Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 2, 189 – 198

Оценки интегральной гладкости функции через ее локальные колебания

Евгений Ю. Леончик

(*Представлена В. П. Моторным*)

Аннотация. В 1972 г. Ч. Фефферманом и И. Стейном была введена максимальная функция, измеряющая рост локальных средних колебаний. В дальнейшем связанные с ней пространства нашли широкое применение. В данной работе получены оценки интегрального модуля непрерывности для функций из таких пространств и для функций, удовлетворяющих обобщенному неравенству Пуанкаре.

2000 MSC. 26D10, 46E30.

Ключевые слова и фразы. Максимальная функция Феффермана–Стейна, неравенство Пуанкаре.

Для функции $f \in L([0;1])$ средним колебанием на отрезке $I \subset [0;1]$ называют величину

$$\Omega(f,I) \equiv \frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - f_I|\,dx,$$

где

$$f_I \equiv \fint_I f(y)\,dy = \frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy.$$

Ф. Джон и Л. Ниренберг [1] ввели в рассмотрение пространство функций с ограниченным средним колебанием

$$BMO \equiv \{f \ : \ \sup_{I\subset[0;1]} \Omega(f,I) < \infty\}.$$

В дальнейшем Ч. Фефферман и И. Стейн [2, 3], показали, что это пространство является сопряженным к пространству Харди $\operatorname{Re} H^1$.

Работа частично поддержана ДФФД, грант № Ф7/329–2001.

Пусть K — совокупность всех положительных, неубывающих на $(0;1]$ функций η таких, что $t^{-1}\eta(t)$ не возрастает на $(0;1]$ и $\eta(+0)=0$. Для $\eta\in K$ через BMO^η обозначается класс функций, средние колебания которых убывают с заданной скоростью, то есть $f\in BMO^\eta$, если

$$\|f\|_{BMO^\eta}\equiv\sup_{I\subset[0;1]}\frac{\Omega(f,I)}{\eta(|I|)}<\infty.$$

С. Спанне [4] установил точную оценку равномерного модуля непрерывности $\omega(f,\delta)\equiv\sup_{|y-x|\le\delta}|f(y)-f(x)|$, $0<\delta\le1$, для $f\in BMO^\eta$. Именно, если $\eta\in K$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1\eta(t)\cdot\frac{dt}{t}<\infty, \tag{1}$$

то каждая функция $f\in BMO^\eta$ эквивалентна некоторой непрерывной функции φ и

$$\omega(\varphi,\delta)\le c\int_0^\delta\eta(t)\cdot\frac{dt}{t} \tag{2}$$

(здесь и далее через c обозначаются положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных соотношениях). С другой стороны, ясно, что $\Omega(f,I)\le\omega(f,\delta)$ для любого отрезка $I\subset[0;1]$ длины $|I|\le\delta$. Таким образом, при $\eta(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha\le1)$ класс BMO^η можно отождествить с классом $H^\eta\equiv\{f\ :\ \omega(f,\delta)=O(\eta(\delta)),\ \delta\to+0\}$. Этот факт был ранее доказан С. Кампанато [5] и Н. Г. Мейерсом [6]. При этом условие (1) существенно, поскольку без него нельзя гарантировать даже ограниченность функции из BMO^η. Так, например, если (1) не выполнено, то положив

$$f_0(x)=\int_x^1\eta(t)\cdot\frac{dt}{t},\qquad 0<x\le1,$$

имеем $f_0\in BMO^\eta$ и $f_0\notin L^\infty$ [7, с. 220]. В следующем утверждении без ограничения (1) на η для $f\in BMO^\eta$ содержится оценка интегрального модуля непрерывности $(1\le p<\infty)$

$$\omega_p(f,\delta)\equiv\sup_{0<h\le\delta}\left(\int_0^{1-h}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac1p},\qquad 0<\delta\le1.$$

Теорема 1. *Пусть* $\eta \in K$ *и* $f \in BMO^\eta$. *Тогда при любом* $1 \le p < \infty$ *справедливо неравенство*

$$\omega_p(f,\delta) \le c\|f\|_{BMO^\eta} \cdot \eta(\delta), \qquad 0 < \delta \le 1, \tag{3}$$

где постоянная c *зависит только от* p.

Доказательство. Сперва заметим, что величина $\omega_p(f,\cdot)$ определена, так как $f \in BMO^\eta \subset BMO$ экпоненциально суммируема [1]. Для $I = [a;b] \subset [0;1]$ обозначим через $2I$ отрезок $[a;\min(2b-a;1)]$. При $1 \le p < \infty$ для I и $h > 0$ таких, что $I \subset [0;1-h]$ и $h \le |I|$, имеем

$$\left(\int\limits_I |f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_I |f(x+h)-f_{2I}|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$+\left(\int\limits_I |f(x)-f_{2I}|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le 2\left(\int\limits_{2I} |f(x)-f_{2I}|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Воспользуемся тем, что для функции из BMO имеет место обращение неравенства Гельдера [8, с. 234]

$$\left(\fint\limits_{2I} |f(x)-f_{2I}|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le A_p \sup_{J\subset 2I} \Omega(f,J) \le A_p\|f\|_{BMO^\eta}\cdot\eta(|2I|). \tag{5}$$

Отсюда, учитывая (4), находим

$$\int\limits_I |f(x+h)-f(x)|^p\,dx \le (2A_p\|f\|_{BMO^\eta}\cdot\eta(|2I|))^p|2I|$$
$$\le 2^{2p+1}(A_p\|f\|_{BMO^\eta})^p\cdot\eta^p(|I|)|I|. \tag{6}$$

Далее, разобьем $[0;1-h]$ на отрезки $\{I_k\}$ с непересекающимися внутренностями такие, что $2^{-1}|I_k| \le h \le |I_k|$. Применяя к каждому I_k неравенство (6), получаем

$$\int\limits_0^{1-h} |f(x+h)-f(x)|^p\,dx = \sum_k \int_{I_k} |f(x+h)-f(x)|^p\,dx$$
$$\le 2^{2p+1}(A_p\|f\|_{BMO^\eta})^p\sum_k \eta^p(|I_k|)|I_k|$$
$$\le 2^{3p+1}(A_p\|f\|_{BMO^\eta})^p\cdot\eta^p(h).$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Пусть $H_p^\eta \equiv \{f\ :\ \omega_p(f,\delta) = O(\eta(\delta)),\ \delta \to +0\}$. Неравенство (3) означает, что $BMO^\eta \subset H_p^\eta$ для всех $1 \le p < \infty$. Если же η, $\omega \in K$ удовлетворяют условию $\eta(\delta) = O(\delta^{1/p}\omega(\delta))$, $\delta \to +0$, то нетрудно установить вложение $H_p^\eta \subset BMO^\omega$. Вложение такого типа в общем анизотропном случае получено В. И. Колядой [9].

Условие $f \in BMO^\eta$ характеризует глобальное поведение средних колебаний. Более тонкой характеристикой является максимальная функция

$$f_\eta^\#(x) \equiv \sup_{I \ni x} \frac{\Omega(f,I)}{\eta(|I|)}, \qquad 0 \le x \le 1,$$

где верхняя грань берется по всем отрезкам $I \subset [0;1]$, содержащим точку x. Будем обозначать $f^\# \equiv f_\eta^\#$ при $\eta \equiv 1$. Функция $f^\#$ была определена Ч. Фефферманом и И. Стейном [3]. При $\eta \in K$ максимальная функция $f_\eta^\#$ измеряет скорость стремления к нулю локальных средних колебаний. Кроме этого, если $\eta \in K$ такова, что

$$\int_0^\delta \eta(t) \cdot \frac{dt}{t} = O(\eta(\delta)), \qquad \delta \to +0, \tag{7}$$

то $f_\eta^\#$ также может служить для оценки локальной гладкости f, поскольку в этом случае [9, с. 146], [10]

$$|f(y) - f(x)| \le c(f_\eta^\#(y) + f_\eta^\#(x)) \cdot \eta(|y-x|) \tag{8}$$

для почти всех x, $y \in [0;1]$. При $\eta(t) = t^\alpha$ эта максимальная функция впервые использовалась А. П. Кальдероном [11], а В. Г. Кротовым [12] изучались ее свойства в пространствах с весом.

Обозначим $F_p^\eta \equiv \{f\ :\ f_\eta^\# \in L_p([0;1])\}$, $1 \le p \le \infty$. Очевидно, что $F_\infty^\eta = BMO^\eta$. При $p > 1$ и $\eta(t) = t$ класс F_p^η совпадает с пространством функций Соболева W_p^1 [11], а при $\eta(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ — с пространствами Хайлаша–Соболева дробного порядка W_p^α [13].

Если функция η удовлетворяет условию (7), то из (8) сразу вытекает следующая оценка интегрального модуля непрерывности функции $f \in F_p^\eta$, $1 \le p < \infty$,

$$\omega_p(f,\delta) \le c\|f_\eta^\#\|_p \cdot \eta(\delta), \qquad 0 \le \delta \le 1, \tag{9}$$

где, как обычно, $\|g\|_p \equiv \left(\int_0^1 g^p(x)\,dx\right)^{1/p}$. Следующее утверждение снимает ограничение (7) на $\eta \in K$ в неравенстве (9).

Теорема 2. *Пусть $\eta \in K$ и $f \in F_p^\eta$, $1 \le p < \infty$. Тогда справедливо неравенство* (9)*, где постоянная c зависит только от p.*

Доказательство. Для любого отрезка $I \subset [0;1]$ имеет место

$$\int_I |f(x) - f_I|^p \, dx \le c \int_I (f^{\#})^p(x) \, dx, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Действительно, случай $p = 1$ вытекает из очевидного неравенства ($\eta \in K$)

$$\Omega(f, I) \le \inf_{x \in I} f_\eta^{\#}(x) \cdot \eta(|I|), \tag{10}$$

а случай $p > 1$ рассмотрен, например, в [7, с. 272]. Следовательно, учитывая (4), для $0 < h \le |I|$ получаем такой аналог неравенства (6)

$$\int_I |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \le 2^p \int_{2I} |f(x) - f_{2I}|^p \, dx$$

$$\le 2^p c \int_{2I} (f^{\#})^p(x) \, dx \le 2^{2p} c \eta^p(|I|) \int_{2I} (f_\eta^{\#})^p(x) \, dx.$$

Отсюда неравенство (9) доказывается теми же рассуждениями, которые использовались для получения неравенства (3) из (6). □

Замечание 2. В теореме 2 показано, что $F_p^\eta \subset H_p^\eta$ для $1 \le p < \infty$ и $\eta \in K$. Отметим, что вложение F_1^η в H^ω не имеет места ни при каком $\omega \in K$ [14, с. 86], а при $1 < p \le \infty$ А. А. Кореновским [14, с. 83, 85] также получено необходимое и достаточное условие на η, $\omega \in K$ для справедливости вложения $F_p^\eta \subset H^\omega$.

Замечание 3. Неравенство (3) сразу следует из теоремы 2, поскольку $\|f_\eta^{\#}\|_p \le \|f_\eta^{\#}\|_\infty = \|f\|_{BMO^\eta}$ при любом $1 \le p < \infty$.

Далее, будем рассматривать расширение пространства F_q^η. Говорят, что f удовлетворяет (η, q)-неравенству Пуанкаре ($f \in P_q^\eta$), если найдется такая функция $g \in L^q$, для которой (например, см. [15])

$$\Omega(f, I) \le \eta(|I|) \left(\fint_I g^q(x) \, dx \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad I \subset [0;1]. \tag{11}$$

Очевидно, что P_∞^η совпадает с BMO^η. Для $f \in F_q^\eta$ условие (11) выполнено, если положить $g = f_\eta^{\#}$, то есть $F_q^\eta \subset P_q^\eta$, $q \ge 1$. Действительно, учитывая (10), имеем

$$\Omega(f, I) \le \eta(|I|) \fint_I f_\eta^{\#}(x) \, dx \le \eta(|I|) \left(\fint_I (f_\eta^{\#})^q(x) \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Если $f \in P_1^\eta$, то рассуждая как и при доказательстве теоремы 2, легко получить, что

$$\omega_1(f,\delta) \le c\|g\|_1 \cdot \eta(\delta), \qquad 0 \le \delta \le 1.$$

Теперь перейдем к оценке интегрального модуля непрерывности для $f \in P_q^\eta$, $1 \le q < \infty$. Для того, чтобы получить оценку подобную (9), нам понадобится свойство "самоулучшение показателя" неравенства Пуанкаре. Именно, как показано в работе И. А. Иванишко и В. Г. Кротова [15], если

$$t^{-\alpha}\eta(t) \quad \text{не убывает} \tag{12}$$

при некотором $\alpha > 0$, то из (11) при любом $1 \le p < \infty$, которое удовлетворяет условию

$$p^{-1} > q^{-1} - \alpha, \tag{13}$$

справедливо неравенство

$$\left(\fint_J |f(x) - f_J|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le c\eta(|J|)\left(\fint_J g^q(x)\, dx\right)^{\frac{1}{q}}, \quad J \subset [0;1], \tag{14}$$

где постоянная c зависит только от p, q и α. Из условия (12) при $\alpha > 0$, в частности, вытекает (7), что в [15] существенно использовалось при доказательстве неравенства (14). Приведем доказательство этого неравенства, которое распространяется также и на случай $\alpha = 0$, то есть на произвольную функцию $\eta \in K$. Основным результатом данной работы является изучение случая, когда функция η стремится к нулю медленнее, чем любая степенная, точнее интеграл в левой части (1) расходится.

Лемма 1. *Пусть $q \ge 1$, для $\eta \in K$ выполнено* (12) *при некотором $\alpha \ge 0$ и f удовлетворяет условию* (11) *с некоторой функцией $g \in L^q$. Тогда если $1 \le p < \infty$ такое, что выполнено условие* (13)*, то имеет место* (14).

Доказательство. Зафиксируем произвольный отрезок $J \subset [0;1]$ и выберем такое $r \ge \max(p,q)$, что $p^{-1} > r^{-1} \ge q^{-1} - \alpha$, например,

$$r = \frac{2}{\max(q^{-1} - \alpha; 0) + \min(p^{-1}; q^{-1})}.$$

Следуя работе [1], обозначим

$$K_r(f,J) \equiv \sup \sum\nolimits_k \Omega^r(f,J_k)|J_k|,$$

где верхняя грань берется по всем конечным разбиениям J отрезками $\{J_k\}$. Для $m(f,J,\lambda) \equiv |\{x \in J : |f(x) - f_J| > \lambda\}|$ имеем такую оценку [1]

$$m(f,J,\lambda) \le c_r K_r(f,J)\lambda^{-r}, \qquad \lambda > 0.$$

В свою очередь, для оценки величины $K_r(f,J)$, учитывая (11), находим

$$\sum_k \Omega^r(f,J_k)|J_k| \le \sum_k \Big(\eta(|J_k|)|J_k|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\Big)^r \Bigg(\int\limits_{J_k} g^q(x)\,dx\Bigg)^{\frac{r}{q}}.$$

Отсюда, так как $\eta(t)t^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}$ не убывает и $r \ge q$, то

$$K_r(f,J) \le \Big(\eta(|J|)|J|^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\Big)^r \Bigg(\int\limits_J g^q(x)\,dx\Bigg)^{\frac{r}{q}} = \eta^r(|J|)\Bigg(⨍\limits_J g^q(x)\,dx\Bigg)^{\frac{r}{q}}|J|.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|J|}\,m(f,J,\lambda) \le c_r\eta^r(|J|)\Bigg(⨍\limits_J g^q(x)\,dx\Bigg)^{\frac{r}{q}} \cdot \lambda^{-r}, \qquad \lambda > 0. \tag{15}$$

Поскольку $m(f,J,\cdot)$ является функцией распределения для $|f - f_J|$, то при любом $a > 0$ получаем, что

$$⨍\limits_J |f(x) - f_J|^p\,dx = \frac{p}{|J|}\int\limits_0^{+\infty} m(f,J,\lambda)\lambda^{p-1}\,d\lambda \le a^p + \frac{p}{|J|}\int\limits_a^{+\infty} m(f,J,\lambda)\lambda^{p-1}\,d\lambda.$$

Для оценки последнего слагаемого, применяя (15), имеем

$$\frac{1}{|J|}\int\limits_a^{+\infty} m(f,J,\lambda)\lambda^{p-1}\,d\lambda \le \frac{c_r}{r-p}\,\eta^r(|J|)\Bigg(⨍\limits_J g^q(x)\,dx\Bigg)^{\frac{r}{q}} \cdot a^{p-r}.$$

Теперь, положив

$$a = \eta(|J|)\Bigg(⨍\limits_J g^q(x)\,dx\Bigg)^{\frac{1}{q}},$$

мгновенно получаем (14). Лемма доказана. $\square$

Используя эту лемму, получим оценку интегрального модуля непрерывности для функции $f \in P_q^\eta$.

Теорема 3. *Пусть p, $q \geq 1$ и функции η, g, f такие, как в условии леммы 1. Тогда*

$$\omega_p(f,\delta) \leq c\|g\|_q \cdot \delta^\beta \eta(\delta),$$

где $\beta = \min(p^{-1} - q^{-1}; 0)$, а постоянная c зависит только от p, q и α.

Доказательство. Из неравенства (4), в силу леммы 1, имеем

$$\left(⨍_I |f(x+h) - f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1 \eta(|2I|) \left(⨍_{2I} g^q(x)\, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

при $0 < h \leq |I|$. Отсюда, разбивая $[0; 1-h]$ на отрезки $\{I_k\}$, как в доказательстве теоремы 1, получаем, что

$$\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p\, dx \leq c_2 \sum_k \eta^p(|I_k|)|I_k|^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{2I_k} g^q(x)\, dx \right)^{\frac{p}{q}}.$$

В случае, когда $p \leq q$ находим

$$\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p\, dx \leq 2c_2 \eta^p(h) \sum_k |I_k|^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_{2I_k} g^q(x)\, dx \right)^{\frac{p}{q}}.$$

Осталось к этой сумме применить неравенство Гельдера, и получим утверждение теоремы при $\beta = 0$.

Если же $p > q$, то имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p\, dx \\
&\qquad \leq c_2 \sum_k \left(\eta(|I_k|)|I_k|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right)^p \left(\int_{2I_k} g^q(x)\, dx \right)^{\frac{p}{q}} \\
&\qquad \leq c_3 h^{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \eta^p(h) \sum_k \left(\int_{2I_k} g^q(x)\, dx \right)^{\frac{p}{q}} \\
&\qquad \leq 2c_3 h^{p\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \eta^p(h) \left(\int_0^1 g^q(x)\, dx \right)^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 4. Пусть $\alpha > q^{-1}$ и $p > q$. Тогда из теоремы 3 следует, что $f \in H_p^\sigma$ при $\sigma(\delta) = O(\delta^{p^{-1}-q^{-1}}\eta(\delta))$, $\delta \to +0$. Значит, в силу замечания 1, $f \in BMO^\omega$ при $\omega(\delta) = O(\delta^{-q^{-1}}\eta(\delta))$, $\delta \to +0$. Таким образом, учитывая (2), получаем, что f эквивалентна некоторой непрерывной функции φ и

$$\omega(\varphi,\delta) \le c\int_0^\delta \eta(t)\cdot\frac{dt}{t^{1+q^{-1}}} \le c\delta^{-\alpha}\eta(\delta)\int_0^\delta t^{\alpha-q^{-1}-1}\,dt = \frac{c}{\alpha-q^{-1}}\,\delta^{-q^{-1}}\eta(\delta). \quad (16)$$

Следовательно, в данном случае справедливо вложение $P_q^\eta \subset H^\omega$ при $\omega(\delta) = O(\delta^{-q^{-1}}\eta(\delta))$, $\delta \to +0$.

С другой стороны, при $\eta(t) = t^{-\alpha}$ условие $\alpha > q^{-1}$ является и необходимым для $P_q^\eta \subset H^\omega$. Действительно, вложение $F_q^\eta \subset H^\omega$ имеет место только тогда, когда [14, с. 85]

$$\left(\int_0^\delta t^{-q'}\eta^{q'}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q'}} = O(\omega(\delta)), \qquad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1.$$

Отсюда, поскольку $F_q^\eta \subset P_q^\eta$, то легко видеть, что оценка (16) окончательная по порядку.

Замечание 5. При $\alpha = 0$ оценка (9) для функции $f \in F_q^\eta \subset P_q^\eta$ является более сильным вариантом теоремы 3. При $\alpha > 0$ аналог леммы 1 для $f \in F_q^\eta$ имеет место и при $p^{-1} = q^{-1} - \alpha > 0$ (см. [15]). Таким образом, утверждение теоремы 3 для $f \in F_q^\eta$ справедливо и при $p^{-1} = q^{-1} - \alpha > 0$.

Автор глубоко благодарен А. А. Кореновскому за плодотворные обсуждения результатов данной работы.

Литература

[1] F. John, L. Nirenberg, *On function of bounded mean oscillation* // Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415–426.

[2] C. Fefferman, *Characterizations of bounded mean oscillation* // Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), 587–588.

[3] C. Fefferman, E. M. Stein, *H^p spaces of several variables* // Acta Math. **129** (1972), 137–193.

[4] S. Spanne, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cube* // Ann. Scuola norm. super. Pisa. **19** (1965), N 4, 593–608.

[5] S. Campanato, *Properieta di holderianita di alcune classi di funzioni* // Ann. Scuola norm. super. Pisa. **17** (1963), N 3, 175–188.

[6] N. G. Meyers, *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity* // Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 717–721.

[7] A. Torchinsky, *Real–variable methods in harmonic analysis.* Orlando: Academic Press Inc, 1986, 462 p.

[8] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции.* М.: Мир, 1984, 469 с.

[9] В. И. Коляда, *Теоремы вложения и метрические свойства функций*: Дис... докт. физ.-мат. наук: 01.01.01., Одесса, 1986, 282 с.

[10] В. И. Коляда, *Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью* // Доклады АН СССР. **293** (1987), N 3, 534–537.

[11] A. P. Calderón, *Estimates for singular integral operators in terms of maximal functons* // Studia Math. **44** (1972), 167–186.

[12] В. Г. Кротов, *Весовые L^p-неравенства для шарп-максимальных функций* // Доклады РАН. **404** (2005), N 1, 155–158.

[13] D. Yang, *New characterizations of Hajlasz–Sobolev spaces on metric spaces* // Science of China. **46** (2003), N 5, 1–15.

[14] А. А. Кореновский, *Свойства функций, определяемые в терминах средних колебаний*: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01., Одесса, 1988, 121 с.

[15] И. А. Иванишко, В. Г. Кротов, *Обобщенное неравенство Пуанкаре–Соболева на метрических пространствах* // Труды Инст. Мат. АН РБ, **14** (2006), N 1, 51–61.

Сведения об авторах

Евгений Ю. Леончик

Одесский национальный университет
им. И. И. Мечникова,
ул. Дворянская, 2,
Одесса, 65082,
Украина
E-Mail: leonchik@ukr.net