найдется такое s, что класс последовательности $\alpha = (\alpha_1,\beta_1,\ldots,\alpha_s,\beta_s)$ содержит $\geq k$ элементов, если хотя бы в одной из последовательностей*

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,1 \tag{2.4}$$

$$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s \tag{2.5}$$

есть неравные числа.

Доказательство. Если в последовательности (2.4) есть $\geq 2k$ перемен чисел, то, выполняя пару преобразований вида

$$\cdots\overline{p_1}\ \overline{q_2}\ \overline{p_2}\cdots = \cdots\overline{p_1}\,(1-\overline{q_1})\,\overline{p_2}\cdots = -\cdots\overline{p_1}\ \overline{q_1}\ \overline{p_2}\cdots \tag{2.6}$$

для двух мест перемены чисел, можно получить k различных последовательностей из класса α. Аналогично для (2.5).

Предположим теперь, что обе последовательности (2.4) и (2.5) содержат $\leq 2k-1$ перемен чисел. Если $s \geq 2k(4k-1)$, найдется фрагмент f_α вида

$$f_\alpha = \ldots p_1\,\underbrace{q_1p_2q_1p_2\ldots q_1p_2}_{2k\ \text{раз}\ p_2}\ldots.$$

Преобразованиями вида (2.6) из f_α можно получить k гомоморфизмов (и k различных последовательностей) из класса α. □

2.6. Таким образом, $\mathfrak{M}$-разложения группы D_s из 2.14 можно записать в виде

$$D_s = \prod_{\Sigma}\left(\prod_{\alpha\in\Gamma}(\mathfrak{M})G^\alpha\right)\circ G^\beta\circ G^\gamma. \tag{2.7}$$

Здесь $\beta = (1,1,\ldots,1)$, $\gamma = (1,2,1,2,\ldots,1,2)$, Γ — это классы эквивалентных элементов на множестве $M_s\setminus\{\beta,\gamma\}$, Σ — совокупность таких классов. Из 2.2 следует, что после выбора s должным образом будет $|\Gamma|\geq k$, $\forall\,\Gamma\in\Sigma$. Из 2.2 следует, что существует гомоморфизм $\varphi : G\to D_s$, компоненты которого f_α, $\alpha\in M_s$.

2.7. Покажем, что группы G^α из разложения (2.7) можно заменить на $\mathfrak{M}$-свободные группы F^α. Здесь $\mu_\alpha : F \to F^\alpha$ — отождествляющие изоморфизмы (F — группа из 2.1); $\alpha \in M_s \setminus \{\beta, \gamma\}$. Получится разложение

$$\widetilde{D_s} = \prod_{\Sigma} \left(\prod_{\alpha\in\Gamma} (\mathfrak{M}) F^\alpha \right) \circ G^\beta \circ G^\gamma. \tag{2.8}$$

Пусть θ_α — проекции $\widetilde{D_s}$ на сомножители, $\alpha \in M_s$. Можно организовать такой гомоморфизм $\tilde{\varphi} : G \to \widetilde{D_s}$, компоненты которого $\theta_\alpha\tilde{\varphi}$, $\alpha \in M_s$, с учетом отождествлений $\mu_\alpha : F \to F_\alpha$ и $\overline{\xi} : \overline{F} \to \overline{G}$ совпадают по модулю коммутанта с f_α, $\alpha \in M_s$.

Утверждение 2.4. *Существует гомоморфизм* $\tilde{\varphi} : G \to \widetilde{D_s}$ *такой, что* $\overline{\xi\mu_\alpha^{-1}\theta_\alpha\tilde{\varphi}} = \overline{f_\alpha}$; $\alpha \neq \beta, \gamma$; $\overline{\theta_\beta\tilde{\varphi}} = \overline{f_\beta}$, $\overline{\theta_\gamma\tilde{\varphi}} = \overline{f_\gamma}$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathfrak{M}$-сомножитель $\prod_{\alpha\in\Gamma}(\mathfrak{M})G^\alpha$ группы D_s. Так как $|\Gamma| \geq n$, то можно выбрать различные элементы $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ из Γ. Рассмотрим бесконечные циклические подгруппы $\mathrm{gp}\{z_i\}$ в группах G^α, $z_i = \sigma_{\alpha^i}(g_i)$, $1 \leq i \leq n$ (см. 2.5). Эти подгруппы будут ретрактами G^{α^i} относительно ретракций:

$$G^{\alpha^i} \to G^{\overline{\alpha^i}} \to \mathrm{gp}\{\overline{z_i}\} \to \mathrm{gp}\{z_i\}. \tag{2.9}$$

Здесь левый гомоморфизм — естественный эпиморфизм, средний — проекция свободной абелевой группы на прямой сомножитель, при которой $\overline{z_j} = \overline{\sigma_{\alpha^i}(g_j)}$ переходит в 1, $j \neq i$, а правый гомоморфизм — изоморфизм циклических групп, при котором $\overline{z_i}$ переходит в z_i. Таким образом, подгруппа $F_\Gamma = \mathrm{gp}\{z_1, \ldots, z_n\}$ группы $\prod_{\alpha\in\Gamma}(\mathfrak{M})G^\alpha$ будет, ввиду 1.3, $\mathfrak{M}$-свободной с системой свободных образующих z_i. Кроме того, F_Γ — ретракт $\prod_{\alpha\in\Gamma}(\mathfrak{M})G^\alpha$ (а также D_s) относительно ретракции π, при которой π будет продолжением ретракций (2.9). Ввиду 2.2, существует гомоморфизм $F \to \prod_{\alpha\in\Gamma}(\mathfrak{M})F^\alpha$ с тождественными компонентами относительно изоморфизмов $\mu_\alpha : F \to F^\alpha$. Составим композицию ρ_Γ этого гомоморфизма с ретракцией π (и изоморфизма $F_\Gamma \to F$, который переводит z_i в x_i):

$$\rho_\Gamma : \prod_{\alpha\in\Gamma}(\mathfrak{M})G^\alpha \xrightarrow{\pi} F_\Gamma \to F \to \prod_{\alpha\in\Gamma}(\mathfrak{M})F^\alpha.$$

Продолжим гомоморфизмы ρ_Γ, $\Gamma \in \Sigma$, и тождественные отображения G^β и G^γ до гомоморфизма $\rho : D_s \to \widetilde{D_s}$. Искомый гомоморфизм $\tilde{\varphi}$ совпадает с $\rho\varphi$.

Для проверки последней части утверждения проведем вычисления по модулю коммутантов, отождествив $\overline{G}$, $\overline{G^\alpha}$, $\overline{F^\alpha}$, $\overline{F}$ при помощи

$\overline{\sigma_\alpha},\ \xi,\ \overline{\mu_\alpha}$ и зафиксировав базис в этой группе $a_i,\ 1 \le i \le n$ (см. 2.1). Тогда $\overline{D_s}$ и $\widetilde{\overline{D_s}}$ совпадают с прямым произведением 2^{2s} экземпляров группы $\overline{G}$. Отображение φ будет переводить элемент $\overline{g} \in \overline{G}$ в элемент прямого произведения с компонентами $\overline{a_\alpha} = \overline{p_{\alpha_1} q_{\beta_1} \dots p_{\alpha_s} q_{\beta_s} p_1(\overline{g})}$, $\alpha = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_s, \beta_s) \in M_s$. Обозначим компоненты этого элемента в базисе a_i, $1 \le i \le n$, через $\overline{a^i_\alpha}$. Получим $\overline{a_\alpha} = \prod_{i=1}^n \overline{a^i_\alpha}$. Отображение $\overline{\pi}$ переводит элемент $(\overline{a_\alpha}),\ \alpha \in \Gamma$, из $\prod^\times_{\alpha \in \Gamma} \overline{G^\alpha}$ в элемент $\prod_{i=1}^n \overline{a^i_{\alpha^i}} \in \overline{G}$. С учетом отождествлений и того факта, что $\overline{p_{\alpha_1} q_{\beta_1} \dots p_{\alpha_s} q_{\beta_s} p_1}$ совпадают при всех $\alpha = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_s, \beta_s)$ из фиксированного Γ, получим, что $\pi(\overline{a_\alpha}) = \prod_{i=1}^n \overline{a^i_\alpha} = \overline{a_\alpha}$. Поэтому все компоненты $\tilde{\varphi}(\overline{g})$ имеют по модулю коммутанта и с учетом отождествлений вид $\overline{a_\alpha},\ \alpha \in M_s$. $\square$

2.8. Рассмотрим конечнопорожденную нильпотентную группу D и эндоморфизм $\varkappa : D \to D$. Пусть $\overline{\varkappa^2} = \overline{\varkappa}$. Здесь $\overline{\varkappa}$ — эндоморфизм $\overline{D} = D/D'$, индуцированный $\varkappa$. Т. е. $\overline{\varkappa}(xD') = \varkappa(x)D'$.

Утверждение 2.5. *Последовательность образов $\varkappa^m(D)$, $m \ge 1$, стабилизируется, т. е. для некоторого m имеем $\varkappa^m(D) = \varkappa^{m+1}(D)$.*

Доказательство. Пусть n — класс нильпотентности группы D. Доказательство индукцией по n. При $n = 1$ имеем $\overline{D} = D,\ \overline{\varkappa} = \varkappa$, и утверждение понятно, так как $\varkappa^2(D) = \varkappa(D)$. Допустим, что утверждение доказано для групп класса нильпотентности $n-1$. Пусть $\gamma_n(D)$ — n-ый член нижнего центрального ряда группы $D,\ \omega = [g_1, g_2, \dots, g_n]$ — левонормированный коммутатор, $g_i \in D$. Из условия утверждения следует, что $\varkappa^2(g) = (\varkappa g)\, v,\ g \in D,\ v \in D'$. Поэтому

$$\begin{aligned}\varkappa^2\omega = \left[\varkappa^2 g_1, \varkappa^2 g_2, \dots, \varkappa^2 g_n\right] \\ = \left[(\varkappa g_1)\, v_1, (\varkappa g_2)\, v_2, \dots, (\varkappa g_n)\, v_n\right] \\ = [\varkappa g_1, \varkappa g_2, \dots, \varkappa g_n] = \varkappa\omega.\end{aligned}$$

Так как левонормированные коммутаторы порождают $\gamma_n(D)$, то $\forall\, \omega \in \gamma_n(D)$ имеем $\varkappa^2(\omega) = \varkappa(\omega)$. Для группы $D/\gamma_n(D)$, по предположению индукции, найдется такое l, что $\delta^l\left(D/\gamma_n(D)\right) = \delta^{l+1}\left(D/\gamma_n(D)\right)$. Здесь δ — эндоморфизм $D/\gamma_n(D)$, индуцированный $\varkappa$. Это означает, что для любого $g \in D$ справедливо $\varkappa^l(g) = \varkappa^{l+1}(g_1)\omega,\ \omega \in \gamma_n(D)$. Отсюда $\omega = \varkappa^{l+1}\left(g_1^{-1}\right)\varkappa^l(g)$; $\varkappa^{l+3}\left(g_1^{-1}\right)\varkappa^{l+2}(g) = \varkappa^{l+2}\left(g_1^{-1}\right)\varkappa^{l+1}(g)$. Значит, $\varkappa^{l+1}(g) = \varkappa^{l+2}\left(g_1 \cdot \varkappa\left(g_1^{-1}\right) g\right)$. Следовательно, $\varkappa^{l+1}(G) = \varkappa^{l+2}(G)$. Что и требовалось доказать. Здесь $m = l + 1$. $\square$

Следствие 2.4. *В обозначениях предыдущего утверждения найдется такое m, что $\varkappa^m(D)$ — ретракт группы D.*

Доказательство. Так как группа D хопфова, то возрастающая последовательность ядер $\operatorname{Ker}\varkappa^m$, $m \geq 1$, стабилизируется. Выберем такое m, что $\varkappa^m(D) = \varkappa^{m+1}(D)$ и $\operatorname{Ker}\varkappa^m = \operatorname{Ker}\varkappa^{m+1}$. Покажем, что D — полупрямое произведение $\operatorname{Ker}\varkappa^m$ при помощи $\varkappa^m(D)$, т. е. $\operatorname{Ker}\varkappa^m \lhd D$ и $D/\operatorname{Ker}\varkappa^m \cong \varkappa^m(D)$. Действительно, пусть $g \in G$. Найдется $h \in D$, что $\varkappa^m(g) = \varkappa^{2m}(h)$. Так как $\varkappa^m\left(g\varkappa^m\left(h^{-1}\right)\right) = \varkappa^m(g)\varkappa^{2m}\left(h^{-1}\right) = 1$, то $v = g\varkappa^m\left(h^{-1}\right) \in \operatorname{Ker}\varkappa^m$ и $g \in \varkappa^m(g)\operatorname{Ker}\varkappa^m$. Кроме того, если $x \in \varkappa^m(D) \cap \operatorname{Ker}\varkappa^m$, то $x = \varkappa^m(y)$ и $1 = \varkappa^m(x) = \varkappa^{2m}(y)$. Т. е. $y \in \operatorname{Ker}\varkappa^m = \operatorname{Ker}\varkappa^{2m}$. Значит, $x = \varkappa^m(y) = 1$. Таким образом, любой элемент $x \in D$ однозначно записывается в виде $x = ab$, $a \in \varkappa^m(D)$, $b \in \operatorname{Ker}\varkappa^m$. Сопоставление элементу x сомножителя a, $\pi(x) = a$, будет ретракцией D на $\varkappa^m(D)$. $\square$

2.9. Целью следующих пунктов является доказательство существования $\mathfrak{M}$-разложения группы $G_1 \circ F_2$ в виде $\widetilde{H_1} \circ \widetilde{H_2}$, при котором проекции на сомножители $\widetilde{H_i}$ по модулю коммутанта и с учетом отождествлений $\overline{G_1} \times \overline{F_2}$ с $\overline{G}$ совпадают с $\overline{q_i}$, $i = 1, 2$. В ряде случаев не будет указываться различие между изоморфными копиями одной и той же группы.

Утверждение 2.6. *Существует гомоморфизм $\eta : G_1 \circ F_2 \to (G_1 \circ F_2)\circ(G_1 \circ F_2)$, проекции которого на сомножители $G_1 \circ F_2$ совпадают по модулю коммутанта с $\overline{q_1}$ и $\overline{q_2}$, при условии, что группа $\overline{G_1 \circ F_2}$ отождествляется с $\overline{G} = \overline{G_1} \times \overline{G_2}$.*

Доказательство. В соответствии с 2.4, существует гомоморфизм $\tilde{\varphi} : G \to \widetilde{D_s}$, компоненты которого по модулю коммутантов и с учетом отождествлений совпадают с $\overline{p_{\alpha_1}}\ \overline{q_{\beta_1}} \dots \overline{p_{\alpha_s}}\ \overline{q_{\beta_s}}\ \overline{p_1}$, $\alpha = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_s, \beta_s) \in M_s$. Рассмотрим гомоморфизм $\omega : \widetilde{D_s} \to (G \circ F) \circ (G \circ F) = T$, продолжающий гомоморфизмы $\xi\mu_\alpha^{-1} : F^\alpha \to G$ при $\alpha = (\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta_{s-1}, \alpha_s, \beta_s)$ и $\alpha_s = \beta_s = 1$ для первого из сомножителей G в группе T, при $\alpha_s = 1$, $\beta_s = 2$ для второго из сомножителей G, при $\alpha_s = 2$, $\beta_s = 1$ для первого из сомножителей F и $\alpha_s = \beta_s = 2$ для второго из сомножителей F. Композиция $\omega\tilde{\varphi} : G \to (G \circ F) \circ (G \circ F)$ имеет по модулю коммутантов и с учетом отождествлений компоненты $\overline{p_1}\ \overline{q_1}\ \overline{p_1}$, $\overline{p_2}\ \overline{q_1}\ \overline{p_1}$, $\overline{p_1}\ \overline{q_2}\ \overline{p_1}$, $\overline{p_2}\ \overline{q_2}\ \overline{p_1}$ на $\mathfrak{M}$-сомножители в группе T. Это следует из соотношения

$$\sum_{\alpha_1,\dots,\beta_{s-1}} \overline{p_{\alpha_1}}\ \overline{q_{\beta_1}}\ \dots \overline{p_{\alpha_{s-1}}}\ \overline{q_{\beta_{s-1}}}\ \overline{p_{\alpha_s}}\ \overline{q_{\beta_s}}\ \overline{p_1} = \overline{p_{\alpha_s}}\ \overline{q_{\beta_s}}\ \overline{p_1}.$$

Здесь использовано то, что $\overline{p_1} + \overline{p_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2} = 1$ (см. (2.1)). Из 2.1 следует существование гомоморфизма $\nu : F \to T$ с компонентами

$\overline{p_1}\ \overline{q_1}\ \overline{p_2},\ \overline{p_2}\ \overline{q_1}\ \overline{p_2},\ \overline{p_1}\ \overline{q_2}\ \overline{p_2},\ \overline{p_2}\ \overline{q_2}\ \overline{p_2}$ на $\mathfrak{M}$-сомножители T (по модулю коммутанта). Продолжая $\omega\tilde{\varphi}$ и ν, получаем гомоморфизм $\tilde{\eta} : G\circ F \to (G\circ F)\circ(G\circ F)$, а составив композицию вложения $G_1\circ F_2 \to G\circ F$, гомоморфизма $\tilde{\eta}$ и гомоморфизма $T \to (G_1\circ F_2)\circ(G_1\circ F_2)$, продолжающего проекции $G \to G_1$, $F \to F_2$ на сомножители $\mathfrak{M}$–произведений, получим гомоморфизм $\eta : G_1\circ F_2 \to (G_1\circ F_2)\circ(G_1\circ F_2)$ с компонентами $\overline{p_1}\ \overline{q_1}\ \overline{p_1},\ \overline{p_2}\ \overline{q_1}\ \overline{p_1},\ \overline{p_1}\ \overline{q_2}\ \overline{p_1},\ \overline{p_2}\ \overline{q_2}\ \overline{p_1}$ для ограничения η на G_1 и с компонентами $\overline{p_1}\ \overline{q_1}\ \overline{p_2},\ \overline{p_2}\ \overline{q_1}\ \overline{p_2},\ \overline{p_1}\ \overline{q_2}\ \overline{p_2},\ \overline{p_2}\ \overline{q_2}\ \overline{p_2}$ для ограничения η на F_2. Если теперь обозначить через $\tilde{G}$ группу $G_1\circ F_2$, то гомоморфизм $\eta : \tilde{G} \to \tilde{G}\circ\tilde{G}$ будет иметь компоненты $\overline{q_1}$ и $\overline{q_2}$ по модулю коммутантов и с учетом отождествлений.

Проверим это. Пусть $x \in \tilde{G}$. Элемент $\overline{x} = x\tilde{G}'$ как принадлежащий $\overline{G_1}\times\overline{G_2}\quad\left(\overline{G_2}\cong\overline{F_2}\right)$, можно записать в виде $\overline{p_1}\ \overline{x}\cdot\overline{p_2}\ \overline{x}$. Отображение $\overline{\eta}$ переводит первое слагаемое в

$$\left(\overline{p_1}\ \overline{q_1}\ \overline{p_1}\ \overline{x}\cdot\overline{p_2}\ \overline{q_1}\ \overline{p_1}\ \overline{x},\ \overline{p_1}\ \overline{q_2}\ \overline{p_1}\ \overline{x}\cdot\overline{p_2}\ \overline{q_2}\ \overline{p_1}\ \overline{x}\right),$$

рассматриваемое как пара из $\overline{\tilde{D}}\times\overline{\tilde{D}}$, а второе слагаемое в

$$\left(\overline{p_1}\ \overline{q_1}\ \overline{p_2}\ \overline{x}\cdot\overline{p_2}\ \overline{q_1}\ \overline{p_2}\ \overline{x},\ \overline{p_1}\ \overline{q_2}\ \overline{p_2}\ \overline{x}\cdot\overline{p_2}\ \overline{q_2}\ \overline{p_2}\ \overline{x}\right).$$

Значит, $\overline{\eta}\ \overline{x} = (\overline{u_1},\overline{u_2})$, где $\overline{u_1} = \overline{p_1}\ \overline{q_1}\ \overline{p_1}\ \overline{x}\cdot\overline{p_2}\ \overline{q_1}\ \overline{p_1}\ \overline{x}\cdot\overline{p_1}\ \overline{q_2}\ \overline{p_1}\ \overline{x}\cdot\overline{p_2}\ \overline{q_2}\ \overline{p_1}\ \overline{x} = \overline{p_1}\ \overline{q_1}\,(\overline{p_1}+\overline{p_2})\,\overline{x}\cdot\overline{p_2}\ \overline{q_1}\,(\overline{p_1}+\overline{p_2})\,\overline{x} = (\overline{p_1}+\overline{p_2})\,\overline{q_1}\ \overline{x} = \overline{q_1}\ \overline{x}$. Использовано равенство $\overline{p_1}+\overline{p_2}=1$. Аналогично проверяется, что $\overline{u_2}=\overline{q_2}\ \overline{x}$. □

Теорема 2.3. *Группа* $\tilde{G} = G_1\circ F_2$ *может быть переразложена* $\tilde{G} = \widetilde{H_1}\circ\widetilde{H_2}$ *так, что* $\widetilde{H_i}$ *по модулю* $\tilde{G}'$ *совпадают с* H_i *(с учетом отождествлений),* $i = 1, 2$.

Доказательство. По 2.6, существует гомоморфизм $\eta : \tilde{G} \to \tilde{G}\circ\tilde{G}$ с компонентами η_1,η_2 такими, что $\overline{\eta_i} = \overline{q_i}$. Если $\eta_i^m(\tilde{G}) = \widetilde{H_i}$ ($\widetilde{H_1}$ в первом сомножителе, $\widetilde{H_2}$ во втором), то, по следствию 2.4, $\widetilde{H_i}$ — ретракты $\tilde{D}$. По 1.3, подгруппа, порожденная $\widetilde{H_i},\ i = 1, 2$, совпадает с $\widetilde{H_1}\circ\widetilde{H_2}$ и является ретрактом $\tilde{D}\circ\tilde{D}$. Так как по модулю коммутантов композиция η и этой ретракции — изоморфизм, то $\tilde{D}\cong\widetilde{H_1}\circ\widetilde{H_2}$. □

3. Теорема об изоморфизмах

В этом параграфе будет рассматриваться нильпотентное класса n многообразие $\mathfrak{M}$ нулевой экспоненты. В качестве класса K будет взят класс конечнопорожденных нильпотентных групп G из $\mathfrak{M}$ таких, что G/G' не имеет кручения. Класс K, очевидно, абстрактный и замкнут относительно $\mathfrak{M}$-свободного умножения. В этом параграфе будет доказана гипотеза для K.

Определение 3.1 ([7]). *Группа G называется стабильно неразложимой, если для любой $\mathfrak{M}$-свободной группы F из K и любого $\mathfrak{M}$-разложения $G \circ F = G_1 \circ G_2$ один из сомножителей G_i будет $\mathfrak{M}$-свободным.*

Определение 3.2 ([7]). *Группы G_1 и G_2 из K называются стабильно изоморфными, если найдутся $\mathfrak{M}$-свободные группы F_1 и F_2 из K такие, что $G_1 \circ F_1$ изоморфна $G_2 \circ F_2$.*

Утверждение 3.1. *Любая конечнопорожденная группа G из $\mathfrak{M}$ после домножения на $\mathfrak{M}$-свободную группу F может быть разложена в $\mathfrak{M}$-произведение конечного числа стабильно неразложимых и не $\mathfrak{M}$-свободных групп. При этом число сомножителей не превышает величины, зависящей от группы G.*

Доказательство. Индукция по классу нильпотентности n многообразия $\mathfrak{M}$. При $n = 1$ рассматриваемые группы из $\mathfrak{M}$ будут свободными коммутативными, и утверждение очевидно. Пусть утверждение для многообразия класса нильпотентности $n-1$ уже установлено, а G — из многообразия $\mathfrak{M}$ класса нильпотентности n и G/G' — без кручения. Допустим, что $G \circ F_2$ разложена в $\mathfrak{M}$-свободное произведение нескольких сомножителей $G_i,\ 1 \leq i \leq t$. Здесь F_2 есть $\mathfrak{M}$-свободная группа. Переходя к фактор-группам по n-му члену нижнего центрального ряда и применив предположение индукции к многообразию $\mathfrak{M}_1$, полученному из $\mathfrak{M}$ добавлением тождества $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = 1$, получим, что $G \circ F_2/\gamma_n(G \circ F_2) = \prod_{i=1}^{t} (\mathfrak{M}_1)(G_i/\gamma_n(G_i))$, и число не $\mathfrak{M}_1$-свободных групп $G_i/\gamma_n(G_i)$ не более чем l, где l зависит от группы G (ввиду 1.4 и того, что $\mathfrak{M}_1(D) = \gamma_n(D)$ при $D \in \mathfrak{M}$).

Пусть группы $G_i/\gamma_n(G_i)$ при $i > l$ будут $\mathfrak{M}_1$-свободные. Построим копредставления групп G, G_i, т. е. зададим G и G_i в виде фактор-групп $\mathfrak{M}$-свободных групп F_1 и Φ_i, $G = F_1/N_1$, $G_i = \Phi_i/M_i$. При этом $N_1 \subseteq F_1'$, $M_i \subseteq \Phi_i'$. Можно считать, что

$$F = F_1 \circ F_2 = \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \cdots \circ \Phi_t, \tag{3.10}$$

группа $G \circ F_2$ может быть отождествлена с F/N. Здесь N — нормальное замыкание N_1 в F. Кроме того, N — нормальное замыкание системы $M_i,\ 1 \leq i \leq t$, в F. И из (3.10) следует, что $M_i \subseteq \gamma_n(\Phi_i)$ при $i > l$. Так как нормальное замыкание $\Phi_i,\ 1 < i \leq l$, не пересекается с $\Phi_{l+1} \circ \cdots \circ \Phi_t$, то $M_i,\ i > l$, лежит в N_1, а так как N_1 — нильпотентная группа с конечным числом образующих, то число Φ_j таких, что $M_j \neq \{1\}$, не может быть больше величины, зависящей от G. □

Следствие 3.1. *Если G — группа из K, то существует такая $\mathfrak{M}$-свободная группа F, что $G \circ F$ разлагается в $\mathfrak{M}$-свободное произведение конечного числа стабильно неразложимых сомножителей.*

Теорема 3.1. *Если группа G из класса K двумя способами разложена в $\mathfrak{M}$-свободное произведение стабильно неразложимых и не $\mathfrak{M}$-свободных групп $G = G_1 \circ \cdots \circ G_k = H_1 \circ \cdots \circ H_l$, то $k = l$, и после возможной перенумерации сомножителей G_i стабильно изоморфны H_i, $1 \le i \le k$.*

Доказательство. Пусть $G = G_1 \circ \cdots \circ G_k = H_1 \circ \cdots \circ H_l$ — два разложения G в произведения стабильно неразложимых подгрупп. Пусть F_i, Φ_j — $\mathfrak{M}$-свободные группы, такие что $F_i/F_i' \cong G_i/G_i'$, $\Phi_j/\Phi_j' \cong H_j/H_j'$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le l$. Эти изоморфизмы зафиксированы, и относительно них будут осуществляться отождествления. Обозначим через $\widetilde{F_1}$ $\mathfrak{M}$-произведение $F_2 \circ \cdots \circ F_k$, через $\widetilde{\Phi_j}$ — $\mathfrak{M}$-произведение $\Phi_1 \circ \cdots \circ \Phi_{j-1} \circ \Phi_{j+1} \circ \cdots \circ \Phi_l$. В силу теоремы 2.3, $G_1 \circ \widetilde{F_1}$ можно разложить в $H_{j1} \circ \widehat{H_{j1}}$. При этом по модулю коммутантов H_{j1}, $\widehat{H_{j1}}$ отождествляется с H_j и $H_1 \circ \cdots \circ H_{j-1} \circ H_{j+1} \circ \cdots \circ H_l$. Из этого немедленно следует, что $G_1 \circ \widetilde{F_1} = H_{11} \circ H_{21} \circ \cdots \circ H_{l1}$, где после факторизации по коммутанту $(H_1/H_1') \times \cdots \times (H_l/H_l')$. Ввиду стабильной неразложимости G_1, все подгруппы $H_{\alpha 1}$, кроме одной (пусть это будет H_{11}), — $\mathfrak{M}$-свободные группы. Следовательно, $H_{\alpha 1} \cong \Phi_\alpha$, $2 \le \alpha \le l$. Композиция $H_{11} \to H_{11} \circ H_{21} \circ \cdots \circ H_{l1} = G_1 \circ \widetilde{F_1} \to G_1 \circ G_2 \circ \cdots \circ G_k = H_1 \circ H_2 \circ \cdots \circ H_l \to H_1$ дает изоморфизм по модулю коммутантов, а, значит, эпиморфизм. По аналогичным соображениям получаем эпиморфизм $H_1 \circ \widetilde{\Phi_1} \to G_i \circ \widetilde{F_i}$, а, значит, и эпиморфизм $G_1 \circ \widetilde{F_1} \to G_i \circ \widetilde{F_i}$. Если $i \ne 1$, то из этого следует, что G_1 будет $\mathfrak{M}$–свободная. Это противоречит условию теоремы. Поэтому $i = 1$, а, значит, $H_1 \circ \Phi_1 \to G_1 \circ \widetilde{F_1}$ — изоморфизм. Продолжая такие же рассуждения, получим изоморфизмы $G_i \circ \widetilde{F_i} \to H_i \circ \widetilde{\Phi_i}$ (после возможной перенумерации сомножителей). Отсюда следует, что $k = l$. А, значит, и завершение доказательства. $\square$

4. Нильпотентные умножения

В этом параграфе рассматривается многообразие $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_n$ нильпотентных класса $\le n$ групп. Для групп из этого класса справедлива приведенная ниже теорема из работы [6].

Теорема 4.1 ([6]). *Если G — конечнопорожденная бесконечная группа без кручения из $\mathfrak{N}_n$, в которой есть хотя бы одна фактор-группа*

$\gamma_{k+1}(G)/\gamma_k(G)$, содержащая элементы конечного порядка (т. е. не магнусова), то G не разложима в n-е нильпотентное произведение.

Теорема 4.2 ([11]). *Если G и H — магнусовы группы из $\mathfrak{N}_n$, то $G(\mathfrak{N}_n)H$ — магнусова.*

Следствие 4.1. *Любая конечнопорожденная нильпотентная класса $\leq n$ группа без кручения после домножения на $\mathfrak{N}_n$-свободную конечнопорожденную группу может быть разложена в $\mathfrak{N}_n$-произведение конечного числа стабильно неразложимых сомножителей, и любые два таких разложения состоят из одинакового числа не $\mathfrak{N}_n$-свободных стабильно изоморфных сомножителей.*

Литература

[1] О. Н. Головин, *Нильпотентные произведения групп* // Матем. сб., **27** (1950), 427–454.

[2] О. Н. Головин, *К вопросу об изоморфизме нильпотентных разложений группы* // Матем. сб., **28** (1951), 442–452.

[3] А. Г. Курош, *Изоморфизмы прямых разложений* // Изв. АН СССР, сер. матем., **7** (1943), N 4, 185–202.

[4] В. В. Лиманский, *Изоморфизмы нильпотентных разложений групп* // УМН, **30** (1975), с. 214.

[5] В. В. Лиманский, *Изоморфизмы нильпотентных разложений групп, обладающих главным рядом* // Тр. ММО, **39** (1979), 135–155.

[6] В. В. Лиманский, *Критерий отсутствия кручения у нильпотентного произведения конечнопорожденных групп*, Известия высших учебных заведений, Математика, N 1, 1981, 58-65.

[7] В. В. Лиманский, *Свободные операции на локально конечных многообразиях групп* // Тр. ММО, **60** (1998), 153–184.

[8] Х. Нейман, *Многообразия групп.* М.: Мир, 1969.

[9] М. Ш. Цаленко, *Об изоморфизмах нильпотентных произведений нильпотентных p-групп* // Изв. АН СССР, сер. матем., **28** (1964), N 1, 225–236.

[10] А. Л. Шмелькин, *Об изоморфизме нильпотетных разложений нильпотентных групп без кручения* // СМЖ, **4** (1963), 1412–1425.

[11] А. Л. Шмелькин, *О нижнем центральном ряде свободного произведения групп* // Алгебра и логика, сем., **8** (1969), N 1, 129–137.

[12] О. Ю. Шмидт, *Über die Zerlegang der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren*, Изв. Киевского ун-та, 1912, 1–6.

[13] W. Krull, *Über verallgemeinerte endlicher Abelsche Gruppen* // Matc. Z., **23** (1925), 161–196.

[14] S. Moran, *Associative operations on groups*, I // Proc. London Math. Soc., **6** (1956), 581–596.

[15] S. Moran, *Associative operations on groups*, II // Proc. London Math. Soc., **8** (1958), 548–568.

[16] R. Remak, *Über die Zerlegang der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren* // J. reine angew Math., **139** (1911), 293–308.

[17] R. Struik Ruth, *On nilpotent products of cyclic groups*, I // Canad. J. Math, **12** (1960), 447–462.

[18] R. Struik Ruth, *On nilpotent products of cyclic groups*, II // Canad. J. Math, **13** (1966), 557–568.

Сведения об авторах

Владимир Васильевич Лиманский

Донецкий национальный университет
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: `lim3@skif.net`