Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 2, 199 – 234

Слабо плоские пространства и границы в теории отображений

Владимир И. Рязанов, Руслан Р. Салимов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Исследуется проблема продолжения на границу так называемых Q-гомеоморфизмов между областями в метрических пространствах с мерами. Сформулированы условия на функцию $Q(x)$ и границу области, при которых всякий Q-гомеоморфизм допускает непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу. Результаты применимы, в частности, к римановым многообразиям, пространствам Левнера, группам Карно и Гейзенберга.

2000 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. Конформные и квазиконформные отображения, граничное поведение, Q-гомеоморфизмы, метрические пространства с мерой, локальная связность на границе, сильно достижимые границы, слабо плоские границы, конечное среднее колебание относительно меры, сильно связные и слабо плоские пространства.

1. Введение

В статье изучаются свойства слабо плоских пространств, которые являются далеко идущим обобщением недавно введенных пространств Левнера, см., напр., [1, 3, 12, 15, 39], и которые включают в себя, в частности, широко известные группы Карно и Гейзенберга, см. [4–8], [13, 14, 19, 20, 23, 29, 31]. На этой основе, в работе построена теория граничного поведения и устранимых особенностей для квазиконформных отображений и их обобщений, применимая во всех перечисленных классах пространств. В частности, доказаны обобщение и усиление известной теоремы Геринга–Мартио о гомеоморфной продолжимости на границу квазиконформных отображений между областями квазиэкстремальной длины, см. [11].

Статья поступила в редакцию 28.02.2007

ISSN 1810 – 3200.

В теории квазиконформных отображений и их обобщений большую роль играют различные модульные неравенства. В связи с этим, следующая концепция была предложена профессором Олли Мартио, см., напр., [25–27] и [17, 18]. Пусть G и G' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q : G \to [1, \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : G \to G'$ называется *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_G Q(x) \cdot \rho^n(x)\ dm(x) \tag{1.1}$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ρ семейства Γ. Эта концепция является естественным обобщением геометрического определения квазиконформного отображения, см. 13.1 и 34.6 в [40] и связана с теорией модулей с весом, см., например, [38].

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds \geq 1 \tag{1.2}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. *Модуль* семейства кривых Γ определяется равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_G \rho^n(x)\, dm(x), \tag{1.3}$$

где m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Проблема локального и граничного поведения Q-гомеоморфизмов изучалась в $\mathbb{R}^n$ в случае $Q \in BMO$ (ограниченного среднего колебания) в работах [25–27] и [32–34], а в случае $Q \in FMO$ (конечного среднего колебания) и в других случаях в работах [17, 18, 35–37]. Ранее модульная техника для метрических пространств развивалась, например, в работах [10, 12, 15, 24].

В дальнейшем (X, d, μ) обозначает пространство X с метрикой d и локально конечной борелевой мерой μ. Областью в X будем называть открытое множество, любые две точки которого можно связать непрерывной кривой.

Пусть G и G' — области с конечными хаусдорфовыми размерностями α и $\alpha' \geq 1$ в пространствах (X, d, μ), и (X', d', μ') и пусть $Q : G \to [0, \infty]$ — измеримая функция. Говорим, что гомеоморфизм $f : G \to G'$ является *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_G Q(x) \cdot \rho^\alpha(x)\, d\mu(x) \tag{1.4}$$

для любого семейства Γ путей в G и любой допустимой функции ρ для Γ.

Модуль семейств кривых Γ в пространстве (X, d, μ) задаем равенством

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_G \rho^\alpha(x)\, d\mu(x), \tag{1.5}$$

где допустимые функции для Γ, по-прежнему, определяются условием вида (1.2). В случае пространства (X', d', μ') в (1.5) берем хаусдорфову размерность α' области G'.

Напомним, что если $\gamma : [a, b] \to X$ — непрерывная кривая в метрическом пространстве (X, d), то ее длина есть супремум сумм

$$\sum_{i=1}^{k} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))$$

над всеми разбиениями $a = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_k = b$ интервала $[a, b]$. Кривая γ называется спрямляемой, если ее длина конечна.

Пространство (X, d, μ) называется *α-регулярным по Альфорсу*, если существует постоянная $C \ge 1$ такая, что

$$C^{-1} r^\alpha \le \mu(B_r) \le C r^\alpha \tag{1.6}$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r < \operatorname{diam} X$. Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α, см., напр., [12, с. 61]. Пространство (X, d, μ) будем называть *регулярным по Альфорсу*, если оно α-регулярно по Альфорсу для некоторого $\alpha \in (1, \infty)$.

Будем говорить, что пространство (X, d, μ) — *α-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0, r)) \le C r^\alpha \tag{1.7}$$

для всех шаров $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Будем также говорить, что пространство (X, d, μ) — *α-регулярно сверху*, если условие (1.7) выполнено в каждой точке.

2. О связностях в топологических пространствах

Приведем некоторые топологические определения и замечания общего характера, которые будут полезны в дальнейшем. Пусть T — произвольное топологическое пространство. *Кривой* в T называется непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \to T$. В дальнейшем $|\gamma|$ обозначает $\gamma([a, b])$. Если A, B и C — множества в T, то $\Delta(A, B, C)$ обозначает множество всех кривых γ, которые соединяют A и B в C, т.е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in C$, $t \in (a, b)$.

Напомним, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых открытых множества. Компактные связные пространства называются *континуумами.* Топологическое пространство T будем называть *линейно связным*, если любые две точки x_1 и x_2 можно соединить непрерывным путем $\gamma : [0, 1] \to T$, $\gamma(0) = x_1$ и $\gamma(1) = x_2$. *Областью* в T будем называть открытое линейно связное множество. Метрическое пространство T будем называть *спрямляемо связным*, если любые его две точки x_1 и x_2 можно соединить спрямляемой кривой. Область в T будем называть *спрямляемой*, если она спрямляемо связна. Область G называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap G$ связно, ср. [22, с. 232]. Аналогично, мы говорим, что область G *локально линейно* (*спрямляемо*) *связна в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \cap G$ линейно (спрямляемо) связно.

Предложение 2.1. *Пусть T — топологическое* (*метрическое*) *пространство с базой $\mathcal{B}$ топологии, состоящей из линейно* (*спрямляемо*) *связных множеств. Тогда произвольное открытое множество Ω в T является связным тогда и только тогда, когда Ω линейно* (*спрямляемо*) *связно.*

Следствие 2.1. *Открытое множество Ω в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, или в любом многообразии является связным тогда и только тогда, когда Ω линейно* (*спрямляемо*) *связно.*

Замечание 2.1. Таким образом, если область G в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, локально связна в точке $x_0 \in \partial G$, то она и локально линейно (спрямляемо) связна в x_0. То же самое верно и на многообразиях. Как мы покажем далее, связность и линейная (спрямляемая) связность эквивалентны для открытых множеств в так называемых слабо плоских (спрямляемых) пространствах, которые включают в себя хорошо известные широкие классы пространств Левнера, группы Карно и Гейзенберга.

Доказательство предложения 2.1. Пусть Ω линейно связно. Если Ω при этом несвязно, то $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 — открытые непустые и непересекающиеся множества. Возьмем по точке $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$ и соединим их непрерывной кривой $\gamma : [0, 1] \to \Omega, \gamma(0) = x_1$ и $\gamma(1) = x_2$. Тогда множества $\omega_1 = \gamma^{-1}\Omega_1$ и $\omega_2 = \gamma^{-1}\Omega_2$ — непересекающиеся, непустые и открытые в $[0, 1]$, по непрерывности γ. Однако, последнее противоречит связности отрезка $[0, 1]$.

Пусть теперь Ω связно. Возьмем произвольную точку $x_0 \in \Omega$ и обозначим через Ω_0 множество всех точек x_* в Ω, которые можно соединить с x_0 конечной цепью множеств $B_k \subset \Omega$ из базы $\mathcal{B}$, $k = 1, \ldots, m$, так что $x_0 \in B_k$, $x_* \in B_m$, и $B_k \cap B_{k+1} \neq \emptyset$, $k = 1, \ldots, m-1$.

Заметим, во-первых, что множество Ω_0 открыто. Если $y_0 \in \Omega_0$, то найдется ее окрестность $B_0 \subseteq \Omega$ из базы $\mathcal{B}$ и все точки указанной окрестности принадлежат Ω_0. Во-вторых, множество Ω_0 замкнуто в Ω.

Действительно, допустим, что $\partial\Omega_0 \cap \Omega \neq \emptyset$. Тогда для любой точки $z_0 \in \partial\Omega_0 \cap \Omega$ найдется ее окрестность $B_0 \subseteq \Omega$ из базы $\mathcal{B}$, а в этой окрестности найдется точка $x_* \in \Omega_0$, поскольку $z_0 \in \partial\Omega_0$. Таким образом, $z_0 \in \Omega_0$ по определению Ω_0. Однако, Ω_0 открыто, и потому $\Omega_0 \cap \partial\Omega_0 = \emptyset$. Полученное противоречие опровергает предположение.

Итак, Ω_0 одновременно открыто и замкнуто в Ω и, следовательно, совпадает с Ω ввиду его связности. Однако, Ω_0, очевидно, линейно связно.

Наконец, если пространство обладает базой $\mathcal{B}$ топологии, состоящей из спрямляемо связных множеств, то, покрывая любой путь γ в T элементами этой базы, получаем его конечное подпокрытие, ведущее к построению спрямляемого пути. □

Предложение 2.2. *Если область G в метрическом пространстве (X, d) локально линейно (спрямляемо) связна в точке $x_0 \in \partial G$, то x_0 достижима из G некоторым непрерывным (локально спрямляемым) путем.*

Доказательство. Выберем последовательность окрестностей V_m точки x_0, где $W_m = V_m \cap G$ линейно связны и $W_m \subset B(x_0, 2^{-m})$, а также последовательность точек $x_m \in W_m$ и соединим точки x_m и x_{m+1} попарно непрерывными (спрямляемыми) кривыми γ_m в W_m. Объединение кривых γ_m и дает искомый путь в точку x_0 из G. □

Говорят, что семейство кривых Γ_1 в T *минорируется* семейством кривых Γ_2 в T, пишут $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma_1 \in \Gamma_1$ найдется кривая $\gamma_2 \in \Gamma_2$ такая, что γ_2 есть сужение γ_1.

Предложение 2.3. *Пусть Ω — открытое множество в произвольном топологическом пространстве T. Тогда*

$$\Delta(\Omega, T \setminus \Omega, T) > \Delta(\Omega, \partial\Omega, \Omega)\,.$$

Доказательство. Действительно, для произвольной кривой $\gamma : [a, b] \to T$ с $\gamma(a) \in \Omega$ и $\gamma(b) \in T \setminus \Omega$, прообраз $\omega = \gamma^{-1}(\Omega) \subset [a, b]$ — открытое множество (по непрерывности γ), которое содержит a. Аналогично, прообраз $\omega = \gamma^{-1}(T \setminus \overline{\Omega}) \subseteq [a,b]$ также открыт. Таким образом, ввиду связности отрезка $[a,b]$, найдется $c \in \gamma^{-1}(\partial\Omega)$ такое, что $\gamma([a,c)) \subset \Omega$. $\square$

Предложение 2.4. *Пусть γ — спрямляемая кривая в метрическом пространстве (X,d), соединяющая точки $x_1 \in B(x_0,r_1)$ и $x_2 \in X \setminus \overline{B(x_0,r_2)}$, где $0 < r_1 < r_2 < \infty$, а $\rho : [0,\infty] \to [0,\infty]$ — борелевская функция. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} \rho(d(x,x_0))\, ds \geq \int\limits_{r_1}^{r_2} \rho(r)\, dr.$$

Доказательство. Действительно, по определению длины кривой в метрическом пространстве $\gamma : [a,b] \to X$, длина сегмента кривой

$$s(t_1,t_2) \geq d(\gamma(t_1),\gamma(t_2))\,.$$

Кроме того, по неравенству треугольника

$$d(x_0,\gamma(t_2)) \leq d(x_0,\gamma(t_1)) + d(\gamma(t_1),\gamma(t_2))$$

и

$$d(x_0,\gamma(t_1)) \leq d(x_0,\gamma(t_2)) + d(\gamma(t_1),\gamma(t_2)),$$

таким образом,

$$d(\gamma(t_1),\gamma(t_2)) \geq |d(x_0,\gamma(t_2)) - d(x_0,\gamma(t_1))|.$$

Следовательно,

$$ds \geq |dr|,$$

где $r = d(x,x_0), \quad x = x(s)$. Наконец, по свойству Дарбу связных множеств, непрерывная функция $d(x,x_0)$ принимает все промежуточные значения на γ, см., напр., [22, с. 137]. Поэтому кратность любого значения r в интервале (r_1,r_2) на кривой не менее 1, и требуемое неравенство следует. $\square$

Предложение 2.5. *Если Ω и Ω' — открытые множества в метрических пространствах (X,d) и (X',d'), а $f : \Omega \to \Omega'$ — гомеоморфизм, то предельное множество f в точке $x_0 \in \partial\Omega$,*

$$C(x_0,f) := \left\{x' \in X' : x' = \lim_{n\to\infty} f(x_n),\ x_n \to x_0\right\},$$

находится на границе множества Ω'.

Доказательство. Действительно, допустим, что некоторая точка $y_0 \in C(x_0, f)$ лежит внутри области Ω'. Тогда по определению предельного множества найдется последовательность $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ такая, что $y_n = f(x_n) \to y_0$. Ввиду непрерывности обратного отображения $g = f^{-1}$ имеем, что $x_n = g(y_n) \to g(y_0) = x_* \in \Omega$. Однако, сходящаяся последовательность x_n не может иметь два предела $x_0 \in \partial\Omega$ и $x_* \in \Omega$ ввиду неравенства треугольника $d(x_*, x_0) \leq d(x_*, x_n) + d(x_n, x_0)$. $\square$

3. О слабо плоских границах

В данной секции G — область конечной хаусдорфовой размерности $\alpha \geq 1$ в пространстве (X, d, μ) с метрикой d и локально конечной борелевской мерой μ.

Будем говорить, что граница области G *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial G$, если, для любой окрестности U точки x_0, найдется компакт $E \subset G$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; G)) \geq \delta$$

для любого континуума F в G, пересекающего ∂U и ∂V.

Будем также говорить, что граница ∂G — *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial G$, если для любого числа $P > 0$ и окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; G)) \geq P \tag{3.1}$$

для любых континуумов E и F в G, пересекающих ∂U и ∂V.

Граница ∂G называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы.

Замечание 3.1. В определении слабо плоских и сильно достижимых границ, можно ограничиться какой-либо базой окрестностей точки x_0 и, в частности, в качестве окрестностей U и V точки x_0 можно брать шары (открытые или замкнутые) с центром в точке x_0.

Предложение 3.1. *Если ∂G — слабо плоская в точке $x_0 \in \partial G$, то ∂G сильно достижима из G в точке x_0.*

Доказательство. Пусть $P \in (0, \infty)$ и $U = B(x_0, r_0)$, где $0 < r_0 < d_0 = \sup\limits_{x \in G} d(x, x_0)$. Тогда по условию леммы найдется $r \in (0, r_0)$ такое, что выполняется неравенство (3.1) для любых континуумов E и F, пересекающих $\partial B(x_0, r_0)$ и $\partial B(x_0, r)$. Ввиду связности G, найдутся точки $y_1 \in G \cap \partial B(x_0, r_0)$ и $y_2 \in G \cap \partial B(x_0, r)$. Выберем в качестве компакта E любую кривую, соединяющую точки y_1 и y_2 в G. Тогда для любого континуума F в G, пересекающего ∂U и ∂V, где $V = B(x_0, r)$, имеет место (3.1). $\Box$

Лемма 3.1. *Пусть G — открытое линейно (спрямляемо) связное множество в (X, d, μ). Если ∂G — слабо плоская в точке $x_0 \in \partial G$, то G локально линейно (спрямляемо) связно в x_0.*

Доказательство. Допустим, что область G не является локально линейно связной в точке x_0. Тогда найдется $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup_{x\in G} d(x, x_0)$, такое, что $\mu_0 := \mu(G \cap B(x_0, r_0)) < \infty$, и для любой окрестности $V \subseteq U := B(x_0, r_0)$ точки x_0, выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

1) $V \cap G$ имеет по крайней мере две линейно (спрямляемо) связные компоненты K_1 и K_2 такие, что $x_0 \in \overline{K_1} \cap \overline{K_2}$;

2) $V \cap G$ имеет бесконечное число линейно (спрямляемо) связных компонент $K_1, \ldots, K_m, \ldots$ таких, что $x_0 = \lim_{m\to\infty} x_m$, для которых $x_m \in K_m$. Заметим, что $\overline{K_m} \cap \partial U \neq \emptyset$ при всех $m = 1, 2, \ldots$ ввиду линейной (спрямляемой) связности G.

В частности, 1) или 2) верно для окрестности $V = U = B(x_0, r_0)$. Пусть $r_* \in (0, r_0)$. Тогда

$$M(\Delta(K_i^*, K_j^*; G)) \leq M_0 := \frac{\mu_0}{[2(r_0 - r_*)]^\alpha} < \infty,$$

где $K_i^* = K_i \cap \overline{B(x_0, r_*)}$ и $K_j^* = K_j \cap \overline{B(x_0, r_*)}$ при всех $i \neq j$. Действительно, допустимой функцией для семейства Γ_{ij} всех спрямляемых кривых из $\Delta(K_i^*, K_j^*; G)$ является

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(r_0 - r_*)}, & x \in B_0 \setminus \overline{B_*}, \\ 0, & x \in X \setminus (B_0 \setminus \overline{B_*}), \end{cases}$$

где $B_0 = B(x_0, r_0)$ и $B_* = B(x_0, r_*)$, поскольку компоненты K_i и K_j не могут быть связаны непрерывным (спрямляемым) путем в $V = B(x_0, r_0)$, а любой (спрямляемый) путь, соединяющий K_i^* и K_j^*, по крайней мере, дважды пересекает кольцо $B_0 \setminus \overline{B_*}$. Ввиду 1) - 2), оценка противоречит условию слабой плоскости в точке x_0.

Действительно, по этому условию, например, найдется $r \in (0, r_*)$ такое, что

$$M(\Delta(K_{i_0}^*, K_{j_0}^*; G)) \geq M_0 + 1$$

для некоторой пары i_0 и j_0, $i_0 \neq j_0$, поскольку в соответствующих $K^*_{i_0}$ и $K^*_{j_0}$ найдется по замкнутой кривой, пересекающих $\partial B(x_0, r_*)$ и $\partial B(x_0, r)$.

Таким образом, предположение о нарушении локальной линейной (спрямляемой) связности области G в точке x_0 было неверным. □

Следствие 3.1. (*Спрямляемые*) *области со слабо плоскими границами локально линейно* (*спрямляемо*) *связны во всех точках границы.*

4. О конечном среднем колебании относительно меры

Пусть G — область в пространстве (X, d, μ). Аналогично [17], ср. также [16], будем говорить, что функция $\varphi : G \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in \overline{G}$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon| \; d\mu(x) < \infty, \tag{4.1}$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{\mu(G(x_0,\varepsilon))} \int_{G(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, d\mu(x) -$$

среднее значение функции $\varphi(x)$ по множеству $G(x_0, \varepsilon) = \{x \in G : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ относительно меры μ. Здесь условие (4.1) включает предположение, что φ интегрируема относительно меры μ по некоторому множеству $G(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Предложение 4.1. *Если для некоторого набора чисел* $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon| \;\; d\mu(x) < \infty, \tag{4.2}$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

Доказательство. Действительно, по неравенству треугольника

$$\fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, d\mu(x) \leq \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\, d\mu(x) + |\varphi_\varepsilon - \overline{\varphi}_\varepsilon|$$

$$\leq 2 \cdot \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\, d\mu(x).$$

□

Следствие 4.1. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \ \fint_{G(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)|\, d\mu(x) < \infty, \tag{4.3}$$

то $\varphi \in FMO(x_0)$.

Варианты следующей леммы были сначала доказаны для BMO функций и внутренних точек области G в $\mathbb{R}^n$ при $n = 2$ и $n \geq 3$, соответственно в [32–34] и [26, 27], а затем для граничных точек G в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с условием удвоения меры и FMO функций в [17].

Лемма 4.1. *Пусть* G *— область в пространстве* (X, d, μ) α*-регулярном сверху с* $\alpha \geq 2$ *в точке* $x_0 \in \overline{G}$ *и*

$$\mu(G \cap B(x_0, 2r)) \leq \gamma \cdot \log^{\alpha-2}\frac{1}{r} \cdot \mu(G \cap B(x_0, r)) \qquad \forall\, r \in (0, r_0). \tag{4.4}$$

Тогда для любой неотрицательной функции $\varphi : G \to \mathbb{R}$ *класса* $FMO(x_0)$

$$\int\limits_{G\cap A(\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\, d\mu(x)}{\left(d(x,x_0)\log\frac{1}{d(x,x_0)}\right)^{\alpha}} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{4.5}$$

при $\varepsilon \to 0$ *и некотором* $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, *где* $\delta_0 = \min\,(e^{-e}, d_0)$, $d_0 = \sup\limits_{x\in G} d(x, x_0)$,

$$A(\varepsilon, \varepsilon_0) \;=\; \{x \in X : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}.$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$ такое, что функция φ интегрируема в $G_0 = G \cap B_0$ относительно меры μ, где $B_0 = B(x_0, \varepsilon_0)$,

$$\delta = \sup_{r\in(0,\varepsilon_0)} \ \fint_{G(r)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_r|\, d\mu(x) < \infty,$$

$G(r) = G \cap B(r)$, $B(r) = B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$. Далее, пусть $\varepsilon < 2^{-1}\varepsilon_0$, $\varepsilon_k = 2^{-k}\varepsilon_0$, $A_k = \{x \in X : \varepsilon_{k+1} \leq d(x, x_0) < \varepsilon_k\}$, $B_k = B(\varepsilon_k)$ и пусть φ_k — среднее значение функции $\varphi(x)$ в $G_k = G \cap B_k$, $k = 0, 1, 2\ldots$ относительно меры μ. Выберем натуральное число N такое, что $\varepsilon \in [\varepsilon_{N+1}, \varepsilon_N)$ и обозначим $\varkappa(t) = (t\log_2 1/t)^{-\alpha}$. Тогда $G \cap A(\varepsilon, \varepsilon_0) \subset \Delta(\varepsilon) := \bigcup_{k=0}^{N} \Delta_k$, где $\Delta_k = G \cap A_k$ и

$$\eta(\varepsilon) = \int\limits_{\Delta(\varepsilon)} \varphi(x)\varkappa(d(x, x_0))\, d\mu(x) \leq |S_1| + S_2,$$

$$S_1(\varepsilon)=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\Delta_k}(\varphi(x)-\varphi_k)\varkappa(d(x,x_0))\,d\mu(x)\ ,$$

$$S_2(\varepsilon)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_k\int\limits_{\Delta_k}\varkappa(d(x,x_0))\,d\mu(x).$$

Так как $G_k\subset G(2d(x,x_0))$ для $x\in\Delta_k$, то по условию (1.7) $\mu(G_k)\le\mu(G(2d(x,x_0)))\le C\cdot 2^{\alpha}\cdot d(x,x_0)^{\alpha}$, т.е. $\frac{1}{d(x,x_0)^{\alpha}}\le C\cdot 2^{\alpha}\frac{1}{\mu(G_k)}$.

Кроме того, $\frac{1}{(\log_2\frac{1}{d(x,x_0)})^{\alpha}}\le\frac{1}{k^{\alpha}}$ для $x\in\Delta_k$ и, таким образом,

$$|S_1|\le\delta C\cdot 2^{\alpha}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{\alpha}}\le 2\delta C\cdot 2^{\alpha},$$

поскольку при $\alpha\ge 2$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}<\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dt}{t^{\alpha}}=\frac{1}{\alpha-1}\le 1.$$

Далее,

$$\int\limits_{\Delta_k}\varkappa(d(x,x_0))\,d\mu(x)\le\frac{1}{k^{\alpha}}\int\limits_{A_k}\frac{d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}}$$
$$\le\frac{C\cdot 2^{\alpha}}{k^{\alpha}}\cdot\frac{\mu(G_k)-\mu(G_{k+1})}{\mu(G_k)}\le\frac{C2^{\alpha}}{k^{\alpha}}.$$

Кроме того, по условию (4.4)

$$\mu(G_{k-1})=\mu(B(2\varepsilon_k)\cap G))\le\gamma\cdot\log_2^{\alpha-2}\frac{1}{\varepsilon_k}\cdot\mu(G_k),$$

а потому

$$|\varphi_k-\varphi_{k-1}|=\frac{1}{\mu(G_k)}\left|\int\limits_{G_k}(\varphi(x)-\varphi_{k-1})\,d\mu(x)\right|$$
$$\le\frac{\gamma\cdot\log_2^{\alpha-2}\frac{1}{\varepsilon_k}}{\mu(G_{k-1})}\int\limits_{G_{k-1}}|(\varphi(x)-\varphi_{k-1})|\,d\mu(x)\le\delta\cdot\gamma\cdot\log_2^{\alpha-2}\frac{1}{\varepsilon_k}$$

и, по убыванию ε_k,

$$\varphi_k=|\varphi_k|\le\varphi_1+\sum_{l=1}^{k}|\varphi_l-\varphi_{l-1}|\le\varphi_1+k\delta\gamma\cdot\log_2^{\alpha-2}\frac{1}{\varepsilon_k}.$$

Следовательно, поскольку при $\alpha \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \leq 1 + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{\alpha - 1} \leq 2,$$

имеем следующие оценки

$$\begin{aligned} S_2 = |S_2| &\leq C2^{\alpha} \sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi_k}{k^{\alpha}} \leq C2^{\alpha} \sum_{k=1}^{N} \frac{\varphi_1 \ + k\delta\gamma \cdot \log_2^{\alpha-2} \frac{1}{\varepsilon_k}}{k^{\alpha}} \\ &\leq C2^{\alpha}\left(2\varphi_1 + \delta\gamma \sum_{k=1}^{N} \frac{(k + \log_2 \varepsilon_0^{-1})^{\alpha-2}}{k^{\alpha-1}}\right) \\ &= C2^{\alpha}\left(2\varphi_1 + \delta\gamma \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \frac{(k + \log_2 \varepsilon_0^{-1})^{\alpha-2}}{k^{\alpha-2}}\right) \\ &\leq C2^{\alpha}\left(2\varphi_1 + \delta\gamma(1 + \log_2 \varepsilon_0^{-1})^{\alpha-2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

и

$$\eta(\varepsilon) \leq 2^{\alpha+1}C(\delta + \varphi_1) + 2^{\alpha}C\delta\gamma(1 + \log_2 \varepsilon_0^{-1})^{\alpha-2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Так как

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} < \int\limits_{1}^{N} \frac{dt}{t} = \log N < \log_2 N$$

и для $\varepsilon_0 \in (0, 2^{-1})$ и $\varepsilon < \varepsilon_N$

$$N < N + \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) = \log_2 \frac{1}{\varepsilon_N} < \log_2 \frac{1}{\varepsilon},$$

то при $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 = \min(e^{-e}, d_0)$ и $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned} \eta(\varepsilon) \leq 2^{\alpha+1}C(\delta + \varphi_1) + 2^{\alpha}C\delta\gamma(1 + \log_2 \varepsilon_0^{-1})^{\alpha-2} &\left(1 + \log_2 \log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right) \\ &= O\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

□

Замечание 4.1. Отметим, что условие (4.4) слабее *условия удвоения меры*:

$$\mu(G \cap B(x_0, 2r)) \leq \gamma \cdot \mu(G \cap B(x_0, r)) \qquad \forall\, r \in (0, r_0), \tag{4.6}$$

которое использовалось ранее в контексте $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в работе [17]. Заметим также, что условие (4.6) автоматически выполняется во внутренних точках области G, если X регулярно по Альфорсу.

5. О непрерывном продолжении на границу

В дальнейшем (X, d, μ) и (X', d', μ') — пространства с метриками d и d' и локально конечными борелевскими мерами μ и μ', а G и G' — области конечной хаусдорфовой размерности α и $\alpha' \geq 1$ в (X, d) и (X', d'), соответственно.

Лемма 5.1. *Пусть область G локально линейно связна в точке $x_0 \in \partial G$, $\overline{G'}$ — компакт, а $f : G \to G'$ — Q-гомеоморфизм такой, что $\partial G'$ сильно достижима хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \left\{ y \in X' : \ y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), \ x_k \to x_0, \ x_k \in G \right\}, \tag{5.1}$$

$Q : G \to [0, \infty]$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{G(x_0,\varepsilon)} Q(x) \cdot \psi^{\alpha}_{x_0,\varepsilon}(d(x, x_0))\, d\mu(x) \ = \ o(I^{\alpha}_{x_0}(\varepsilon)) \tag{5.2}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $G(x_0, \varepsilon) = \{x \in G : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon(x_0)\}$, $\varepsilon(x_0) \in (0, d(x_0))$, $d(x_0) = \sup_{x\in G} d(x, x_0)$, и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ — семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0, \infty)$ таких, что

$$0 < I_{x_0}(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty, \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{5.3}$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Доказательство. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0, f)$ состоит из единственной точки. Отметим, что $E \neq \emptyset$ ввиду компактности $\overline{G'}$, см., напр., [22, замечание 3, п. 41]. По условию леммы, $\partial G'$ сильно достижима в некоторой точке $y_0 \in E$. Допустим, что существует хотя бы еще одна точка $y^* \in E$. Пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < d(y_0, y^*)$.

В силу локальной линейной связности области G в точке x_0, найдется последовательность окрестностей V_m точки x_0 такая, что $G_m = G \cap V_m$ — области и $d(V_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда найдутся точки y_m и $y^*_m \in F_m$, близкие к y_0 и y^*, соответственно, для которых

$d'(y_0, y_m) < r_0$ и $d'(y_0, y^*_m) > r_0$, которые можно соединить непрерывными кривыми C_m в областях $F_m = fG_m$. По построению

$$C_m \cap \partial B(x_0, r_0) \neq \emptyset,$$

ввиду связности C_m.

По условию сильной достижимости найдется компакт $C \subset G'$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(C, C_m, G')) \geq \delta$$

для больших m, поскольку $\mathrm{dist}(y_0, C_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Заметим, что $K = f^{-1}(C)$ является компактом как непрерывный образ компакта. Таким образом, $\varepsilon_0 = \mathrm{dist}(x_0, K) > 0$.

Пусть Γ_ε — семейство всех непрерывных путей в G, соединяющих шар $B_\varepsilon = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, с компактом K. Пусть $\psi^*_{x_0,\varepsilon}$ — борелевская функция, такая что $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t) = \psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ для п.в. $t \in (0, \infty)$, которая существует по теореме Лузина, см., напр., [9, 2.3.5].

Тогда функция

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi^*_{x_0,\varepsilon}(d(x, x_0))/I_{x_0}(\varepsilon), & x \in G(x_0, \varepsilon), \\ 0, & x \in X \backslash G(x_0, \varepsilon), \end{cases}$$

допустима для Γ_ε по предложению 4 и, следовательно,

$$M(f\Gamma_\varepsilon) \leq \int\limits_G Q(x) \cdot \rho^\alpha_\varepsilon(x)\, d\mu(x).$$

Поэтому $M(f\Gamma_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ ввиду (5.2).

С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при больших m имеет место включение $G_m \subset B_\varepsilon$, и потому $C_m \subset fB_\varepsilon$, и, таким образом,

$$M(f\Gamma_\varepsilon) \geq M(\Delta(C,_m; G')).$$

Полученное противоречие опровергает предположение, что предельное множество E является невырожденным. $\square$

Следствие 5.1. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \int\limits_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^\alpha(d(x, x_0))\, d\mu(x) < \infty, \tag{5.4}$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$ такая, что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

и $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то* Q*-гомеоморфизм* $f : G \to G'$ *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* (X', d').

Здесь предполагается, что функция Q продолжена нулем вне G.

Замечание 5.1. Другими словами, достаточно, чтобы сингулярный интеграл в (5.4) сходился в смысле главного значения в точке x_0 хотя бы для одного ядра ψ с неинтегрируемой особенностью в нуле. Более того, как показывает лемма, достаточно, чтобы указанный интеграл даже расходился, но с контролируемой скоростью:

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^{\alpha}(d(x, x_0))\, d\mu(x) = o(I^{\alpha}(\varepsilon, \varepsilon_0)) \tag{5.5}$$

Выбирая в лемме 5.1 $\psi(t) \equiv 1/t$, получаем следующую теорему.

Теорема 5.1. *Пусть* G *локально линейно связна в точке* $x_0 \in \partial G$, $\overline{G'}$ *— компакт и* $\partial G'$ *сильно достижима. Если измеримая функция* $Q : G \to [0, \infty]$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)\, d\mu(x)}{d(x, x_0)^{\alpha}} = o\left(\left[\log \frac{1}{\varepsilon}\right]^{\alpha}\right) \tag{5.6}$$

при $\varepsilon \to 0$, *где* $G(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in G : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\}$, *для* $\varepsilon_0 < d(x_0) = \sup\limits_{x\in G} d(x, x_0)$, *то любой* Q*-гомеоморфизм* $f : G \to G'$ *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* (X', d').

Следствие 5.2. *В частности, заключение теоремы* 5.1 *остается в силе, если сходится сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x) d\mu(x)}{d(x, x_0)^{\alpha}} \tag{5.7}$$

в окрестности точки x_0 *в смысле главного значения.*

Здесь как и в следствии 5.1 подразумевается, что Q продолжена нулем вне G.

Комбинируя леммы 4.1 и 5.1, выбирая $\psi_{\varepsilon}(t) \equiv t \log \frac{1}{t}$, $t \in (0, \delta_0)$, получаем следующую теорему.

Теорема 5.2. *Пусть* X α*-регулярно сверху в точке* $x_0 \in \partial G$, $\alpha \geq 2$, *где* G *локально линейно связна и удовлетворяет условию* (4.4), *а* $\overline{G'}$ *компактно и* $\partial G'$ *сильно достижима. Если* $Q \in FMO(x_0)$, *то любой* Q*-гомеоморфизм* $f : G \to G'$ *продолжим в точку* x_0 *по непрерывности в* (X', d').

Комбинируя теорему 5.2 и следствие 4.1, получаем следующее утверждение.

Следствие 5.3. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \quad \fint\limits_{G(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, d\mu(x) < \infty, \tag{5.8}$$

где $G(x_0,\varepsilon) = \{x \in G : d(x,x_0) < \varepsilon\}$, то любой Q-гомеоморфизм $f : G \to G'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

6. О продолжении на границу обратных отображений

Лемма 6.1. *Пусть $f : G \to G'$ — Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1_\mu(G)$. Если область G локально линейно связна в точках x_1 и $x_2 \in \partial G$, $x_1 \neq x_2$, а G' имеет слабо плоскую границу, то $C(x_1,f) \cap C(x_2,f) = \emptyset$.*

Доказательство. Пусть $_i = C(x_i,f)$, $i = 1,2$, и $\delta = d(x_1,x_2)$. Предположим $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. Так как область G локально линейно связна в точках x_1 и x_2, существуют окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2, соответственно, такие, что $W_1 = G \cap U_1$ и $W_2 = G \cap U_2$ – области и $U_1 \subset B_1 = B(x_1,\delta/3)$ и $U_2 \subset B_2 = B(x_2,\delta/3)$. Тогда по неравенству треугольника $dist(W_1,W_2) \geq \frac{\delta}{3}$ и функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{3}{\delta}, & x \in G, \\ 0, & x \in X \setminus G \end{cases}$$

является допустимой для семейства кривых $\Gamma = \Delta(W_1,W_2;G)$. Таким образом,

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_X Q(x)\,\rho^\alpha(x)\, d\mu(x) \leq \frac{3^\alpha}{\delta^\alpha} \int\limits_G Q(x)\, d\mu(x) < \infty,$$

поскольку $Q \in L^1_\mu(G)$.

Последняя оценка противоречит, однако, условию слабой плоскости (3.1), если найдется $y_0 \in E_1 \cap E_2$. Действительно, тогда $y_0 \in \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$ и в областях $W_1^* = fW_1$ и $W_2^* = fW_2$ найдется по непрерывной кривой, пересекающей любые наперед заданные сферы $\partial B(y_0,r_0)$ и $\partial B(y_0,r_*)$ с достаточно малыми радиусами r_0 и r_*. Поэтому предположение, что $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ неверно. $\square$

По лемме 6.1 получаем, в частности, следующее заключение.

Теорема 6.1. *Пусть G локально линейно связна во всех своих граничных точках и $\overline{G}$ — компакт, G' имеет слабо плоскую границу, а $f : G \to G'$ — Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1_\mu(G)$. Тогда обратный гомеоморфизм $g = f^{-1} : G' \to G$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g} : \overline{G'} \to \overline{G}$.*

Замечание 6.1. Здесь, в лемме 6.1 и теореме 6.1, как и во всех последующих теоремах, достаточно требовать вместо условия $Q \in L^1_\mu(G)$ интегрируемость Q в окрестности ∂G, предполагая Q продолженным нулем вне G.

7. О гомеоморфном продолжении на границу

Комбинируя результаты предыдущих секций, получаем следующие теоремы.

Лемма 7.1. *Пусть G локально связна на границе, G' имеет слабо плоскую границу и $\overline{G}$, $\overline{G'}$ — компакты. Если функция $Q : G \to [0, \infty]$ класса $L^1_\mu(G)$ удовлетворяет условию* (5.2) *в каждой точке $x_0 \in \partial G$, то любой Q-гомеоморфизм $f : G \to G'$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{G} \to \overline{G'}$.*

Теорема 7.1. *Пусть G и G' имеют слабо плоские границы, а $\overline{G}$ и $\overline{G'}$ — компакты и пусть $Q : G \to [0, \infty]$ — функция класса $L^1_\mu(G)$ с*

$$\int\limits_{G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^\alpha\right) \tag{7.1}$$

в каждой точке $x_0 \in \partial G$, где $G(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in G : \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0) < d(x_0) = \sup_{x\in G} d(x,x_0)$. Тогда любой Q-гомеоморфизм $f : G \to G'$ допускает продолжение до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{G} \to \overline{G'}$.

Следствие 7.1. *В частности, заключение теоремы* 7.1 *имеет место, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)\, d\mu(x)}{d(x,x_0)^\alpha} \tag{7.2}$$

сходится в смысле главного значения во всех граничных точках.

Как и ранее, здесь подразумевается, что Q продолжена нулем вне G.

Теорема 7.2. *Пусть G — область в α-регулярном сверху пространстве (X,d,μ), $\alpha\geq 2$, которая локально линейно связна и удовлетворяет условию (4.4) во всех граничных точках, G' — область в пространстве (X',d',μ') со слабо плоской границей, а $\overline{G}$ и $\overline{G'}$ — компакты. Если функция $Q:G\to[0,\infty]$ имеет конечное среднее колебание во всех граничных точках, то любой Q-гомеоморфизм $f:G\to G'$ продолжим до гомеоморфизма $\overline{f}:\overline{G}\to\overline{G'}$.*

Следствие 7.2. *В частности, заключение теоремы* 7.2 *имеет место, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \ \fint\limits_{G(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,d\mu(x)<\infty, \tag{7.3}$$

во всех точках $x_0\in\partial G$, где $G(x_0,\varepsilon)=\{x\in G:\ d(x,x_0)<\varepsilon\}$.

8. Модуль семейств кривых, проходящих через фиксированную точку

В этой секции устанавливаются условия на меру, при которых модуль семейств кривых, проходящих через фиксированную точку, равен нулю.

Лемма 8.1. *Пусть, для некоторого $R_0\in(0,\infty)$, выполнено условие*

$$\int\limits_{A(x_0,r,R_0)}\psi^{\alpha}(d(x,x_0))\,d\mu(x)=o\left(\left[\int\limits_r^{R_0}\psi(t)\,dt\right]^{\alpha}\right) \tag{8.1}$$

при $r\to 0$, где $A(x_0,r,R_0)=\{x\in X:\ r<d(x,x_0)<R_0\}$ и $\psi(t)$ — неотрицательная функция на $(0,\infty)$ такая, что

$$0<\int\limits_r^{R_0}\psi(t)\,dt<\infty\qquad\forall\, r\in(0,R_0).$$

Тогда семейство всех кривых в X, проходящих через точку x_0, имеет нулевой модуль.

Замечание 8.1. Из условия (8.1) следует, что при $r\to 0$

$$\int\limits_{A(x_0,r,r_0)}\psi^{\alpha}(d(x,x_0))\,d\mu(x)=o\left(\left[\int\limits_r^{r_0}\psi(t)\,dt\right]^{\alpha}\right)\qquad\forall\ r_0\in(0,R_0). \tag{8.2}$$

Доказательство леммы 8.1. Пусть Γ — семейство всех путей в X, проходящих через точку x_0. Тогда $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$, где Γ_k — семейство всех путей, проходящих через x_0 и пересекающих сферу $S_k = S(x_0, r_k)$, для некоторой последовательности $r_k \in (0, R_0)$, $r_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Однако, $M(\Gamma_k) = 0$. Действительно, функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \psi(d(x,x_0)) \left(\int\limits_r^{r_k} \psi(t)\, dt \right)^{-1}, & x \in A_k(r), \\ 0, & x \in X \backslash A_k(r), \end{cases}$$

где $A_k(r) = A(x_0, r, r_k)$ является допустимой для семейства $\Gamma_k(r)$ всех путей, пересекающих сферы S_k и $S(x_0, r)$, $r \in (0, r_k)$. Так как $\Gamma_k > \Gamma_k(r)$, то

$$M(\Gamma_k) \le M(\Gamma_k(r)) \le \left(\int\limits_r^{r_k} \psi(t)\, dt \right)^{-\alpha} \int\limits_{A_k(r)} \psi^{\alpha}(d(x,x_0))\, d\mu(x)$$

и по условию (8.1), см. также (8.2), из произвола $r \in (0, r_k)$ вытекает, что $M(\Gamma_k) = 0$.

Наконец, из полуаддитивности модуля следует, что

$$M(\Gamma) \le \sum_{k=1}^{\infty} M(\Gamma_k) = 0.$$

$\square$

Теорема 8.1. *Пусть для некоторого $R_0 \in (0, \infty)$ при $r \to 0$*

$$\int\limits_{A(x_0,r,R_0)} \frac{d\mu(x)}{d^{\alpha}(x,x_0)} = o\left(\left[\log \frac{R_0}{r} \right]^{\alpha} \right). \tag{8.3}$$

Тогда семейство всех кривых в X, проходящих через точку x_0, имеет нулевой модуль.

Замечание 8.2. Для $X = \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и $R_0 \in (0, \infty)$,

$$\int\limits_{A(x_0,r,R_0)} \frac{dm(x)}{|x - x_0|^n} = \omega_{n-1} \log \left(\frac{R_0}{r} \right) = o\left(\left[\log \frac{R_0}{r} \right]^{n} \right), \tag{8.4}$$

где m обозначает меру Лебега, а ω_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Для α-регулярных сверху в точке x_0 пространств (X, d, μ) с $\alpha > 1$,

$$\int\limits_{r<d(x_0,x)<R_0} \frac{d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}} = O\left(\log\frac{R_0}{r}\right), \tag{8.5}$$

см. [12, с. 54] и, таким образом, условие (8.3) автоматически выполняется.

9. Слабо плоские и сильно связные пространства

Напомним, что топологическое пространство T называется *локально (линейно или спрямляемо) связным в точке* $x_0 \in T$, если для любой окрестности U точки x_0, найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0, которая (линейно или спрямляемо) связна, см. [22, с. 232]. Будем говорить, что пространство T (*линейно или спрямляемо*) *связно в точке* x_0, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \setminus \{x_0\}$ (линейно или спрямляемо) связно. Отметим, что (линейная или спрямляемая) связность пространства T в точке x_0 влечет его локальную (линейную или спрямляемую) связность в точке x_0. Обратное заключение, вообще говоря, неверно.

Как и ранее, здесь (X, d, μ) и (X', d', μ') — пространства с метриками d и d' и локально конечными борелевыми мерами μ и μ', G и G' — области в X и X' с конечными хаусдорфовыми размерностями α и $\alpha' \geq 1$, соответственно.

Линейно связное пространство (X, d, μ) будем называть *сильно связным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности U точки x_0 найдутся окрестность $V \subseteq U$ точки x_0, компакт E в X и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; X)) \geq \delta$$

для любого континуума F в X, пересекающего ∂V и ∂U.

Линейно связное пространство (X, d, μ) будем называть *слабо плоским в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности U точки x_0 и любого числа $P > 0$ найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что

$$M(\Delta(E, F; X)) \geq P$$

для любых континуумов E и F в X, пересекающих ∂V и ∂U.

Пространство (X, d, μ) будем называть *слабо плоским* (*сильно связным*), если оно является слабо плоским (сильно связным) в каждой точке.

Замечание 9.1. В определениях слабо плоских и сильно связных пространств, можно ограничиться какой-либо базой окрестностей точки x_0 и, в частности, в качестве окрестностей U и V можно брать шары (открытые или замкнутые) с центром в точке x_0. Также очевидно, что любая область в слабо плоском пространстве является слабо плоским пространством.

Следующие два утверждения доказываются аналогично предложению 3.1 и лемме 3.1, соответственно, и поэтому мы опускаем здесь их доказательства.

Предложение 9.1. *Если пространство (X, d, μ) — слабо плоское в точке $x_0 \in X$, то X сильно связно в x_0.*

Лемма 9.1. *Если пространство X — слабо плоское в точке $x_0 \in X$, то X локально линейно связно в x_0. Если X дополнительно спрямляемо связно, то X локально спрямляемо связно в x_0.*

Комбинируя лемму 9.1 с предложением 2.1, получаем следующее заключение.

Следствие 9.1. *Открытое множество Ω в слабо плоском (спрямляемом) пространстве (X, d, μ) линейно (спрямляемо) связно тогда и только тогда, когда оно связно.*

Следствие 9.2. *Область G в слабо плоском (спрямляемом) пространстве (X, d, μ) локально линейно (спрямляемо) связна в точке $x_0 \in \partial G$ тогда и только тогда, когда G локально связна в x_0.*

Комбинируя леммы 8.1 и 9.1, получаем следующий результат.

Теорема 9.1. *Если (спрямляемое) пространство (X, d, μ) является слабо плоским в точке $x_0 \in X$ и выполнено условие (8.1), в частности, (8.3), то X линейно (спрямляемо) связно в точке x_0.*

По замечанию 8.2 приходим к следующему заключению.

Следствие 9.3. *Если (спрямляемое) пространство X является слабо плоским и α-регулярным сверху в точке x_0 с $\alpha > 1$, то X линейно (спрямляемо) связно в точке x_0.*

Аналогично [11], область G в (X, d, μ) будем называть *областью квазиэкстремальной длины*, сокр. КЭД-*областью*, если

$$M(\Delta(E, F; X)) \leq K\, M(\Delta(E, F; G)) \tag{9.1}$$

для конечного числа $K \geq 1$ и всех континуумов E и F в G.

Как видно непосредственно из определений, КЭД-область G в слабо плоских пространствах имеет слабо плоскую границу и, как следствие, ∂G сильно достижима и, кроме того, G локально линейно связна во всех точках границы. Таким образом, все приведенные выше результаты о продолжении на границу Q-гомеоморфизмов имеют место для КЭД-областей в слабо плоских пространствах. Приведем резюме этих результатов.

Лемма 9.2. *Пусть f — Q-гомеоморфизм между КЭД-областями G и G' в слабо плоских пространствах X и X', $\overline{G'}$ — компакт и пусть в точке $x_0 \in \partial G$ выполнено условие*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\,\psi^{\alpha}(d(x,x_0))\,d\mu(x) = o\left(\left[\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt\right]^{\alpha}\right) \tag{9.2}$$

при $\varepsilon \to 0$, где

$$A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0) = \{x \in G : \varepsilon < d(x,x_0) < \varepsilon_0\}$$

и $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$ такая, что

$$0 < \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$$

Тогда существует предел $f(x)$ при $x \to x_0$.

Следствие 9.4. *В частности, предел $f(x)$ при $x \to x_0$ существует, если*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} Q(x)\,\psi^{\alpha}(d(x,x_0))\,d\mu(x) \;<\; \infty \tag{9.3}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt \;=\; \infty\,. \tag{9.4}$$

Теорема 9.2. *Пусть f — Q-гомеоморфизм между КЭД-областями G и G' в слабо плоских пространствах X и X' и пусть $\overline{G'}$ — компакт. Если в точке $x_0 \in \partial G$*

$$\int\limits_{A(x_0,\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}} \;=\; o\left(\left[\log\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right]^{\alpha}\right), \tag{9.5}$$

то f допускает непрерывное продолжение в точку x_0.

Следствие 9.5. *В частности, заключение теоремы* 9.2 *имеет место, если сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)} < \infty \tag{9.6}$$

сходится в окрестности x_0 *в смысле главного значения.*

Лемма 9.3. *Пусть* f — Q*-гомеоморфизм между КЭД-областями* G *и* G' *в слабо плоских пространствах* X *и* X' *и пусть* $\overline{G}$ — *компакт. Если* $Q \in L^1_\mu(G)$, *то обратный гомеоморфизм* $g = f^{-1}$ *допускает непрерывное продолжение* $\overline{g} : \overline{G'} \to \overline{G}$.

Теорема 9.3. *Пусть* f — Q*-гомеоморфизм между КЭД-областями* G *и* G' *в слабо плоских пространствах* X *и* X' *и пусть* $\overline{G}$ *и* $\overline{G'}$ — *компакты. Если* $Q \in L^1_\mu(G)$ *удовлетворяет условию* (9.5) *или* (9.6) *в каждой точке* $x_0 \in \partial G$, *то* f *допускает гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{G} \to \overline{G'}$.

Теорема 9.4. *Пусть* f — Q*-гомеоморфизм между КЭД-областями* G *и* G' *в слабо плоских пространствах* X *и* X' *и пусть* $\overline{G}$ *и* $\overline{G'}$ — *компакты. Если в некоторой точке* $x_0 \in \partial G$ *функция* $Q : X \to [0,\infty]$ *имеет конечное среднее колебание и*

$$\mu(G \cap B(x_0, 2r)) \leq \gamma \cdot \log^{\alpha-2}\frac{1}{r}\cdot \mu(G\cap B(x_0,r)) \qquad \forall\, r \in (0, r_0), \tag{9.7}$$

а (X,d,μ) α — *регулярно сверху с* $\alpha \geq 2$, *то* f *допускает непрерывное продолжение в точку* x_0. *Если условие* (9.7) *выполнено в каждой точке* ∂G, *то* f *допускает гомеоморфное продолжение.*

Замечание 9.2. В случае регулярных по Альфорсу пространств имеет место даже условие удвоения меры, которое сильнее условия (9.7), см. замечание 4.1. В силу компактности $\overline{G}$, Q интегрируема в окрестности ∂G, что следует из условия конечного среднего колебания в точках ∂G, см. замечание 6.1. Если Q задана только в области G, то ее всегда можно продолжить нулем вне G. В этом случае для того, чтобы $Q \in FMO(x_0),\ x_0 \in \partial G$, достаточно выполнения условия

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,d\mu(x) < \infty. \tag{9.8}$$

Замкнутое множество A в пространстве (X,d,μ) будем называть *множеством нулевой экстремальной длины*, сокр., НЭД-*множеством*, если

$$M(\Delta(E,F;D)) = M(\Delta(E,F;D\setminus A)) \tag{9.9}$$

для любой области D в X и любых континуумов E и F в D.

Также как и в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, НЭД-множества A в слабо плоских пространствах не могут иметь внутренних точек и, кроме того, они не разбивают пространство X даже локально, точнее, $G \setminus A$ имеет единственную компоненту линейной связности для любой области G в X. Таким образом, дополнение НЭД-множеств A в X представляют собой весьма частный случай КЭД-областей. Поэтому НЭД-множества в слабо плоских пространствах играют ту же роль в проблемах устранимости особых множеств при квазиконформных отображениях и их обобщениях как и в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Предложение 9.2. *Пусть A — НЭД-множество в слабо плоском пространстве (X, d, μ), которое не вырождается в точку. Тогда*

1) *A не имеет внутренних точек;*

2) *$G \setminus A$ — область для любой области G в X.*

Доказательство. 1) Допустим, что найдется точка $x_0 \in A$ такая, что $B(x_0, r_0) \subseteq A$ для некоторого $r_0 > 0$. Пусть $x_* \in X$, $x_* \neq x_0$, и γ — кривая, соединяющая x_0 и x_* в X, $\gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = x_0$ и $\gamma(1) = x_*$. При малом t континуум $C_t = \gamma([0,t])$ лежит в шаре $B(x_0, r_0)$ и, следовательно, $\gamma([0,t]) \cap \overline{(X \setminus A)} = \emptyset$. Кроме того, по предложению 2.3 всегда можно выбрать $t = t_0$ так, что $C_{t_0} \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. Поэтому, полагая $E = F = C_{t_0}$, имеем $M(\Delta(E, F, X)) = \infty$ поскольку пространство X слабо плоское, а с другой стороны $M(\Delta(E, F; X \setminus A)) = 0$. Полученное противоречие опровергает предположение.

2) Пусть Ω_* — одна из компонент связности открытого множества $G \setminus A$ и допустим, что существует еще одна компонента связности $G \setminus A$. Тогда $\Omega = G \setminus \overline{\Omega_*} \neq \emptyset$ и, рассматривая G как топологическое пространство T, а Ω как его (открытое) пространство, по предложению 3 найдется кривая $\gamma_0 : [0,1] \to G$ такая, что $\gamma_0([0,1)) \subseteq \Omega$ и $x_0 := \gamma_0(1) \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_* \cap G$. Заметим, что в пространстве G границы Ω и $\overline{\Omega_*}$ совпадают как у взаимно дополнительных множеств, а $\partial\overline{\Omega_*} \subset \partial\Omega_*$. Пусть $x_* \in \Omega_*$ и $x_n \in \Omega_*$, $n = 1, 2, \ldots,$ $x_n \to x_0$ и γ_n — кривые, соединяющие x_* и x_n в Ω_*. Тогда $M(\Delta(|\gamma_0|, |\gamma_n|, G)) \to \infty$ при $n \to \infty$, а $M(\Delta(|\gamma_0|, |\gamma_n|, G \setminus A)) = 0$.

Полученное противоречие опровергает допущение, что $G \setminus A$ содержит более одной компоненты связности. □

Лемма 9.4. *Пусть X и X' — компактные слабо плоские пространства, G — область в X, $A \subset G$ — НЭД-множество в X и f — го-*

меоморфизм из $D = G \setminus A$ *в* X'. *Если предельное множество*

$$A' := C(A, f) = \left\{x' \in X' : x' = \lim_{k\to\infty} f(x_k), x_k \in D, \lim_{k\to\infty} x_k \in A\right\} \tag{9.10}$$

является НЭД-множеством в X' *и* $D' = f(D)$, *то* $G' = D' \cup A'$ — *область в* X'. *Кроме того, существуют области* G^* *в* X *со свойством* $A \subset G^* \Subset G$ *и* $A' \cap A^* = \varnothing$, *где* $A^* := C(\partial G^*, f)$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что НЭД-множество A является компактом, как замкнутое множество в компактном пространстве X, и поэтому $\varepsilon_0 = \operatorname{dist}(A, \partial G) > 0$. Таким образом, A принадлежит открытому множеству

$$\Omega = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\}$$

при любом (фиксированном) $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, которое входит в G. Так как A — компакт, A содержится в конечном числе компонент связности $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ множества Ω. Пусть x_0 — произвольная точка области G и пусть $x_k \in \Omega_k$, $k = 1, \ldots, m$. Тогда найдутся непрерывные пути $\gamma_k : [0, 1] \to G$ с $\gamma_k(0) = x_0$ и $\gamma_k(1) = x_k$, $k = 1, \ldots, m$. Отметим, что множество $C = \bigcup_{k=1}^m |\gamma_k|$ является компактом и потому $\delta_0 = \operatorname{dist}(C, \partial G) > 0$.

Рассмотрим открытые множества

$$G_\delta = \{x \in G : \operatorname{dist}(x, \partial G) > \delta\}.$$

По неравенству треугольника множество

$$C_0 = C \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^m \Omega_k\right)$$

входит в G_δ при любом $\delta \in (0, d_0)$, где $d_0 = \min(\varepsilon_0 - \varepsilon, \delta_0)$. Более того, C_0 входит в одну компоненту связности G_δ^* множества G_δ, поскольку множество C_0 — связное.

По построению $\overline{G_\delta^*} \subset G$, G_δ^* — области в X и, следовательно, слабо плоские пространства, а по предложению 9.2 множества $D_\delta = G_\delta^* \setminus A$ являются областями со слабо плоской границей A в пространствах G_δ^*, $\delta \in (0, d_0)$. Тем более, A будет слабо плоской границей областей $D_\delta^* = G_\delta^* \setminus A$ в компактных пространствах $\overline{G_\delta^*}$, $\delta \in (0, d_0)$.

Пусть $f_\delta^* = f|_{D_\delta^*}$ и $g_\delta^* = (f_\delta^*)^{-1} : D'_\delta \to D_\delta^*$, где $D'_\delta = f_\delta(D_\delta^*)$. Тогда, как видно из предложения 2.5, имеет место симметрия

$$A' = C(A, f_\delta^*), \quad A = C(A', g_\delta^*), \qquad \forall\, \delta \in (0, d_0).$$

Заметим, что ∂G_δ^* являются компактными подмножествами области D и, следовательно, $f\partial G_\delta^*$ — компактные подмножества области $D' = f(D)$, которые по предложению 2.5 не пересекаются с A'. Таким образом, $d_\delta = \operatorname{dist}(A', f\partial G_\delta^*) > 0$ для любых $\delta \in (0, d_0)$. По лемме 4.1 пространство X' является локально линейно связным и поэтому для любой точки $x_0 \in A'$ найдется область $U \subset B(x_0, d_\delta)$, являющаяся окрестностью x_0, и по предложению 9.2 $V = U \setminus A'$ — также область, которая по построению является подобластью D'. Таким образом, $G' = D' \cup A'$ — область в X'. $\Box$

Рассматривая область G как новое пространство, а $G \setminus A$ как новую область, получаем следующие следствия для НЭД-множеств из теории КЭД областей и леммы 9.4.

Лемма 9.5. *Пусть X и X' — компактные слабо плоские пространства, G — область в X, A — НЭД-множество в X и пусть f — Q-гомеоморфизм $D = G \setminus A$ в X' такой, что предельное множество $C(A, f)$ является НЭД-множеством в X'. Если в некоторой точке $x_0 \in A$ выполнено условие* (9.2), *то f допускает непрерывное продолжение в точку x_0.*

Замечание 9.3. В частности, f допускает продолжение по непрерывности в точку $x_0 \in A$, если в этой точке выполнено одно из условий (9.3), (9.4), (9.5), (9.6) или (9.7) с $Q \in FMO(x_0)$, (9.8).

Лемма 9.6. *Пусть X и X' — компактные слабо плоские пространства, G — область в X, A — НЭД-множество в G и f — Q-гомеоморфизм $D = G \setminus A$ в X' с НЭД-множеством $C(A, f)$. Если $Q \in L^1_\mu(D)$, то обратный гомеоморфизм $g = f^{-1} : D' \to D$, $D' = f(D)$, допускает непрерывное продолжение $\overline{f} : \overline{G} \to \overline{G'}$.*

Замечание 9.4. Таким образом, если $Q \in L^1_\mu(D)$ удовлетворяет одному из условий (9.2), (9.3), (9.4), (9.5), (9.6) или (9.7) с $Q \in FMO(x_0)$, (9.8), в каждой точке $x_0 \in A$, то любой Q-гомеоморфизм f области $D = G \setminus A$ в X' с НЭД-множествами A и $A' = C(A, f)$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : G \to G'$, где $G' = D' \cup A'$.

10. О непрерывном продолжении в изолированную особую точку

Как и ранее, здесь (X, d, μ) и (X', d', μ') — пространства с метриками d и d' и локально конечными борелевыми мерами μ и μ', G и G' — области в X и X' с конечными хаусдорфовыми размерностями α и $\alpha' \geq 1$, соответственно.

Лемма 10.1. *Пусть пространство X линейно связно в точке $x_0 \in G$, которая имеет компактную окрестность, X' — компактное слабо плоское пространство, а $f : G\setminus\{x_0\} \to G'$ — Q-гомеоморфизм, где $Q : G \to [0,\infty]$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x_0,x)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^{\alpha}_{x_0,\varepsilon}(d(x,x_0))\,d\mu(x) \;=\; o(I^{\alpha}_{x_0}(\varepsilon)) \tag{10.1}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0,\partial G)$ и $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ — семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0,\infty)$ таких, что

$$0 < I_{x_0}(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\,dt < \infty, \qquad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0). \tag{10.2}$$

Тогда f продолжим в точку x_0 по непрерывности в пространстве (X',d').

Доказательство. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0,f)$ состоит из единственной точки. Множество E лежит на $\partial G'$ по предложению 2.5. Кроме того, E — континуум, поскольку область G связна в точке x_0. Действительно,

$$E = \limsup_{m\to\infty} f(G_m) \;=\; \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{f(G_m)},$$

где $G_m = G \cap U_m$ — некоторая монотонно убывающая последовательность областей с окрестностями U_m точки x_0 и $d(G_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Отметим, что $\liminf_{m\to\infty} \overline{f(G_m)} = \liminf_{m\to\infty} f(G_m) \neq \emptyset$ ввиду компактности X', см. [22, замечание 3, п. 41]. Следовательно, $E \neq \emptyset$ и связно, см., напр., I(9.12) в [42, с. 15]. Кроме того, E замкнуто по построению и потому компактно как замкнутое подпространство компактного пространства X', см., напр., [2, Теорема 2, IV, §41].

Ввиду связности G в точке x_0, найдется компонента связности G_* множества $G \setminus \{x_0\} \cap B(x_0,r_0)$, $0 < r_0 < \operatorname{dist}(x_0,\partial G)$, включающая $G \setminus \{x_0\} \cap B(x_0,r_*)$ для некоторого $r_* \in (0,r_0)$. Если $\partial G = \emptyset$, то здесь полагаем, что $\operatorname{dist}(x_0,\partial G) = \infty$. Так как x_0 имеет компактную окрестность, можно считать, что $\overline{B(x_0,r_0)}$ — компакт.

Рассмотрим $G'_* = fG_*$. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0,f)$ является изолированной компонентой $\partial G'_*$. Действительно, $K = \partial G_* \setminus \{x_0\}$ является компактом как замкнутое подмножество компакта $\overline{B(x_0,r_0)}$ и, следовательно, $K_* = fK \subset G'$ — компакт. С другой стороны, компакт E лежит на $\partial G'$, т.е. $E \cap K_* = \emptyset$. Таким образом, $\mathrm{dist}(E, K_*) > 0$. Наконец, если $y_0 \in \partial G'_*$, то по предложению 5 $C(y_0, g) \subset \partial G_* = K \cup \{x_0\}$, где $g = f^{-1}|_{G'_*}$, и, следовательно, либо $y_0 \in E$, либо $y_0 \in K_*$.

Пусть $z_0 \in G'_*$. Тогда по предложению 2 найдется непрерывный путь $\gamma_0 : [a, b) \to G_*$ от $\gamma_0(a) = f^{-1}(z_0)$ к $x_0 = \lim_{t\to b}\gamma_0(t)$ в G_*. Обозначая $\gamma'_0 = f\gamma_0 : [a, b) \to G'_*$, имеем, что $\mathrm{dist}(\gamma'_0(t), E) \to 0$ при $t \to b$ по определению $E = C(x_0, f)$ ввиду компактности пространства X'. Полагаем $C_* = \gamma'_0([a, b))$ и

$$\Gamma = \Delta(C_*, E, X').$$

Рассмотрим также семейства кривых

$$\Gamma_0 = \Delta(C_*, E, G'_*)$$

и

$$\Gamma_* = \{\gamma \in \Gamma : \ |\gamma| \cap R \neq \emptyset\},$$

где

$$R = X' \setminus \{G'_* \cup E\}.$$

Заметим, во-первых, что $M(\Gamma_0) = M(\widetilde{\Gamma})$, где $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \Gamma_*$. Действительно, с одной стороны, $\Gamma_0 \subset \widetilde{\Gamma}$ и потому $M(\Gamma_0) \leq M(\widetilde{\Gamma})$. А с другой стороны, $\Gamma_0 < \widetilde{\Gamma}$ по предложению 2.3 и потому $M(\Gamma_0) \geq M(\widetilde{\Gamma})$, см., напр., [10, Теорема 1]. Заметим, во-вторых, что

$$M(\Gamma_*) \leq M_* := \frac{\mu(X')}{(2\,\mathrm{dist}(C_* \cup E,\, \partial G'_* \setminus E))^{\alpha'}} < \infty,$$

поскольку $C_* \cup E$ и $\partial G'_* \setminus E$ — непересекающиеся компакты, а $\mu'(X') < \infty$ в силу компактности X' и локальной конечности меры μ'.

Предположим, что континуум E — невырожденный. Пусть $y_0 \in E$ — какая-либо предельная точка $\gamma'_0(t)$ при $t \to b$ и $y_* \in E, y_* \neq y_0$. По свойству Дарбу связных множеств $\partial B(y_0, r)$ пересекает C_* и E при всех $r \in (0, r_0)$, где $r_0 = \min\{d'(y_0, \gamma_0(a)), d'(y_0, y_*)\}$. Рассмотрим континуумы $C(t) = \gamma_0([a, t]),\ t \in [a, b)$. Заметим, что $\mathrm{dist}(C(t), E) \to 0$ при $t \to b$ по построению. Таким образом,

$$M(\Delta(C(t), E, X')) \to \infty$$

при $t \to b$, т.к. пространство X' является слабо плоским. Следовательно, найдется такое $t_0 \in [a, b)$, что

$$M_0 := M(\Delta(C(t_0), E, X')) > M_*.$$

Напомним, что $\Gamma = \widetilde{\Gamma} \cup \Gamma_*$ и из монотонности и полуаддитивности модуля получаем

$$M_* < M_0 \leq M(\Gamma) \leq M(\widetilde{\Gamma}) + M(\Gamma_*) = M(\Gamma_0) + M(\Gamma_*) \leq M(\Gamma_0) + M_*.$$

Следовательно,

$$M(\Gamma_0) > 0.$$

Однако,

$$\Gamma_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n,$$

где $\Gamma_n = \Delta(C(t_n), E, G_*')$, $t_n \to b$ при $n \to \infty$, и из полуаддитивности модуля

$$M(\Gamma_0) \, \leq \, \sum_{n=1}^{\infty} M(\Gamma_n)\,.$$

Таким образом, найдется континуум $C = C(t_n)$ такой, что

$$M(\Delta(C, E, G_*')) > 0.$$

Заметим, что $C_0 = f^{-1}(C)$ является компактом как непрерывный образ компакта. Таким образом, $\varepsilon_0 = \operatorname{dist}(x_0, C_0) > 0$. Пусть

$$\Gamma_\varepsilon = \Delta(C_0, B(x_0, \varepsilon), G_*), \qquad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

и пусть $\psi^*_{x_0,\varepsilon}$ — борелевская функция такая, что $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t) = \psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ для п.в. $t \in (0, \infty)$, которая существует ввиду теоремы Лузина, см., напр., [9, 2.3.5].

Тогда по предложению 2.4 функция

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi^*_{x_0,\varepsilon}(d(x, x_0))/I(\varepsilon, \varepsilon_0), & x \in A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & x \in X \backslash A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0), \end{cases}$$

где

$$A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in X : \varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0\},$$

допустима для Γ_ε и, следовательно,

$$M(f\Gamma_\varepsilon) \leq \int\limits_G Q(x) \cdot \rho_\varepsilon^\alpha(x)\, d\mu(x),$$

т.е. $M(f\Gamma_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ ввиду (10.1).

С другой стороны, $M(f\Gamma_\varepsilon) \geq M(\Delta(C, E, G_*')) > 0$, поскольку $\Delta(C_0, \{x_0\}, G_*) > \Gamma_\varepsilon$ и

$$f^{-1}\Delta(C, E, G_*') \subseteq \Delta(C_0, \{x_0\}, G_*)$$

при любом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ по предложению 2.5, примененному к гомеоморфизмам f^{-1} и $g = f^{-1}|_{G'_*}$, и $x'_0 \in E$, $x'_0 = \gamma(b)$, $\gamma \in \Delta(C,E,G'_*)$. Полученное противоречие опровергает предположение, что континуум E является невырожденным. □

Следствие 10.1. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^{\alpha}(d(x,x_0))\,d\mu(x) < \infty, \tag{10.3}$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$ такая, что

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty, \qquad \forall\,\varepsilon \in (0,\,\varepsilon_0),$$

и $I(\varepsilon,\varepsilon_0) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то Q-гомеоморфизм $f : G\setminus\{x_0\} \to G' \subset X'$ продолжим в точку x_0 по непрерывности в (X', d').

Замечание 10.1. Другими словами, достаточно, чтобы сингулярный интеграл в (10.3) сходился в смысле главного значения в точке x_0 хотя бы для одного ядра ψ с неинтегрируемой особенностью в нуле. Более того, как показывает лемма 9.6, достаточно, чтобы указанный интеграл даже расходился, но с контролируемой скоростью:

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^{\alpha}(d(x,x_0))\,d\mu(x) \;=\; o(I^{\alpha}(\varepsilon,\varepsilon_0)) \tag{10.4}$$

Выбирая в лемме 10.1 $\psi(t) \equiv 1/t$, получаем следующую теорему.

Теорема 10.1. *Пусть пространства X и X' — компактные, X линейно связно в точке $x_0 \in G$, а X' — слабо плоское пространство. Если измеримая функция $Q : G \to [0,\infty]$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^{\alpha}\right) \tag{10.5}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0,\partial G)$, то любой Q-гомеоморфизм $f : G\setminus\{x_0\} \to G'$ продолжим по непрерывности в точку x_0.

Следствие 10.2. *В частности, заключение теоремы 5.1 имеет место, если сходится сингулярный интеграл*

$$\int \frac{Q(x)\,d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}} \tag{10.6}$$

в окрестности точки x_0 в смысле главного значения.

Комбинируя леммы 4.1 и 10.1, выбирая $\psi_\varepsilon(t) \equiv t\log\frac{1}{t}$, $t \in (0, \delta_0)$, получаем следующую теорему.

Теорема 10.2. *Пусть X и X' — компактные слабо плоские пространства, G — область в X, которая α-регулярна сверху с $\alpha \geq 2$ и линейно связна в точке $x_0 \in G$ и*

$$\mu(B(x_0, 2r)) \leq \gamma \cdot \log^{\alpha-2}\frac{1}{r} \cdot \mu(B(x_0, r)) \qquad \forall\, r \in (0, r_0). \tag{10.7}$$

Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой Q-гомеоморфизм f области $G \setminus \{x_0\}$ в X' продолжим по непрерывности в точку x_0.

Комбинируя следствие 2.1 и теорему 10.2, получаем следующее утверждение.

Следствие 10.3. *В частности, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \quad \fint_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\, d\mu(x) < \infty, \tag{10.8}$$

то любой Q-гомеоморфизм $f : G \setminus \{x_0\} \to G' \subset X'$ продолжим по непрерывности в точку x_0.

Замечание 10.2. По предложению 6.1 продолжение $\overline{f}$ отображения f в точку x_0 будет инъективным отображением и, таким образом, гомеоморфизмом на любой подобласти $G_* \Subset G$, т.е. если $\overline{G_*}$ — компакт в G. Это, вообще говоря, неверно для самой области G, как показывают простые примеры. Однако, это верно, если, к примеру, $G = X$ — компакт, см., напр., [22].

Кроме того, если семейство всех кривых в X', а точнее в G_*, проходящих через точку $y_0 = \overline{f}(x_0)$, имеет нулевой модуль, то сужение отображения $g = \overline{f}|_{G_*}$ будет Q-гомеоморфизмом. Для регулярных пространств это всегда выполняется, см., лемму 7.18 в работе [12]. Таким образом, изолированная особая точка Q-гомеоморфизмов в регулярных слабо плоских пространствах локально устранима при условиях на Q, перечисленных выше.

11. О конформных и квазиконформных отображениях

Наконец, приведем резюме результатов для конформных и квазиконформных отображений, которые являются прямым следствием развитой выше теории Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах с мерой. Именно, пусть, по-прежнему, G и G' — области конечной хаусдорфовой размерности α и $\alpha' \geq 1$ в пространствах (X, d, μ)

и (X', d', μ') с метриками d и d' и локально конечными борелевскими мерами μ и μ', соответственно.

Следуя аналогии геометрическому определению Вяйсяля, см. [40, 13.1.], мы говорим, что гомеоморфизм $f : G \to G'$ называется *K-квазиконформным*, $K \in [1, \infty]$, если

$$K^{-1}M(\Gamma) \leq M(f\Gamma) \leq KM(\Gamma) \tag{11.1}$$

для любого семейства кривых Γ в G. Гомеоморфизм $f : G \to G'$ называем *квазиконформным*, если f является K-квазиконформным для некоторого $K \in [1, \infty)$, т.е. если искажение модулей семейств кривых при отображении f ограничено. В частности, гомеоморфизм $f : G \to G'$ называем *конформным*, если

$$M(f\Gamma) = M(\Gamma) \tag{11.2}$$

для любых семейств кривых в G.

Из теоремы 6.1 получаем следующее важное заключение.

Теорема 11.1. *Пусть G имеет слабо плоскую границу, а G' локально линейно связна в граничных точках и $\overline{G'}$ — компакт. Тогда любое квазиконформное отображение $f : G \to G'$ допускает непрерывное продолжение на границу $\overline{f} : \overline{G} \to \overline{G'}$.*

Комбинируя теорему 11.1 с леммой 3.1, приходим к следующему.

Следствие 11.1. *Если G и G' — области со слабо плоскими границами и компактными замыканиями $\overline{G}$ и $\overline{G'}$, то любое квазиконформное отображение $f : G \to G'$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{G} \to \overline{G'}$.*

Замечание 11.1. В частности, последнее заключение имеет место для квазиконформных отображений между КЭД-областями с компактными замыканиями в слабо плоских пространствах. Заметим, что замыкания областей всегда компактны в компактных пространствах. Напомним также, что локально компактные пространства всегда допускают одноточечную компактификацию, см, напр., [2, I.9.8].

На основе лемм 3.1 и 9.4 и теоремы 11.1 получаем следующую теорему.

Теорема 11.2. *Пусть X и X' — компактные слабо плоские пространства, G — область в X, $A \subset G$ — НЭД-множество и f — квазиконформное отображение области $D = G \setminus A$ в X'. Если предельное множество $A' = C(A, f)$ является НЭД-множеством, то f допускает гомеоморфное продолжение в G.*

По результатам предыдущей секции, отметим также следствия об устранимости изолированных особенностей.

Лемма 11.1. *Пусть X линейно связно в точке $x_0 \in G$ с компактной окрестностью, X' — компактное слабо плоское пространство, а $f : G \setminus \{x_0\} \to G'$ — квазиконформное отображение. Если μ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x_0,x)<\varepsilon_0} \psi^{\alpha}(d(x,x_0))\, d\mu(x) = o(I^{\alpha}(\varepsilon,\varepsilon_0)) \tag{11.3}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$ и $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая (по Лебегу) функция на $(0,\infty)$ такая, что

$$0 < I(\varepsilon,\varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty \qquad \forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0),$$

то отображение f продолжимо по непрерывности в точку x_0.

Теорема 11.3. *Пусть X линейно связно в точке $x_0 \in G$ с компактной окрестностью, X' — компактное слабо плоское пространство, а $f : G \setminus \{x_0\} \to G'$ — квазиконформное отображение. Если μ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\varepsilon<d(x,x_0)<\varepsilon_0} \frac{d\mu(x)}{d(x,x_0)^{\alpha}} = o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^{\alpha}\right) \tag{11.4}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(x_0, \partial G)$, то отображение f продолжимо по непрерывности в точку x_0.

Наконец, ввиду замечаний 6.1 и 8.2 имеем следующий важный вывод из теоремы 11.3.

Следствие 11.2. *Пусть X и X' — регулярные по Альфорсу компактные слабо плоские пространства. Тогда любое квазиконформное отображение $X \setminus \{x_0\}$ в X' продолжимо до квазиконформного отображения X в X'.*

Таким образом, результаты статьи распространяют (и усиливают) хорошо известные теоремы М. Вуоринена, Дж. Вяйсяля, Ф. Геринга, О. Мартио, Р. Някки У. Сребро, Э. Якубов и др. о квазиконформных отображениях в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, на Q-гомеоморфизмы в метрических пространствах, см., напр., [11, 17, 18, 21, 25–28, 30, 40, 41].

Литература

[1] Z. Balogh, P. Koskela, *Quasiconformality, quasisymmetry, and removability in Loewner spaces* // With an appendix by Jussi Vaisala. Duke Math. J. **101** (2000), N 3, 554–577.

[2] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры.* М.: Наука, 1969.

[3] A. Brania, Sh. Yang, *Domains with controlled modulus and quasiconformal mappings* // Nonlinear Stud. **9** (2002), N 1, 57–73.

[4] С. К. Водопьянов, *Отображения с ограниченным искажением и конечным искажением на группах Карно* // Сиб. мат. журн. **40** (1999), N 4, 764–804.

[5] С. К. Водопьянов, *Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно* // Сиб. мат. журн. **37** (1996), N 6, 1269–1295.

[6] С. К. Водопьянов, Д. В. Исангулова, *Дифференцируемость отображений пространств Карно–Каратеодори в топологии Соболева и BV-топологии* //Докл. РАН. **401**, (2005) N 3, 295–300.

[7] С. К. Водопьянов, Н. А. Кудрявцева, *Нормальные семейства отображений на группах Карно* // Сиб. мат. журн. **37** (1996), N 2, 273–286.

[8] S. Vodop'yanov, I. Markina, *On value distribution for quasimeromorphic mappings on $\mathbb{H}$-type Carnot groups* // Bull. Sci. Math. Mexicana. **130** (2003), N 6, 467–523.

[9] H. Federer, *Geometric Measure Theory.* Berlin etc.: Springer, 1969.

[10] B. Fuglede, *Extremal length and functional completion* // Acta Math. **98** (1957), 171–219.

[11] F. W. Gehring and O. Martio, *Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings* // J. d'Anal. Math. **24** (1985), 181–206.

[12] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces.* New York: Springer, 2001.

[13] J. Heinonen, *A capacity estimate on Carnot groups* // Bull. Sci. Math. **119** (1995), N 1, 475–484.

[14] J. Heinonen, I. Holopainen, *Quasiregular mappings on Carnot groups* // J. Geom. Anal. **7** (1997), N 1, 109–148.

[15] J. Heinonen, P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry* // Acta Math. **181** (1998), N 1, 1–61.

[16] J. Heinonen, T. Kilpelainen, O. Martio, *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations.* New York: Clarendon Press, 1993.

[17] A. Ignat'ev, V. Ryazanov, *Finite mean oscillation in the mapping theory* // Ukrainian Math. Bull. **2** (2005), N 3, 403–424.

[18] A. Ignat'ev, V. Ryazanov, *To the theory of the boundary behavior of space mappings* // Ukrainian Math. Bull. **3** (2006), N 2, 189–201.

[19] A. Koranyi, H. Reimann, *Quasiconformal mappings on the Heisenberg group* // Invent, math. **80** (1985), 309–338.

[20] A. Koranyi, H. Reimann, *Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group* // Adv. Math. **111** (1995), N 1, 1–87.

[21] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, *К теории нижних Q-гомеоморфизмов* // Украинский математический вестник (представлена).

[22] К. Куратовский, *Топология.* Т. 2. М.: Мир, 1969.

[23] G. A. Marguh's, G. D. Mostow, *The differential of quasi-conformal mapping of a Carnot–Caratheodory spaces* // Geometric and Functional Analysis. **5** (1995), N 2, 402–433.

[24] O. Martio, *Modern tools in the theory of quasiconformal maps* // Texts in Math. Ser. B, 27. Univ. Combra, Dept. Mat., Coimbra. (2000), 1–43.

[25] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion* // J. d'Anal. Math. **93** (2004), 215–236.

[26] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Q-homeomorphisms* // Contemporary Math. **364** (2004), 193–203.

[27] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On Q-homeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. **30** (2005), 49–69.

[28] O. Martio, M. Vuorinen, *Whitney cubes, p-capacity and Minkowski coutent* // Expo. Math. **5** (1980), 17–40.

[29] J. Mitchell, *On Carnot–Caratheodory metrics* // J. Differential Geometry. **21** (1985), 35–45.

[30] R. Näkki, *Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space distances* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. **484** (1970), 1–50.

[31] P. Pansu, *Metriques de Carnot–Caratheodory et quasiisometries des espaces symetriques de rang un* // Ann. of Math. **119** (1989), 1–60.

[32] В. Рязанов, У. Сребро, Э. Якубов, *К теории BMO-квазирегулярных отображений* // Докл. РАН. **369** (1999), N 1, 13–15.

[33] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *BMO-qasikonformal mappings* // J. d'Anal. Math. **83** (2001), 1–20.

[34] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation* // Sib. Adv. in Math. **11** (2001), N 2, 94–130.

[35] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On ring solution of Beltrami equations* // J. d'Anal. Math. **96** (2005), 117–150.

[36] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Finite mean oscillation and Beltrami equation* // Israel J. Math. (2006), N 153, 247–266.

[37] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *To the theory of the Beltrami equation* // Укр. мат. журн. **58** (2006), N 11, 1571–1583.

[38] П. М. Тамразов, *Модули и экстремальные метрики в неориентируемых и скрученных римановых многообразиях* // Укр. мат. журн. **50** (1998), N 10, 1388–1398.

[39] J. T. Tyson, *Metric and geometric quasiconformality in Ahlfors regular Loewner spaces* // Conform. Geom. Dyn. **5** (2001), 21–73 (electronic).

[40] J. Väisälä, *Lectures on $n-$Dimensional Quasiconformal Mappings.* Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc., Springer–Verlag, 1971.

[41] M. Vuorinen, *Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., Dissertattiones. (1976), N 11, 1–44.

[42] G. T. Whyburn, *Analytic topology.* Rhode Island: American Mathematical Society, 1942.

Сведения об авторах

Владимир Ильич Рязанов,
Руслан Радикович Салимов

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 74,
Донецк, 83114
Украина
E-Mail: ryazanov@iamm.ac.donetsk.ua,
vlryazanov1@rambler.ru,
salimov@iamm.ac.donetsk.ua