Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 1, 116 – 153

Об экстремальных задачах теории приближений в линейных пространствах. Часть I[1]

Александр И. Степанец

Аннотация. В работе даётся обзор результатов, связанных с построением теории приближений в произвольных линейных пространствах.

2000 MSC. 41A65.

Ключевые слова и фразы. Линейное пространство, наилучшее приближение, поперечник по Колмогорову, наилучшее n-членное приближение, базисные поперечники.

В работе дается обзор результатов, связанных с аппроксимационными характеристиками пространств S^p_φ и их обобщений. Этот материал является результатом поиска новых подходов к задачам теории приближения функций многих переменных и, в частности, функций, периодических. В этой теории существует много проблем и определяющими, наверное, являются следующие: выбор приближающих агрегатов, выбор классов функций и аппроксимационных характеристик. В то время, как в одномерном случае вид простейшего агрегата диктуется естественным порядком натурального ряда, в многомерном случае, т.е. когда имеется множество $\mathfrak{X}$ — банахово пространство функций $f(t) = f(t_1 \ldots, t_m)$, $t \in R^m$, m переменных, выбор простейших агрегатов становится проблематичным. Первые трудности здесь начинаются уже с того, что́ именно следует считать аналогом частной суммы для кратного ряда

$$\sum_{k\in Z^m} c_k, \qquad k = (k_1, \ldots k_m), \tag{0.1}$$

Статья поступила в редакцию 17.01.2005

[1]Часть II данной статьи будет представлена в следующем номере журнала

ISSN 1810 – 3200.

где Z^m — целочисленная решетка в R^m.

Естественно напрашивается введение “прямоугольных” сумм и соответствующие им приближающие агрегаты в периодическом случае — тригонометрические полиномы вида

$$\sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} c_{k_1,\ldots,k_m} e^{i(k_1t_1+\cdots+k_mt_m)}. \tag{0.2}$$

Однако частные суммы кратного ряда можно определять многими способами, например, следующим.

Пусть $\{G_\alpha\}$ — семейство ограниченных областей в R^m, которые зависят от числового параметра α и такие, что любой вектор $n \in Z^m$ принадлежит всем областям G_α при достаточно больших значениях α. Тогда выражение

$$\sum_{k\in G_\alpha} c_k$$

называют частной суммой ряда (0.1), отвечающей области G_α. По аналогии с этим вводятся и соответствующие частные суммы тригонометрических рядов:

$$\sum_{k\in G_\alpha} c_k e^{ikx} = \sum_{k\in G_\alpha} c_{k_1,\ldots k_m} e^{i(k_1x_1+\cdots+k_mx_m)}. \tag{0.3}$$

Достаточно быстро обнаружилось, что в случае приближения функций из классов Соболева $W^r_p(R^m)$ вместо прямоугольных сумм вида (0.2) “выгоднее” употреблять суммы (0.3), построенные по областям, образованным определенными гиперболами. Такие области впервые были введены К. И. Бабенко в $[1, 2]$ и получили название гиперболических крестов.

Появление гиперболических крестов дало существенный толчок в развитии теории приближения функций многих переменных.

В этом направлении получено множество важных и интересных результатов, познакомиться с которыми можно, например, отправляясь от работ [3–13].

Однако попытки использования гиперболических крестов при приближении функций из классов, отличных от соболевских, желаемых результатов уже не дают.

В связи с этим, естественно, возникают предположения, что для каждого конкретного класса $\mathfrak{N}$ (или же для какого-либо семейства таких классов) нужно подбирать “свое” семейство областей G_α, определяющееся параметрами данного класса.

Следует также признать и то, что качество многих результатов, полученных с использованием гиперболических крестов, для соболевских классов нельзя считать безукоризненным. Как правило, результаты по приближениям в пространствах $L_p(R^m)$ имеют только порядковый характер, а точные результаты получаются только в гильбертовых пространствах при $p = 2$. Является ли такое положение следствием недостаточности анализа или же здесь дисгармония исходных данных поставленным целям — покажет время. По крайней мере, можно предположить, что другой причиной, усложняющей получение точных результатов по приближениям в многомерном (да и в одномерном) случае, является исторически сложившаяся практика рассматривать задачи именно в пространствах $L_p(R^m)$. В периодическом случае норма в этих пространствах

$$\|f\|_{L_p(R^m)} = \left(\int\limits_{Q_m} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad Q_m = \left\{t \in R^m,\ 0 \le t_i \le 2\pi,\ i = \overline{1,m}\right\},$$

характеризует всего лишь величину среднего значения p-ой степени модуля рассматриваемой функции и, наверное, этой информации просто недостаточно для получения желаемых результатов в общем случае.

При $p = 2$ хорошо известно равенство

$$\|f\|_{L_2(R^m)} = \left(\sum_{|k|\ge 0} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $c_k = c_{k_1\ldots k_m}$ — коэффициенты Фурье функции f. То есть в этом случае норма функции f полностью характеризует все множество $\{c_k\}_{k\in Z^m}$ (при других значениях p, разумеется, подобные равенства возможны лишь в тривиальных ситуациях). Поэтому представляется целесообразной попытка введения норм функций посредством величин, связанных как раз с их коэффициентами Фурье. Такой подход рассматривается в цикле работ автора и его последователей [14–32]. Этот подход, в частности, позволяет осуществлять распространение идей и методов теории приближений на абстрактные линейные пространства, что, в свою очередь, дает возможность смотреть на функции с общих позиций анализа и приводит к достаточно содержательным результатам, часть из которых излагается в настоящей работе.

1. Пространства S^p_Φ

Определим пространства, в которых будем затем ставить и решать задачи теории приближений.

Пусть $\mathfrak{X}$ и Y — некоторые линейные пространства векторов x и y соответственно. Предположим, что на $\mathfrak{X}$ задан линейный оператор Φ, действующий в Y, а на некотором подмножестве $Y' \subset Y$ определен функционал f. Пусть, далее, $E(\Phi)$ — множество значений оператора Φ и $\mathfrak{X}'$ — прообраз множества $Y'E(\Phi)$ при отображении Φ. В этом случае на $\mathfrak{X}'$ можно определить функционал f', полагая

$$f'(x) = f(\Phi(x)), \qquad x \in \mathfrak{X}'. \tag{1.1}$$

Если в качестве f выбрать функционал, задающий на Y' норму (или квазинорму), то равенство (1.1) будет определять аналогичную величину на $\mathfrak{X}'$. Именно эти соображения и лежат в основе дальнейших построений.

Пусть $(R^m, d\mu)$, $m \geq 1$ — m-мерное евклидово пространство точек $t = (t_1 \ldots, t_m)$, оснащенное некоторой σ-конечной мерой $d\mu$, A — μ-измеримое подмножество из $(R^m, d\mu)$, μ-мера которого равна a, где a — конечное, либо $a = \infty$:

$$\operatorname{mes}_\mu A = |A|_\mu = a, \quad a \in (0, \infty];$$

$Y = Y(A, d\mu)$ — множество всех заданных на A функций $y = y(t)$, измеримых относительно меры $d\mu$. При заданном $p \in (0, \infty]$ через $L_p\,(A, d\mu)$ обозначаются подмножества функций из $Y(A, d\mu)$, для которых конечна величина

$$\|y\|_{L_p(A,d\mu)} = \begin{cases} \Big(\int\limits_A |\, y(t)|^p\; dt\Big)^{1/p}, & p \in (0, \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in A} |\, y(t)|, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

Хорошо известно, что этот функционал при $p \geq 1$ задает норму, а при $p \in (0, 1)$ — квазинорму на $L_p\,(A, d\mu)$.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — некоторое линейное пространство векторов x и Φ — линейный оператор, действующий из $\mathfrak{X}$ в Y:

$$\Phi : \mathfrak{X} \to Y(A, d\mu), \quad \Phi(x) \overset{\text{df}}{=} \hat{x}, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad \hat{x} = Y(A, d\mu).$$

Положим

$$S^p_\Phi \;=\; S^p_\Phi\,(\mathfrak{X}; Y) = \big\{x \in \mathfrak{X} : \|\hat{x}\|_{L_p(A,d\mu)} < \infty\big\}, \quad p \in (0, \infty]. \tag{1.3}$$

Таким образом, множество S^p_Φ — прообраз в $\mathfrak{X}$ при отображении Φ множества $L_p\,(A, d\mu)$.

Элементы $x_1, x_2 \in S^p_\Phi$ считаются тождественными, если почти всюду по мере $d\mu$ $\hat{x}_1(t) = \hat{x}_2(t)$.

Для элементов $x_1, x_2 \in S^p_\Phi,\ p \in (0, \infty]$, определим Φ — расстояние между ними с помощью равенства

$$\rho_\Phi(x_1; x_2)_p = \|\Phi(x_1 - x_2)\|_{L_p(A,d\mu)}.$$

Нулевым элементом множества S^p_Φ называется элемент θ, для которого $\hat{\theta}\,(t) = 0$ почти всюду на A.

Расстояние $\rho_\Phi(\theta; x)_p,\ x \in S^p_\Phi$, называется Φ-нормой элемента и обозначается через $\|x\|_p = \|x\|_{p,\Phi}$. Таким образом, по определению

$$\|x\|_p = \|x\|_{p,\Phi} = \rho_\Phi(\theta; x)_p = \|\hat{x}\|_{L_p(A,d\mu)}. \tag{1.4}$$

В таком случае S^p_Φ — линейное пространство: операции сложения элементов и умножения их на числа, заданные в $\mathfrak{X}$ остаются пригодными и для любой пары $x_1, x_2 \in S^p_\Phi$. Кроме того, для любых чисел λ_1 и λ_2 элемент $x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2$ принадлежит к S^p_Φ. Действительно, поскольку $x_3 \in \mathfrak{X}$, то $\hat{x}_3(t) = \lambda_1 \hat{x}_1(t) + \lambda_2 \hat{x}_2(t)$. Если теперь $p \geq 1$, то в силу неравенства Минковского

$$\begin{aligned}\|\,x_3\|_p = \|\,\hat{x}_3(t)\|_{L_p(A,d\mu)} &\leq |\lambda_1|\,\|\,\hat{x}_1\|_{L_p(A,d\mu)} + |\lambda_2|\,\|\,\hat{x}_2\|_{L_p(A,d\mu)} \\ &= |\lambda_1|\,\|\,x_1\|_p + |\lambda_2|\,\|\,x_2\|_p\,.\end{aligned}$$

Если же $p \in (0, 1)$, то, используя неравенство

$$|\,a + b\,|^p \leq |\,a\,|^p + |\,b\,|^p, \qquad 0 \leq p < 1,$$

получаем

$$\|x_3\|_p = \left(\int\limits_A \left|\lambda_1 \hat{x}_1(t) + \lambda_2 \hat{x}_2(t)\right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{1/p}\big(\,|\lambda_1|\,\|\,x_1\|_p + |\lambda_2|\,\|\,x_2\|_p\big),$$

т.е. всегда $x_3 \in S^p_\Phi$.

Ясно, что функционал $\|\cdot\|_p$ при $p \geq 1$ удовлетворяет всем аксиомам нормы, а при $p \in (0, 1)$ — аксиомам квазинормы. Следовательно, S^p_Φ при $p \geq 1$ — линейное нормированное пространство, а при $p \in (0, 1)$ — пространство с квазинормой.

Рассмотрим несколько простейших реализаций рассматриваемых построений. При этом будем говорить, что некоторое пространство $\mathfrak{N}$ является частным случаем пространства S^p_Φ, если его можно получить путем надлежащего выбора пространства $\mathfrak{X}$, меры $d\mu$ и оператора Φ.

1. Пространство S^p_φ. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое линейное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathfrak{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит φ, определено некоторое число (x, y) — "скалярное произведение", удовлетворяющее условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где $\overline{z}$ — число, комплексно-сопряженное с z;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — произвольные числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Каждому элементу $x \in \mathfrak{X}$ сопоставляем систему чисел $\hat{x}(k)$ посредством равенств

$$\hat{x}(k) = x_\varphi(k) = (x, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots \quad (k \in N), \tag{1.5}$$

и при фиксированном $p \in (0, \infty)$ полагаем

$$S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathfrak{X}) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p < \infty \right\}. \tag{1.6}$$

Элементы $x, y \in S^p_\varphi$ считаются тождественными, если при всех $k \in N$ $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$.

Для векторов $x, y \in \mathfrak{X}$ определим φ-расстояние между ними с помощью равенства

$$\rho_\varphi(x, y)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{x}_\varphi(k) - \hat{y}_\varphi(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нулевым элементом пространства S^p_φ называется вектор θ, для которого $\hat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всех $k \in N$. Расстояние $\rho_\varphi(\theta, x)_p$, $x \in S^p_\varphi$, называется φ-нормой элемента x и обозначается через $\|x\|_{p,\varphi}$. Таким образом,

$$\|x\|_{p,\varphi} = \rho_\varphi(\theta, x)_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{x}_\varphi(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

Пространства S^p_φ являются частным случаем пространств S^p_Φ. Действительно, определим в данном пространстве $\mathfrak{X}$ оператор Φ, который каждому $x \in \mathfrak{X}$ ставит в соответствие последовательность $y = \{\hat{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$. В качестве множества $(R^m, d\mu)$ возьмем пространствоR^1 с мерой $d\mu$, носителем которой является множество Z^1 целочисленных точек k, в которых $\mu(k) \equiv 1$, и положим $A = \left\{ k \in Z^1, \ k \geq 1 \right\}$. В этом случае $Y(A, d\mu)$ — множество всех последовательностей y, и функционал (1.2) имеет вид

$$\|y\|_{L_p(A, d\mu)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0, \infty). \tag{1.8}$$

Пусть S — множество всех последовательностей комплексных чисел

$$S = \{x = (x_1, x_2 \ldots),\ x_k \in C\ \},$$

в котором операции сложения и умножения определяются стандартным способом:

$$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots),$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots), \quad \lambda \in C.$$

В этом случае S — линейное пространство. Выберем в качестве $\mathfrak{X}$ множество S, а в качестве φ — систему $e = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $e_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, причем

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

“Скалярное произведение” определим, полагая

$$(x, e_k) = \hat{x}_e(k) = x_k, \quad (e_k, x) = \overline{x_k},\ (x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)).$$

Для такой операции условия 2) и 3) будут выполняться автоматически. Каждому элементу $x \in \mathfrak{X}$ сопоставляется система чисел $\hat{x}(k)$:

$$\hat{x}(k) = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.5$'$}$$

и при фиксированном $p \in (0, \infty)$ в соответствии с (1.6) определяются пространства S_e^p:

$$S_e^p = S_e^p(\mathfrak{X}) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}. \tag{1.6$'$}$$

В этом случае, согласно (1.7), φ-норма элемента $x \in S_e^p$ имеет вид

$$\|\, x\|_{p,\, e} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7$'$}$$

Видим, что S_e^p совпадают с известными пространствами l_p.

Возьмем, как и раньше, в качестве $\mathfrak{X}$ пространство S, а в качестве φ — систему e', полученную из e путем удаления из нее некоторых элементов e_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots$, и по рассмотренной схеме построим пространства $S_{e'}^p$.

Ясно, что φ-норма в $S_{e'}^p$, построенная согласно (1.7), удовлетворяет неравенству

$$\|x\|_{p,\, e'} \le \|x\|_{p,\, e},$$

и поэтому $S_e^p \subset S_{e'}^p$. Ясно также, что множество $S_{e'}^p \setminus S_e^p$ может быть непустым, т. е. множество $S_{e'}^p$ может быть шире множества l_p.

1′. Пространства $S_\varphi^{p,\mu}$. Эти пространства вводятся по аналогии с пространствами S_φ^p, только на этот раз функционалы

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\cdot|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

в равенствах, соответствующих (1.5)–(1.7), заменяются функционалами

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\cdot|^p \mu_k^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — заданная система неотрицательных чисел, $\mu_k \geq 0$, $k \in N$, так что, в частности, если $\mu_k \equiv 1$, то $S_\varphi^{p,\mu} = S_\varphi^p$.

Следовательно, и эти пространства являются частным случаем пространств S_Φ^p. В качестве множества $(R^m, d\mu)$ здесь, как и для пространств S_φ^p, является пространство R^1 с мерой $d\mu$, сосредоточенной на множестве Z^1 целочисленных точек k, в которых $\mu(k) = \mu_k$ и $A = \{k \in Z^1,\ k \geq 1\}$.

Более детально об этих пространствах изложено в §4 настоящей работы.

2. Пространство $S_{\mathfrak{F}}^p(L)$. Пусть, как и раньше, R^m — m-мерное, $m \geq 1$, евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_m)$ — его элементы, Z^m — целочисленная решетка в R^m, $xy = x_1y_1 + \dots + x_my_m$, $x, y \in R^m$. Пусть, далее, $L = L(R^m, 2\pi)$ — множество всех 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$, суммируемых относительно обычной меры Лебега на кубе периодов Q^m,

$$Q^m = \{x : x \in R^m,\ -\pi \leq x_k \leq \pi,\ k = 1, 2, \dots, m\}. \qquad (1.9)$$

Возьмем в качестве $\mathfrak{X}$ пространство $L(R^m, 2\pi)$ и определим на нем оператор Φ (который будем обозначать через $\mathfrak{F}$), положив

$$\mathfrak{F}(f) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(x)\, e^{-ikx} dx = \hat{f}(k), \qquad k \in Z^m. \qquad (1.10)$$

Этот оператор отображает пространство $L(R^m, 2\pi)$ во множество Y функций $y(t)$, заданных на целочисленной решетке Z^m. Пусть, кроме того, $d\mu$ — мера в пространстве R^m, носителем которой является множество Z^m, где она равна единице. В этом случае функционал (1.2) имеет вид

$$\| y \|_{L_p(R^m,d\mu)}= \left(\int\limits_{R_m} |y(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k\in Z^m} \left|\hat{f}(k)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0,\infty), \tag{1.11}$$

и пространство S^p_Φ (которое обозначим через $S^p_{\mathfrak{F}}(L)$) определяется соотношением

$$S^p_{\mathfrak{F}}(L) = \left\{ f \in L : \left(\sum_{k\in Z^m} \left|\hat{f}(k)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \infty \right\}. \tag{1.12}$$

Заметим, что пространства $S^p_{\mathfrak{F}}(L)$ совпадают с рассмотренными выше пространствами $S^p_\varphi(L)$, порождаемыми множеством L и системой $\varphi = \{\tau_s\}_{s=1}^\infty$,

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2} e^{ik_s x}, \quad k_s \in Z^m, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{1.13}$$

которая получается из системы

$$(2\pi)^{-m/2} e^{ikx}, \qquad k \in Z^m, \tag{1.14}$$

путем произвольной фиксированной нумерации ее членов.

3. Рассмотрим примеры, в которых пространства S^p_Φ определяются недискретными мерами.

Выберем в качестве $\mathfrak{X}$ и Y пространства функций $L_2(R^m)$ с обычной мерой Лебега и зададим оператор Φ преобразованием Фурье:

$$\Phi(f) = \hat{f}(t) = \mathfrak{F}(f;t) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{R^m} f(x)\, e^{-itx}\, dx, \ f \in L_2(R^m). \tag{1.15}$$

Известно (см., например, [33, гл. I]), что оператор $\mathfrak{F}$ является унитарным на $L_2(R^m)$. Следовательно, Φ-норма $\|f\|_{2,\Phi}$ элемента f совпадает с его нормой в пространстве $L_2(R^m)$:

$$\| f\|_{2,\mathfrak{F}} = \| f\|_{L_2(R^m)}, \tag{1.16}$$

и в этом случае пространство $S^2_\Phi(L_2(R^m),\, R^m,\, dx)$ в силу формулы (1.3) имеет вид $S^2_\Phi = \{f : f \in L_2(R^m)\}$, т.е. $S^2_\Phi = \mathfrak{X} = L_2(R^m)$.

4. По схеме, изложенной в предыдущем примере, строятся пространства S^2_Φ, когда вместо преобразования Фурье берется любой оператор, унитарный на множестве $L_2(A, d\mu)$, где A — некоторое многообразие в R^m, а $d\mu$ — некоторая σ-конечная мера в R^m. Пусть, к примеру, $L_2(A, d\mu)$ является множеством $L_2(R^1_+)$ функций $f(t)$, суммируемых по Лебегу с квадратом на полуоси $(0, \infty)$, а Φ — преобразование Ганкеля

$$H_v f = H_v(f; x) = \hat{f}(x) = \hat{f}_v(x)$$
$$= x^{-(v+1/2)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^\infty x^{v+1} J_{v+1}(xt) \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt, \quad (1.17)$$

где v — некоторое число, $v \geq -1$, а $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя I рода порядка α.

Известно, что преобразование Ганкеля порождает оператор H_v, унитарный на $L_2(R^1_+)$ и совпадающий со своим обратным (см., например, [34, гл. III]). Поэтому выполняется аналог равенства (1.16):

$$\| f\|_{2,H_v} = \| f\|_{L_2(R^1_+)}.$$

Следовательно, $S^2_{H_v} = \{f : L_2(R^1_+)\}$, т.е. и в этом случае

$$S^2_{H_v} = \mathfrak{X} = L_2(R^1_+).$$

5. Рассмотрим еще частный случай пространств S^p_Φ, которые порождаются тождественным оператором, т.е. когда $\Phi \equiv I$. Ясно, что тогда должно быть $\mathfrak{X} = Y(A, d\mu)$, $\hat{x} = x$, и согласно (1.3),

$$S^p_I = \{x \in \mathfrak{X} : \|x\|_{L_p(A,d\mu)} < \infty\} = L_p(A, d\mu), \qquad p \in (0, \infty).$$

2. Мультипликаторы. Приближающие агрегаты и объекты приближений

В качестве приближающих агрегатов для элементов $x \in S^p_\Phi$ используются элементы из S^p_Φ, у которых образы имеют носители γ_σ заданной меры σ. Понятно, что именно этот принцип заложен в классическом случае при построении, например, тригонометрических полиномов для приближения данной периодической функции, если под оператором Φ понимать отображение функций во множество их коэффициентов Фурье. В общем случае здесь возникают проблемы, которые в конечном счете вызваны тем, что пространства S^p_Φ могут быть не полными. В связи с этим дадим следующие определения.

Пусть $\omega = \omega(t)$ — некоторая функция из $Y(A, d\mu)$. Тогда через M^ω_Φ обозначим оператор, действующий из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$, который данному $x \in \mathfrak{X}$ ставит в соответствие элемент $x_\omega \in \mathfrak{X}$ такой, что если $\Phi(x) = \hat{x}(t)$, то почти всюду $\hat{x}_\omega(t) = \Phi(x_\omega) = \omega(t)\hat{x}(t)$. Оператор M^ω_Φ будем называть мультипликатором оператора Φ, порождаемым функцией ω; через $\Omega_\Phi(\mathfrak{X}) = \Omega_\Phi(\mathfrak{X}, Y)$ обозначим подмножество функций ω из $Y(A, d\mu)$, для которых мультипликаторы M_Φ^ω существуют.

Если $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ — некоторые подмножества из $\mathfrak{X}$, $\omega \in \Omega_\Phi(\mathfrak{X})$ и оператор M_Φ^ω отображает $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}'$, то будем говорить, что M_Φ^ω имеет тип $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')$. В частности, если M_Φ^ω отображает S_Φ^p в S_Φ^p, то оператор M_Φ^ω имеет тип (S_Φ^p, S_Φ^p) или, короче, тип (p,p). Множество функций ω, порождающих операторы типа (p,p), обозначим через Ω_Φ^p.

Итак, если $\omega \in \Omega_\Phi^p$ и оператор M_Φ^ω действует из S_Φ^p, то он действует также в S_Φ^p; при этом каждому $x \in S_\Phi^p$ соответствует элемент $x_\omega = M_\Phi^\omega(x)$, для которого почти всюду на A выполняется равенство

$$\hat{x}_\omega(t) = \Phi(x_\omega) = \omega(t)\hat{x}(t), \quad \hat{x}_\omega \in L_p(A, d\mu). \tag{2.1}$$

Пусть при заданном $\sigma > 0$ γ_σ — μ-измеримое множество в A,

$$\mathrm{mes}_\mu \gamma_\sigma \overset{\mathrm{df}}{=} |\gamma_\sigma| = \sigma, \quad \sigma \le a, \tag{2.2}$$

и $\lambda = \lambda(t)$ — измеримая функций с носителем γ_σ. Предположим, что при заданном $p \in (0, \infty)$ $\lambda \in \Omega_\Phi^p$ и $U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} x_\lambda = M_\Phi^\lambda(x)$, так что согласно (2.1)

$$\widehat{U}_{\gamma_\sigma}(x;\lambda) = \Phi(U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)) = \begin{cases} \lambda(t)\hat{x}(t), & t \in \gamma_\sigma; \\ 0, & t \bar{\in} \gamma_\sigma, \ x \in S_\Phi^p. \end{cases} \tag{2.3}$$

Именно элементы $U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)$ и рассматриваются в качестве приближающих агрегатов для $x \in S_\Phi^p$. Если при этом $\lambda(t) \equiv 1$ на γ_σ, т.е. когда $\lambda(t)$ совпадает с характеристической функцией $\chi_{\gamma_\sigma}(t)$ множества γ_σ, то полагаем $U_{\gamma_\sigma}(x;\chi_{\gamma_\sigma}) = U_{\gamma_\sigma}(x)$.

Пусть $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(A)$ — множество всех измеримых подмножеств γ_σ из A, меры которых равны σ. Будем говорить, что при данном $p > 0$ оператор Φ удовлетворяет условию (A_p), если функции $\chi_{\gamma_\sigma}(t)$ для всех множеств $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ принадлежат к Ω_Φ^p при любых $\sigma \in [0, a)$. Таким образом, если Φ удовлетворяет условию (A_p), то все элементы $U_{\gamma_\sigma}(x)$ определены при любом $x \in S_\Phi^p$ и находятся в S_Φ^p. Элемент $U_{\gamma_\sigma}(x)$ называется сужением элемента x ранга σ, элемент $U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)$ — λ-сужением x ранга σ.

Пусть p — любое положительное число и $x \in S_\Phi^p$. Тогда в силу (1.4) и (2.3) имеем

$$\|x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)\|_p^p = \| \hat{x}(t) - \hat{U}_{\gamma_\sigma}(x;\lambda;t)\|_{L_p(A,d\mu)}^p$$
$$= \int\limits_{\gamma_\sigma} |1 - \lambda(t)|^p | \hat{x}(t)|^p \, d\mu + \int\limits_{A \setminus \gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu.$$

Отсюда приходим к следующему утверждению.

Предложение 2.1. *Пусть* $p \in (0, \infty)$, $x \in S^p_\Phi = S^p_\Phi(\mathfrak{X}; Y)$, $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ *и оператор* Φ *удовлетворяет условию* (A_p). *Тогда*

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{\lambda \in \Omega^p_\Phi} \| x - U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda) \|_p \;=\; \| x - U_{\gamma_\sigma}(x) \|_p.$$

При этом выполняется равенство

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \;=\; \| x \|^p_p - \int\limits_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu. \tag{2.4}$$

Таким образом, если $\chi_{\gamma_\sigma} \in \Omega^p_\Phi$, то среди всех элементов $U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda)$, порождаемых мультипликаторами M^λ_Φ и удовлетворяющих условию (2.3), наименее уклоняется от элемента x по Φ-норме в пространстве S^p_Φ элемент $U_{\gamma_\sigma}(x)$, т.е. среди всех λ-сужений x данного ранга σ ближайшим к x оказывается именно его сужение при $\lambda(t) \equiv 1$. Понятно, что это свойство является аналогом минимального свойства сумм Фурье в пространствах Гильберта L_2.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_\sigma\}_{\sigma > 0}$, $|\gamma_\sigma| = \sigma$, — семейство измеримых подмножеств из A, исчерпывающее при $\sigma \to \infty$ все множество A, т.е. обладающее тем свойством, что любая точка $t \in A$ находится во всех множествах γ_σ при всех достаточно больших значениях σ, так что

$$\lim_{\sigma \to \infty} \int\limits_{\gamma_\sigma \in \Gamma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu = \int\limits_A |\hat{x}(t)|^p \, d\mu \qquad \forall\, x \in S^p_\Phi. \tag{2.5}$$

Объединяя соотношения (2.4) и (2.5), видим,что

$$\lim_{\substack{\sigma \to \infty \\ \gamma_\sigma \in \Gamma}} \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \;=\; 0 \qquad \forall\, x \in S^p_\Phi. \tag{2.6}$$

Определим теперь объекты приближения — объединения элементов $x \in \mathfrak{X}$, соответствующих в теории приближений понятию класса функций. Такие объекты, как и приближающие агрегаты, вводятся с помощью мультипликаторов. Однако здесь представляется более удобным использование несколько другой терминологии, более близкой к традиционной. Пусть $\Psi = \Psi(t)$ — произвольная функция из $\Omega_\Phi(\mathfrak{X})$ и M^Ψ_Φ — мультипликатор оператора Φ, порождаемый этой функцией. В этом случае образ x_Ψ элемента x при отображении M^Ψ_Φ будем называть Ψ-интегралом элемента x и записывать $M^\Psi_\Phi(x) = x_\Psi = \jmath^\Psi x$; при этом x иногда удобно называть Ψ-производной для x_Ψ и записывать $x = D^\Psi x_\Psi$.

Таким образом, если x_Ψ является Ψ-интегралом для x, то почти всюду

$$\hat{x}_\Psi = \Phi(\jmath^\Psi x) = \Psi(t)\hat{x}(t). \tag{2.7}$$

Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathfrak{X}$, то через $\Psi\,\mathfrak{N}$ обозначается множество Ψ-интегралов всех тех $x \in \mathfrak{N}$, для которых они существуют. В частности, если U^p_Φ — единичный шар в некотором пространстве S^p_Φ,

$$U^p_\Phi = \{x : x \in S^p_\Phi,\ \|\,x\|_{p,\Phi}\ \le 1\},$$

то ΨU^p_Φ — множество Ψ-интегралов всех $x \in U^p_\Phi$, для которых эти интегралы существуют.

Сопоставляя соотношения (2.7) и (2.1), видим, что в качестве функций Ψ, для которых определение Ψ-интеграла корректно, можно выбрать любую функцию из $\Omega_\Phi(S^p_\Phi)$. В этом случае справедливо включение $\Psi S^p_\Phi \subset S^p_\Phi$.

Множества ΨU^p_Φ и являются теми объектами, для которых в работе рассматриваются традиционные задачи теории приближений.

3. Аппроксимационные характеристики множеств ΨU^p_Φ

Будем рассматривать следующие величины. Для каждого $\gamma_\sigma \in \Gamma$ положим

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q\ =\ \inf_{\lambda\in\Omega^p_\Phi}\ \|\,x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)\|_{q,\Phi}, \qquad x \in S^p_\Phi, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_q = \sup_{x\in\Psi U^p_\Phi}\ \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q \tag{3.2}$$

и

$$D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_q = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\ \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_q. \tag{3.3}$$

В случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами величине $\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q$ будет соответствовать наилучшее приближение функции x посредством полиномов степени σ; величине $\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_q$ — верхняя грань на заданном множестве функций таких наилучших приближений; величина $D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_q$ напоминает тригонометрический поперечник порядка σ множества ΨU^p_Φ.

Рассматриваются также следующие характеристики, которым в периодическом случае соответствуют величины, связанные с наилучшим σ-членным приближением:

$$e_\sigma(x)_q = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\ \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\ \inf_{\lambda\in\Omega^p_\Phi}\ \|\,x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)\|_{\,q,\Phi} \tag{3.4}$$

и

$$e_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_q = \sup_{x\in\Psi U^p_\Phi} e_\sigma(x)_q. \tag{3.5}$$

Ближайшие рассмотрения ограничиваются случаем, когда $p = q$. Кроме того, предполагается, что соответствующие характеристические функции $\chi_{\gamma_\sigma}(\cdot)$ принадлежат к Ω^p_Φ, т.е. оператор Φ удовлетворяет условию (A_p). В этом случае, согласно предложению 2.1, наибольший интерес представляют величины (3.1)–(3.5), когда $\lambda(t) = \chi_{\gamma_\sigma}(t)$. В связи с этим полагаем

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p = \| x - U_{\gamma_\sigma}(x)\|_{p,\Phi}, \qquad x \in S^p_\Phi, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_p = \sup_{x\in\Psi U^p_\Phi} \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \tag{3.7}$$

и

$$D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_p. \tag{3.8}$$

Аналогично,

$$e_\sigma(x)_p = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \| x - U_{\gamma_\sigma}(x)\|_{p,\Phi} \tag{3.9}$$

и

$$e_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p = \sup_{x\in\Psi U^p_\Phi} e_\sigma(x)_p.$$

3.1. Величины $\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_p$ и $D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p$

В дальнейшем используется понятие перестановки функции в убывающем порядке. Это понятие, по-видимому, впервые появилось в работах Харди и Литтлвуда (см. [35, гл. X]), и затем с успехом использовалось многими авторами. Приведем здесь необходимые определения, придерживаясь текста из книги Н. П. Корнейчука [36, гл. 6], в которой рассматриваются перестановки функций одной переменной, но основные определения пригодны и в общем случае.

Пусть на μ-измеримом множестве $A \subset R^m$, $m \geq 1$, $\mathrm{mes}_\mu A = a$, где a — конечно или бесконечно, задана неотрицательная и μ-измеримая функция $f(x)$, у которой функция распределения

$$m_f(y) = \mathrm{mes}_\mu E_y, \quad E_y = \{x : x \in A, f(x) \geq y\}, \quad y \geq 0,$$

принимает при $y > 0$ только конечные значения.

Функция $t = m_f(y)$ не возрастает при всех $y \geq 0$, при этом $m_f(0) = a$. Если $m_f(y)$ непрерывна и строго убывает, то на промежутке $t \in (0, a)$ существует строго убывающая обратная к ней функция $y = \overline{\varphi}(t)$, которую и называют перестановкой функции $f(x)$

в убывающем порядке. В общем случае, в зависимости от функции $f(\cdot)$, $m_f(y)$ может иметь промежутки постоянства, а также разрывы первого рода в конечном или же счетном множестве точек. Чтобы однозначно определить обратную к ней функцию, исправим график функции $m_f(y)$ следующим образом. В каждой точке разрыва y_j функции $m_f(y)$ дополним ее график отрезком $y = y_j$, $m_f(y_j + 0) \le t \le m(y_j + 0)$, а на каждом промежутке $[\alpha, \beta]$, где $m_f(y)$ постоянна, оставим в ее графике только одну точку с координатами, например, $y = (\alpha + \beta)/2$, $t = m_f((\alpha + \beta)/2)$. Тогда каждому $t \in (0, a)$ будет соответствовать единственная точка с координатами $(t, m_f^{-1}(t))$. Это отображение и определяет функцию $y = \overline{\varphi}(t)$ — перестановку функции $\varphi(x)$ в рассматриваемом случае.

При любом $y \ge 0$ мера Лебега множества точек $t \in (0, a)$, на котором $\overline{\varphi}(t) \ge y$, равна $m_f(y)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{t : t \in (0, a),\ \overline{\varphi}(t) \ge y\}& \\ = \operatorname{mes}_\mu \{x : x \in A,\ f(x) \ge y\} = m_f(y).& \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует справедливость равенства

$$\int\limits_0^a F(\overline{\varphi}(t))\, dt = \int\limits_A F(f(x))\, d\mu \qquad (3.11)$$

для любой функции F, для которой эти интегралы существуют (см. [35, гл. X]).

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $\Psi = \Psi(t)$ — произвольная функция из $Y(A, d\mu)$, существенно ограниченная на A:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in A} |\Psi(t)| = \|\Psi\|_M < \infty. \qquad (3.12)$$

и в случае, когда множество A не ограничено,

$$\lim_{|t| \to \infty} \Psi(t) = 0. \qquad (3.13)$$

Тогда для произвольных $\mathfrak{X}$, $A \subset R^m$, $m \ge 1$, $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, $\sigma < a$ и $p \in (0, \infty)$, для любого оператора Φ, удовлетворяющего условию (A_p), справедливы оценки

$$\mathcal{E}^p_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_p \le \overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0 + 0), \qquad (3.14)$$

где $\overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(v)$ *— перестановка в убывающем порядке функции*

$$\varphi_\sigma(t)=\varphi_{\gamma_\sigma}(t)=\begin{cases}|\Psi(t)|^p, & t\in A\setminus\gamma_\sigma;\\ 0, & t\in\gamma_\sigma,\end{cases} \tag{3.15}$$

и

$$D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p\le\overline{\Psi}(\sigma+0), \tag{3.16}$$

где $\overline{\Psi}(v)$ *— перестановка в убывающем порядке функции* $|\Psi(t)|$.

Если, к тому же, функции $\chi_{\gamma_\sigma}(t)$ *для любых* $\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma$ *и* $\sigma\in(0,a)$ *принадлежат множеству* $E(\Phi)$ *значений оператора* Φ, *а их прообразы* U_{γ_σ} *имеют* Ψ*-интегралы, то соотношения* (3.14) *и* (3.16) *являются равенствами. При этом в* Γ_σ *имеется множество* γ^*_σ, *для которого выполняются равенства*

$$\mathcal{E}_{\gamma^*_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_p=D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p=\overline{\Psi}(\sigma+0). \tag{3.17}$$

Это множество определяется соотношением

$$\gamma^*_\sigma=\{t\in A:\,|\Psi(t)|\,\ge\,\overline{\Psi}(\sigma+0)\},\quad \operatorname{mes}\gamma^*_\sigma=\sigma.$$

Доказательство этой теоремы содержится в [23]. Здесь только отметим, что условия (3.12) и (3.13) гарантируют тот факт, что для функции $|\Psi(t)|$ ее функция распределения $m_{|\Psi|}(y)$

$$m_{|\Psi|}(y)=\mathrm{mes}_\mu E_y,\quad E_y=\{t\in A:\,|\Psi(t)|\,\ge\,y\},\ y\ge0,$$

принимает при любом $y>0$ только конечные значения из промежутка $[0,a]$. Поэтому величины $\overline{\varphi}_\sigma(0+0)$ и $\overline{\Psi}(\sigma+0)$ всегда определены.

Заметим также, что в случае, когда $E(\Phi)=L_p(A,d\mu)$, оператор Φ удовлетворяет условию (A_p) и в силу условий (3.12) и (3.13) выполняются ещё и требования, обеспечивающие равенства в соотношениях (3.14) и (3.16).

3.2. Величины $e_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p$

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть* $\Psi=\Psi(t)$ *— произвольная функция из* $Y(A,d\mu)$, *существенно ограниченная на* A *и в случае, когда множество* A *не ограничено, удовлетворяет условию* (3.13).

Тогда для произвольных $\mathfrak{X}$, $A\subset R^m$, $m\ge1$, $\sigma\le a$ *и* $p\in(0,\infty)$, *для любого оператора* Φ, *удовлетворяющего условию* (A_p), *выполняется соотношение*

$$e^p_\sigma(\Psi U^p_\Phi)\,\le\,\sup_{\sigma<q\le a}\frac{q-\sigma}{\int_0^q\frac{dt}{\overline{\Psi}^p(t)}}\,, \tag{3.18}$$

в котором $\overline{\Psi}(v)$ *— перестановка в убывающем порядке функции* $|\Psi(t)|$. *Величина точной верхней грани в* (3.18) *достигается при некотором конечном значении* $q = q^*$.

Если , к тому же, множество $E(\Phi)$ *значений оператора* Φ *совпадает со всем пространством* $L_p(A, d\mu)$, *то соотношение* (3.18) *на самом деле является равенством.*

Доказательство приведено в [23]. Его существенной частью является следующая ниже теорема 3.3, которая доказана в [23]. Здесь наметим только узловые моменты доказательства теоремы 3.2.

Для любого $x \in S^p_\Phi$ согласно (3.9) и (1.2) имеем

$$\begin{aligned} e^p_\sigma(x)_p &= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \| \Phi(x - U_{\gamma_\sigma}(x))\|^p_{L_p} \\ &= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \| \hat{x}(t)(1 - \chi_{\gamma_\sigma}(t))\|^p_{L_p} \\ &= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left(\int\limits_A | \hat{x}(t)|^p \, d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu \right) \\ &= \int\limits_A | \hat{x}(t)|^p \, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu, \qquad L_p \stackrel{\mathrm{df}}{=} L_p(A, d\mu). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e^p_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p = \sup_{x \in \Psi U^p_\Phi} \left(\int\limits_A | \hat{x}(t)|^p \, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu \right). \tag{3.19}$$

Если $x \in \Psi U^p_\Phi$, то $\hat{x}(t) = \Psi(t)\hat{y}(t)$, где y — некоторый элемент из U_p. Поэтому справедливо соотношение

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \Psi U^p_\Phi} \left(\int\limits_A | \hat{x}(t)|^p \, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu \right) \\ &\quad \le \sup_{y \in U_p} \left(\int\limits_A | \Psi(t)|^p \, |y(t)\,|^p \, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} |\Psi(t)|^p | \, y(t)\,|^p \, d\mu \right) \\ &= \sup_{h \in U^+_1} \left(\int\limits_A | \Psi(t)|^p \, |h(t)\,| \, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} |\Psi(t)|^p | \, h(t)\,| \, d\mu \right), \end{aligned} \tag{3.20}$$

где U^+_1 — подмножество неотрицательных функций из U_1.

Для нахождения значений правой части (3.20) воспользуемся следующим утверждением. Это утверждение, наверное, представляет и самостоятельный интерес, поэтому сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 3.3. *Пусть A — любое μ-измеримое множество из R^m, $m \geq 1$, $\mathrm{mes}_\mu A = a$, где a — конечное, или $a = \infty$, $\varphi(x)$ — неотрицательная, существенно ограниченная на A функция, для которой в случае, когда множество A не ограниченное, предполагается, что*

$$\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0. \tag{3.21}$$

Тогда при любом $\sigma < a$ выполняется равенство

$$\xi_\sigma(\varphi) = \sup_{h\in U_1^+} \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \left(\int\limits_A \varphi(x)\, h(x)\, d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \varphi(x)\, h(x)\, d\mu \right)$$

$$= \sup_{\sigma<q\leq a} \frac{q-\sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\varphi}(t)}}, \tag{3.22}$$

где $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(A)$ — множество всех μ-измеримых подмножеств γ_σ из A, мера которых равна σ, а $\overline{\varphi}(t)$ — убывающая перестановка функции $\varphi(x)$.

Точная верхняя грань в правой части (3.22) достигается при некотором конечном значении $q = q^*$.

Полагая $\varphi(x) = |\Psi(x)|^p$ и объединяя соотношения (3.19), (3.20) и (3.22), получаем соотношение (3.18).

Заметим теперь, что знак строгого неравенства в (3.18) может быть только в том случае, когда такой же знак будет в (3.20). Строгое неравенство в (3.18) возможно только из-за того, что не каждая функция $y \in U_p$ имеет свой прообраз в U_Φ^p, обладающий к тому же Ψ-интегралом. Однако в случае, когда $E(\Phi) = L_p(A)$, такого быть не может: для любого $y \in U_p$ существует свой прообраз и в силу ограниченности Ψ произведение $\Psi(t)y(t)$ принадлежит к $L_p(A, d\mu)$ и, следовательно, также имеет свой прообраз в S_Φ^p, а точнее, в ΨU_Φ^p. Таким образом, в этом случае соотношение (3.18) на самом деле является равенством.

4. Экстремальные задачи в пространствах $S_\varphi^{p,\mu}$

К настоящему времени наиболее полные и окончательные результаты получены для пространств $S_\varphi^{p,\mu}$. Здесь дается краткий обзор полученных ранее результатов, связанных с наилучшими приближениями и поперечниками множеств, отвечающих множествами ΨU_Φ^p и в ряде не рассматриваемых ранее ситуаций устанавливаются новые утверждения для этих величин. Пространства $S_{\varphi}^{p,\mu}$ уже упоминались в §1. Однако с целью полноты и строгости изложения здесь приводятся все необходимые для дальнейшего определения.

4.1. Пространства $S_{\varphi}^{p,\mu}$

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое линейное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что любой паре элементов $x, y \in \mathfrak{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит φ, поставлено в соответствие число (x, y) — "скалярное произведение", таким образом, что выполняются условия

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где $\overline{z}$ — число, комплексно-сопряженное с z;
2) $(\lambda x_1 + \nu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \nu(x_2, y)$, λ, ν — произвольные числа;
3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Пусть, далее, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая система неотрицательных чисел, $\mu_k \geq 0$, $k \in N = \{1, 2, \ldots\}$.

Каждому элементу $x \in \mathfrak{X}$ сопоставим систему чисел $\hat{x}(k) = \hat{x}_{\varphi}(k)$ посредством равенств

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_{\varphi}(k) = (x, \varphi_k), \qquad k \in N,$$

и при данном фиксированном $p \in (0, \infty)$ положим

$$S_{\varphi}^{p,\mu} = S_{\varphi}^{p,\mu}(\mathfrak{X}) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k \hat{x}_{\varphi}(k)|^p < \infty \right\}. \tag{4.1}$$

Элементы $x, y \in S_{\varphi}^{p,\mu}$ считаются тождественными, если при всех $k \in N$ $\hat{x}_{\varphi}(k) = \hat{y}_{\varphi}(k)$. Таким образом, множество $S_{\varphi}^{p,\mu}$ порождается пространством $\mathfrak{X}$, системами φ и μ, операцией $(\cdot, \cdot)$ и числом p.

В случае, когда $\mu_k \equiv 1$, $k \in N$, множества $S_{\varphi}^{p,\mu}$, как уже отмечалось, совпадают с множествами S_{φ}^{p}, которые введены и изучались в [14–23]; в общем случае они впервые рассматривались в [20].

Для произвольных векторов $x, y \in \mathfrak{X}$ определим φ, μ-расстояние между ними при помощи равенства

$$\rho(x, y)_{p,\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \|x - y\|_{p,\mu} = \|x - y\|_{p,\mu,\varphi} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{x}_{\varphi}(k) - \hat{y}_{\varphi}(k) \right|^p \mu_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нулевым элементом пространства $S_{\varphi}^{p,\mu}$ называется вектор θ, для которого $\hat{\theta}_{\varphi}(k) = 0$ при всех $k \in N$. Расстояние $\rho(\theta, x)_{p,\mu}$, $x \in S_{\varphi}^{p,\mu}$, называется φ,μ-нормой элемента x и обозначается через $\|x\|_{p,\mu}$. Таким образом, по определению

$$\| x\|_{p,\mu} = \| x\|_{p,\mu,\varphi} = \rho(\theta, x)_{p,\mu} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\mu_k \hat{x}_{\varphi}(k)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4.2)$$

В [20] показано, что множество $S^{p,\,\mu}_{\varphi}$ — линейное пространство с теми же операциями сложения и умножения числа векторов, которые определены во всем $\mathfrak{X}$.

Если в системе μ все числа μ_k отличны от нуля, то равенство $\|x\|_{p,\mu} = 0$ возможно только при $x = \theta$. Отсюда вытекает, что при $p \geq 1$ и $\mu_k > 0$, $k \in N$, функционал $\| \cdot \|_{p,\mu}$, определяемый равенством (4.2), удовлетворяет всем аксиомам нормы, а при $p \in (0,1)$ — квазинормы. Поэтому, если $\mu_k > 0$, $k \in N$, то при $p \geq 1$ $S^{p,\,\mu}_{\varphi}$ — линейное нормированное пространство, а при $p \in (0,1)$ — пространство с квазинормой, содержащее ортогональную систему $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\|\varphi_k\|_{p,\mu} = \mu_k$.

Пусть теперь, f — произвольный элемент пространства $S^{p,\mu}_{\varphi}$ и

$$S[\, f\,]_{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_{\varphi}(k)\varphi_k \, — \qquad (4.3)$$

его формальный ряд по системе φ.

Пространства $S^{p,\,\mu}_{\varphi}$ наследуют важнейшие свойства сепарабельных гильбертовых пространств — равенство Парсеваля в виде соотношения (4.2) и минимальное свойство частных сумм Фурье, которое формулируется следующим образом.

Предложение 4.1. *Пусть $\{g_\alpha\}$ — семейство ограниченных подмножеств множества N, зависящих от параметра α и таких, что любое число $n \in N$ принадлежит всем множествам $\{g_\alpha\}$ с достаточно большими индексами α.*

Пусть, далее, $f \in S^{p,\,\mu}_{\varphi}$, $p \in (0, \infty)$, и

$$S_\alpha(f) = S_{g_\alpha}(f) = \sum_{k \in g_\alpha} \hat{f}(k)\varphi_k \, —$$

частная сумма ряда Фурье $S[f]_\varphi$ элемента f, соответствующая множеству $\{g_\alpha\}$. Тогда среди всех сумм вида

$$\Phi_\alpha = \sum_{k \in g_\alpha} c_k \varphi_k$$

наименее уклоняется от f в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ частная сумма $S_\alpha(f)$, т.е.

$$\inf_{c_k} \|f-\Phi_\alpha\|_{p,\mu} = \|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu}.$$

При этом

$$\|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu}^p = \|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k\in g_\alpha} \left|\mu_k \hat{f}(k)\right|^p$$

и

$$\lim_{\alpha\to\infty} \|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu} = 0.$$

Ясно, что это утверждение является перефразировкой предложения 2.1. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Предложение 4.1$'$. *Пусть $f \in S_\varphi^{p,\mu}$, $p \in (0,\infty)$, и*

$$S_n(f) = S_n(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k)\,\varphi_k, \qquad n \in N, \ -$$

частная сумма ряда (4.3). Тогда среди всех сумм вида

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\varphi_k$$

при данном $n \in N$ наименее уклоняется от f в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ частная сумма $S_n(f)$, т.е.

$$\inf_{c_k} \|f-\Phi_n\|_{p,\mu} = \|f - S_n(f)\|_{p,\mu}.$$

При этом

$$\|f - S_n(f)\|_{p,\mu}^p = \|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k=1}^{n} \left|\mu_k \hat{f}(k)\right|^p$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_{p,\mu} = 0. \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что для любого элемента $f \in S_\varphi^{p,\mu}$ его ряд Фурье (4.3) по системе φ сходится к f по норме пространства $S_\varphi^{p,\mu}$, т.е. система φ полна в $S_\varphi^{p,\mu}$, и $S_\varphi^{p,\mu}$ сепарабельно.

4.2. ψ-Интегралы

Выделим в пространствах $S^{p,\mu}_{\varphi}$ объекты приближения — объединения элементов $f \in \mathfrak{X}$, соответствующих в теории аппроксимации понятию класса функций и отвечающих множествам ΨU^p_{Φ}.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathfrak{X}$, ряд Фурье которого имеет вид (4.3), существует элемент $F \in \mathfrak{X}$, для которого

$$S[\,F\,]_{\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \, \hat{f}(k)\varphi_k, \tag{4.5}$$

т.е. когда

$$\hat{F}_{\varphi}(k) = \psi_k \, \hat{f}(k), \qquad k \in N, \tag{4.6}$$

то вектор F называется ψ-интегралом вектора f. В этом случае записываем $F = \mathcal{J}^{\psi} f$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathfrak{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ обозначается множество ψ-интегралов всех элементов из $\mathfrak{N}$. В частности, $\psi S^{p,\mu}_{\varphi}$ — множество ψ-интегралов всех векторов, принадлежащих данному пространству $S^{p,\mu}_{\varphi}$.

Если f и F связаны соотношением (4.5) или (4.6), то иногда удобно f называть ψ-производной элемента F и писать $f = D^{\psi}F = F^{\psi}$.

В дальнейшем предполагается, что система φ подчинена условию

$$\lim_{k\to\infty} |\psi_k| = 0. \tag{4.7}$$

Ясно, что это условие обеспечивает включение $\psi S^{p,\mu}_{\varphi} \subset S^{p,\mu}_{\varphi}$ и для такого включения необходимым и достаточным является условие ограниченности множества чисел $|\psi_k|,\ k \in N$.

Пусть

$$U^{p,\mu}_{\varphi} = \left\{ f \in S^{p,\mu}_{\varphi} : \|f\|_{p,\mu} \le 1 \right\} \; - \tag{4.8}$$

единичный шар в данном пространстве $S^{p,\mu}_{\varphi}$ и $\psi\, U^{p,\mu}_{\varphi}$ — множество ψ-интегралов всех элементов из $U^{p,\mu}_{\varphi}$. Множества $\psi\, U^{p,\mu}_{\varphi}$ и являются основными объектами, чьи аппроксимационные характеристики здесь изучаются. Заметим, что если

$$\psi_k \ne 0 \qquad \forall\, k \in N,$$

то в силу (4.6) и (4.8)

$$\psi\, U^{p,\mu}_{\varphi} = \left\{ f \in S^{p,\mu}_{\varphi} : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \mu_k \, \frac{\hat{f}(k)}{\psi_k} \right|^p \le 1 \right\}, \tag{4.8$'$}$$

т.е.множество $\psi\, U^{p,\mu}_{\varphi}$ является p-эллипсоидом в пространстве $S^{p,\mu}_{\varphi}$ с полуосями, равными $|\psi_k|$.

4.3. Приближающие агрегаты и аппроксимационные характеристики

Конструкция агрегатов, используемых для приближения элементов $f \in S_{\varphi}^{p,\,\mu}$, определяется характеристическими последовательностями $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ системы ψ, которые задаются следующим образом.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (4.7). Тогда через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ обозначается множество значений величин $|\psi_k|$, упорядоченное по их убыванию, через $g(\psi) = g_1, g_2, \dots$ — система множеств

$$g_n = g_n^{\psi} = \{k \in N : |\psi_k\,| \ge \varepsilon_n\}$$

и через $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \dots$ — последовательность чисел $\delta_n = |g_n|$, где $|g_n|$ — количество чисел $k \in N$, содержащихся в множестве g_n. Последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ называются характеристическими для системы ψ. Заметим, что при этом определении любое число $n^* \in N$ принадлежит всем множествам g_n^{ψ} с достаточно большими номерами n и

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \infty.$$

В дальнейшем через $g_0 = g_0^{\psi}$ удобно обозначать пустое множество и считать, что $\delta_0 = 0$.

Пусть множество $S_{\varphi}^{p,\,\mu}$ порождается пространством $\mathfrak{X}$, системами φ, μ и числом p, $p > 0$, и $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (4.7).

В качестве приближающих агрегатов для элементов $f \in \psi\, S_{\varphi}^{p,\,\mu}$ будем рассматривать полиномы

$$S_n(f)_{\varphi,\psi} = S_{g_n^{\psi}}(f) = \sum_{k\in g_n^{\psi}} \hat f(k)\,\varphi_k, \quad n = 1, 2, \dots, \quad S_o(f)_{\varphi,\psi} = \theta, \tag{4.9}$$

где g_n^{ψ} — элементы последовательности $g(\psi)$, θ — нулевой вектор пространства $S_{\varphi}^{p,\,\mu}$. При этом полагаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,\,p,\,\mu} &= \|\, f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\,\psi}\|_{p,\,\mu}, \\ \mathcal{E}_n(\psi\, U_{\varphi}^{q,\,\mu})_{\psi,\,p,\,\mu} &= \sup_{f\in\psi\, U_{\varphi}^{q,\,\mu}} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,\,p,\,\mu}, \qquad p, q > 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Величина $\mathcal{E}_n(f)_{\psi,\,p,\,\mu}$ называется приближением элемента $f \in S_{\varphi}^{p,\mu}$ суммами Фурье, построенными по областям g_{n-1}^{ψ}, а $\mathcal{E}_n(\psi\, U_{\varphi}^{q,\,\mu})_{\psi,\,p,\,\mu}$ —

приближением множества $\psi\, U_\varphi^{q,\,\mu}$ такими суммами в пространстве $S_\varphi^{p\,,\mu}$. Пусть, далее,

$$E_n(f)_{\psi,\,p,\,\mu} = \inf_{c_k} \Big\| f - \sum_{k\in g_{n-1}^{\psi}} c_k\,\varphi_k \Big\|_{p,\,\mu} -$$

наилучшее приближение элемента $f \in \psi\, S_\varphi^{p,\,\mu}$ полиномами, построенными по областям g_{n-1}^{ψ}, и

$$E_n(\psi\, U_\varphi^{q,\,\mu})_{\psi,\,p,\,\mu} = \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^{q,\,\mu}} E_n(f)_{\psi,\,p,\,\mu}, \qquad p, q > 0, \; - \tag{4.11}$$

наилучшее приближение множества $\psi\, U_\varphi^{q,\,\mu}$ такими полиномами.

Как обычно,

$$d_n(\mathfrak{M}; Y) = \inf_{F_n\in\mathcal{F}_n} \sup_{x\in\mathfrak{M}} \inf_{u\in F_n} \|x-u\|_Y -$$

поперечник по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Y. Здесь $\mathcal{F}_n$ — множество всех подпространств размерности $n \in N$ пространства Y. Согласно неравенству Иенсена, для любой неотрицательной последовательности $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k \ge 0$,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad 0 < q \le p.$$

Поэтому справедливы включения

$$S_\varphi^{q,\,\mu} \subset S_\varphi^{p,\,\mu}, \qquad 0 < q \le p, \tag{4.12}$$

и

$$\psi\, U_\varphi^{q,\,\mu} \subset \psi\, U_\varphi^{p,\,\mu}, \qquad 0 < q \le p. \tag{4.13}$$

Отсюда, в частности, заключаем, что величины (4.10) и (4.11) корректно определены по крайней мере для всех систем ψ, удовлетворяющих условию (4.7), в предположении, что $0 < q \le p$.

4.4. Наилучшие приближения и поперечники q-эллипсоидов

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система чисел, удовлетворяющая условию (4.7). Тогда при любых $n \in N$ и $0 < q \le p < \infty$ выполняются соотношения*

$$E_n(\psi\, U_\varphi^{q,\,\mu})_{\psi,\,p,\,\mu} \le \mathcal{E}_n(\psi\, U_\varphi^{q,\,\mu})_{\psi,\,p,\,\mu} \le \varepsilon_n. \tag{4.14}$$

Если при этом

$$\mu_k \neq 0 \quad \text{и} \quad \psi_k \neq 0 \qquad \forall\, k \in N, \tag{4.15}$$

то в (4.14) *знаки неравенств заменяются знаками равенств. Величина* ε_n *— n-й член характеристической последовательности* $\varepsilon(\psi)$.

Построенные по областям g_n^{ψ} частные суммы вида (4.9) являются оптимальным аппаратом приближения элементов из множеств $\psi\, U_{\varphi}^{q,\,\mu}$ в смысле колмогоровских поперечников. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям* (4.7) *и* (4.15) *и*

$$d_{\nu}(\psi\, U_{\varphi}^{p,\,\mu})_{\,p,\,\mu} = d_{\nu}(\psi\, U_{\varphi}^{p,\,\mu}; S_{\varphi}^{p,\,\mu}) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{f \in \psi\, U_{\varphi}^{p,\,\mu}} \inf_{u \in F_n} \|f - u\|_{p,\,\mu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, \; —$$

поперечники по Колмогорову множеств $\psi\, U_{\varphi}^{p,\,\mu}$ *в пространстве* $S_{\varphi}^{p,\,\mu}$. *Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *выполняются равенства*

$$d_{\delta_{n-1}}(\psi\, U_{\varphi}^{p,\,\mu})_{\,p,\,\mu} = d_{\delta_{n-1}+1}(\psi\, U_{\varphi}^{p,\,\mu})_{p,\,\mu} = \cdots = d_{\delta_n - 1}(\psi\, U_{\varphi}^{p,\,\mu})_{\,p,\,\mu} = \varepsilon_n,$$

в которых δ_s *и* ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ *— элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi)$ *и* $\varepsilon(\psi)$ *системы* ψ, *а* $\delta_o = 0$.

Пусть теперь наряду с числами p, q и последовательностью $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ задана последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, среди которых имеется хотя бы одно отличное от нуля. По данному пространству $\mathfrak{X}$ и системе φ построим множества $S_{\varphi}^{p,\,\mu}$ и $S_{\varphi}^{q,\,\lambda}$. Если $0 < q \le p$ и последовательности λ и μ совпадают, то справедливы включения (4.12) и (4.13). Ясно также, что при любом $p \in (0, \infty)$ будет выполняться включение

$$S_{\varphi}^{p,\,\lambda} \subset S_{\varphi}^{p,\,\mu}$$

при условии, что

$$\lambda_k \ge C\mu_k \qquad \forall\, k \in N,$$

где C — любая положительная постоянная. Поэтому справедливо включение

$$S_{\varphi}^{q,\,\lambda} \subset S_{\varphi}^{p,\,\mu} \quad \forall\, p, q, \quad 0 < q \le p, \quad \lambda_k \ge C\mu_k \quad \forall\, k \in N. \tag{4.16}$$

Получим аналоги теорем 4.1 и 4.2 в случае, когда приближаемые элементы находятся в пространстве $S_\varphi^{q,\lambda}$, а приближение ищется в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$. В этом случае приближающие агрегаты будут строиться опять согласно формулам (4.9), только на этот раз в качестве последовательности ψ, входящей в определение областей g_n^ψ и последовательности $\varepsilon(\psi)$, будет выступать последовательность

$$\psi' = \{\psi'_k\}_{k=1}^\infty = \left\{\psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}\right\}_{k=1}^\infty, \tag{4.17}$$

в которой числа $\psi_k,\ k \in N$, — те же, что и в определении приближаемых множеств $\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}$.

Теорема 4.1′. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty, \mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *и* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — *фиксированные последовательности, подчиняющиеся условию*

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} = 0. \tag{4.18}$$

Тогда при любых $n \in N$ *и* $0 < q \le p$ *выполняются соотношения*

$$E_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',\,p,\,\mu} \le \mathcal{E}_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',\,p,\,\mu} \le \varepsilon'_n, \tag{4.19}$$

где

$$E_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',\,p,\,\mu} = \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}} E_n(f)_{\psi',\,p,\,\mu},$$

$$E_n(f)_{\psi',\,p,\,\mu} = \inf_{c_k}\Bigg\| f - \sum_{k\in g_{n-1}^{\psi'}} c_k\,\varphi_k\Bigg\|_{p,\,\mu},$$

и

$$\mathcal{E}_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',\,p,\,\mu} = \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}} \mathcal{E}_n(f)_{\psi',\,p,\,\mu},$$

$$\mathcal{E}_n(f)_{\psi',\,p,\,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\,\psi'}\|_{p,\,\mu}, \tag{4.20}$$

ε'_n *и* ${g^{\psi'}}_{n-1}$ — *члены характеристической последовательности системы* (4.17). *Если при этом выполнены условия* (4.15), *то в* (4.19) *знаки неравенств заменяются знаками равенств.*

Для колмогоровских поперечников в этом случае выполняется следующий аналог теоремы 4.2.

Теорема 4.2′. *Пусть системы* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ *и* $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяют условиям* (4.7) *и* (4.15). *Тогда для любой последовательности* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, *для которой выполняется условие* (4.18), *при любых* $p \in [1,\infty)$ *и* $n \in N$ *справедливы равенства*

$$d_{\delta'_{n-1}}(\psi\, U_\varphi^{p,\lambda})_{\,p,\,\mu} = d_{\delta'_{n-1}+1}(\psi\, U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\,\mu} = \dots = d_{\delta'_n-1}(\psi\, U_\varphi^{p,\lambda})_{\,p,\,\mu} = \varepsilon'_n, \tag{4.21}$$

в которых δ'_s *и* ε'_s, $s = 1, 2, \ldots,$ — *элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi')$ *и* $\varepsilon(\psi')$ *системы* (4.17) , *а* $\delta'_o = 0$.

4.5. Величины $D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\,\lambda})_{p,\,\mu}$

Пусть $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, $\varepsilon(x) = \{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $g(x) = \{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\delta(x) = \{\delta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — ее характеристические последовательности. Обозначим через $\overline{x} = \{\overline{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ перестановку последовательности $\{|x_k|\}_{k=1}^{\infty}$ в убывающем порядке. Ясно,что значения $\overline{x_k}$, $k \in N$, можно определить согласно формулам

$$\overline{x_k} = \varepsilon_n(x), \quad k \in (\delta_{n-1}(x), \delta_n(x)], \quad n \in N, \quad \delta_o = 0.$$

В этих обозначениях равенство (4.21) принимает вид

$$d_n(\psi\, U_\varphi^{p,\,\lambda})_{\,p,\,\mu} = \overline{\psi'}_{n+1}, \qquad n \in N, \tag{4.21$'$}$$

где $\overline{\psi'}_n$ — n-й член последовательности $\overline{\psi'}$. Пусть, далее, γ_n — любой набор из n натуральных чисел и $\mathcal{F}_n$ — множество всех полиномов вида

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k\in\gamma_n} c_k\, \varphi_k, \tag{4.22}$$

где c_k — некоторые комплексные числа. В силу определения понятия поперечника из (4.21$'$) заключаем, что всегда

$$\inf_{\gamma_n} \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^{p,\,\lambda}} \inf_{P_{\gamma_n}\in F_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\,\mu} \geq \overline{\psi'}_{n+1}, \tag{4.23}$$

а из теоремы 4.1$'$ следует, что при выполнении условий (4.15) соотношение (4.23) на самом деле является равенством. В связи с этим в принятых здесь обозначениях для любого подмножества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{X}$ положим

$$D_n(\mathfrak{N})_{p,\,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{f\in\mathfrak{N}} \inf_{P_{\gamma_n}\in F_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{\,p,\,\mu}. \tag{4.24}$$

Тогда доказанное соотношение можно записать в виде

$$D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\,\lambda})_{\,p,\,\mu} = \overline{\psi'}_{n+1}, \qquad p = q.$$

(Понятно, что величина $D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\,\lambda})$ соответствует величине, определенной соотношением (3.8)).

Оказывается, что это соотношение остается в силе и при $0 < q < p$. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *произвольные системы чисел, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} = 0. \tag{4.25}$$

Пусть, далее, γ_n — *любой набор из* n *натуральных чисел,* q *и* p — *любые положительные числа,* $0 < q \le p$. *Тогда при любом* $n \in N$

$$D_n(\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{f\in\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda}} \inf_{P_{\gamma_n}\in F_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu} = \overline{\psi'}_{n+1}, \tag{4.26}$$

где $\overline{\psi'}_{n+1}$ — $(n+1)$*-й член* $\overline{\psi'} = \{\overline{\psi'}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательности, являющейся перестановкой в убывающем порядке последовательности*

$$|\psi'_k| = \left|\frac{\psi_k\,\mu_k}{\lambda_k}\right|, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Доказательства теорем 4.1–4.3 приведены в [20]; в случае, когда $\mu_k = \lambda_k \equiv 1$, эти утверждения установлены в [14–16]. В [20] показано, что внутренняя нижняя грань в (4.26) реализуется полиномами вида (4.22) при $c_k = \widehat{f}(k)$, а внешняя — множеством $\gamma_n^* = \{i_k\}_{k=1}^{n}$, где значения i_k, $k = \overline{1,n}$, такие, что $|\psi'_{i_k}| = \psi'_k$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.3′. *Пусть выполняются все условия теоремы* 4.3. *Тогда при любом* $n \in N$

$$D_n(\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda})_{p,\mu} = \sup_{f\in\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda}} \Big\| f - \sum_{k\in\gamma_n^*} \widehat{f}(k)\,\varphi_k \Big\|_{p,\mu} = \overline{\psi'}_{n+1}, \tag{4.27}$$

где $\gamma_n^* = \{i_k\}_{k=1}^{n}$ *и значения* i_k, $k = \overline{1,n}$, *такие, что*

$$\left|\frac{\psi_{i_k}\,\mu_{i_k}}{\lambda_{i_k}}\right| = \overline{\psi'}_k. \tag{4.28}$$

Объединяя (4.27) и (4.21′), приходим к выводу,что значения поперечников $d_n(\psi\, U_{\varphi}^{p,\lambda})_{p,\mu}$ в случае приближения элементов $f \in \psi\, U_{\varphi}^{p,\lambda}$ в пространстве $S_{\varphi}^{p,\mu}$ реализуются суммами Фурье, построенными именно по областям γ_n^*.

Отметим, что в случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами, величинам $D_n(\mathfrak{N})_{p,\mu}$ соответствуют так называемые тригонометрические поперечники. Поэтому эти величины можно назвать, например, базисными поперечниками порядка n множества $\mathfrak{N}$ в пространстве $S_{\varphi}^{p,\mu}$ и тогда из теоремы 4.3′ следует, что значения базисных поперечников $D_n(\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda})_{p,\mu}$ в случае, когда $0 < q \le p$, также реализуются суммами Фурье, построенными по областям γ_n^*.

4.6. Наилучшие приближения q-эллипсоидов в пространствах $S^{p,\mu}_{\varphi}$ при $q > p$

Получим аналог теоремы $4.1'$ (а следовательно, и теоремы 4.1) при $0 < p < q < \infty$. В этом случае условия 4.18 не достаточны для включения
$$\psi\, U^{q,\lambda}_{\varphi} \subset S^{p,\mu}_{\varphi}.$$
Такое включение на этот раз обеспечивают условия
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_k|^{p\,q/(q-p)} < \infty, \qquad \psi'_k = \psi_k\, \frac{\mu_k}{\lambda_k},\ k \in N, \tag{4.29}$$
в чем нетрудно убедиться при помощи неравенства Гельдера.

Теорема 4.4. *Пусть ψ, μ и λ — последовательности, p и q — неотрицательные числа, $q > p > 0$, удовлетворяющие условию (4.29).*

Тогда при любом натуральном n справедливо равенство
$$E_n(\psi\, U^{q,\lambda}_{\varphi})_{\psi',\,p,\,\mu} = \mathcal{E}_n(\psi\, U^{q,\lambda}_{\varphi})_{\psi',\,p,\,\mu} = \left(\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} (\overline{\psi'}_k)^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \tag{4.30}$$
где $\overline{\psi'} = \{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, для которой
$$\overline{\psi'}_k = \varepsilon'_k, \quad \delta'_{n-1} < k \le \delta'_n, \quad n \in N,$$
ε'_n и δ'_n — члены характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi')$ и $\delta(\psi')$.

В случае, когда $\mu_k = \lambda_k \equiv 1$, утверждение этой теоремы доказано в [18, §11.8]. Используемые там рассуждения по существу пригодны и в общем случае.

Доказательство. Первое из равенств в (4.30) является следствием предложения 4.1, поэтому достаточно убедиться в справедливости только второго из этих равенств.

Пусть ε'_n, δ'_n и $g'_n = g_n(\psi') = \{k \in N : |\psi'_k| \ge \varepsilon'_n\}$ – характеристические последовательности системы ψ',
$$S_n(f)_{\varphi,\,\psi'} = S_{g^{\psi'}_n} = \sum_{k\in g^{\psi'}_n} \widehat{f}_{\varphi}(k)\, \varphi_k \,—$$
полиномы, построенные согласно (4.9) для элементов $f \in \psi U^{q,\lambda}_{\varphi}$. Тогда с учетом формул (4.10), имеем

$$\mathcal{E}_n^p(f)_{\psi',p,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\psi'}\|_{p,\mu}^p = \sum_{k\overline{\in} g_{n-1}^{\psi'}} |\mu_k \widehat{f}_\varphi(k)|^p$$

$$= \sum_{k\overline{\in} g_{n-1}^{\psi'}} |\psi_k|^p\, |\mu_k \widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(k)|^p = \sum_{k\overline{\in} g_{n-1}^{\psi'}} |\psi'_k|^p\, |\widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(k)|^p \lambda_k^p. \quad (4.31)$$

Обозначим через i_k, $k = 1, 2\ldots,$ натуральные числа, выбранные из условия

$$|\psi'_{i_k}| = \overline{\psi'}_k, \quad \text{где} \quad \overline{\psi}_k = \varepsilon'_k \quad \text{при} \quad k \in (\delta'_{n-1}, \delta'_n]. \quad (4.32)$$

Тогда (4.31) можно переписать в виде

$$\mathcal{E}_n^p(f)_{\psi',p,\mu} = \sum_{k=\delta'_{n-1}+1} |\overline{\psi'}_k\, \widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(i_k)\lambda_{i_k}|^p. \quad (4.33)$$

Положим

$$m_k = |\widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(i_k)\lambda_{i_k}|^q. \quad (4.34)$$

В этом случае

$$\lambda_{i_k}^p |\widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(i_k)|^p = m_k^{\,p/q}$$

и следовательно,

$$\mathcal{E}_n^p(f)_{\psi',p,\mu} = \sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} (\overline{\psi'}_k)^p\, m_k^r, \qquad r = \frac{p}{q}.$$

Если $f \in \psi\, U_\varphi^{q,\lambda}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k\, \widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(k)|^p \le 1.$$

Поэтому, принимая ко вниманию соотношения (4.20), (4.34) и (4.33), находим

$$\mathcal{E}_n^p(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} \le \sup\left\{ \sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} (\overline{\psi'_k})^p\, m_k^r,\ r = \frac{p}{q} \,:\, \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1 \right\}. \quad (4.35)$$

Если положить $(\overline{\psi'_k})^p = \alpha_k$, то условие (4.29) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \infty, \quad \alpha_k > 0 \qquad \forall\, k \in N. \quad (4.36)$$

Следовательно, нахождение значения правой части (4.35) сводится к решению экстремальной задачи

$$\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \alpha_k\, x_k^r \to \sup \tag{4.37}$$

при условиях $x_k \geq 0$, $\sum_{k=\delta_{n-1}+1} x_k = 1$, а числа α_k образуют невозрастающую последовательность и удовлетворяют условию (4.36).

Решения $\overline{x}_k$ такой задачи получены в [18, §11.8]. Они имеют вид

$$\overline{x}_k = \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \Bigg(\sum_{i=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}} \Bigg)^{-1}, \qquad k = \delta'_{n-1}+1,\, \delta'_{n-1}+2, \ldots. \tag{4.38}$$

Объединяя соотношения (4.35)–(4.38), получаем

$$\mathcal{E}_n^p(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',\,p,\,\mu} \leq \sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \alpha_k \overline{x}_k^r = \Bigg(\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \Bigg)^{1-r}$$
$$= \Bigg(\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} (\overline{\psi'_k})^{\frac{p\,q}{q-p}} \Bigg)^{\frac{q-p}{p\,q}},$$

и для завершения доказательства теоремы остается показать, что это соотношение на самом деле является равенством. Для этого достаточно показать, что в множестве $\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}$ при любом $\varepsilon > 0$ найдется элемент f_ε, для которого справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_n(f_\varepsilon)_{\psi',\,p,\,\mu} > \Bigg(\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} (\overline{\psi'_k})^{\frac{p\,q}{q-p}} \Bigg)^{\frac{q-p}{p\,q}} - \varepsilon. \tag{4.39}$$

Построим такой элемент, придерживаясь схемы, изложенной в [18, §11.8].

Пусть

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}\, \varphi_{i_k},$$

где числа i_k выбраны согласно (4.32), а числа c_{i_k} такие, что

$$c_{i_k}^q\, \lambda_{i_k}^q = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \ldots,\, \delta'_{n-1}, \\ \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \sigma_2^{-1}(\delta'_{n-1}), & k > \delta'_{n-1}, \end{cases}$$

$$\sigma_2(s) = \sum_{i=s}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}}.$$

Ясно, что

$$\|h\|_{q,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}^q \, \lambda_{i_k}^q = 1. \qquad (4.40)$$

Пусть теперь ε — любое положительное число, и N_ε настолько велико, что при всех $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sigma_2^{-r}(\delta'_{n-1}) \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \varepsilon.$$

Элемент

$$h_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} c_{i_k} \, \varphi_{i_k}$$

в силу (4.40) принадлежит U_φ^q, поэтому элемент $f_\varepsilon = \mathcal{J}^\psi \, h_\varepsilon$ принадлежит к $\psi \, U_\varphi^q$. Вычисляя согласно (4.10) значение $\mathcal{E}_n(f_\varepsilon)_{\psi', p, \mu}$ убеждаемся в справедливости оценки (4.39) и тем самым заканчиваем доказательство теоремы 4.4 $\square$

4.7. Величины $D_n(\psi \, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu}$ при $q > p > 0$

Найдем аналоги теорем 4.3 и 4.3′ в случае, когда $q > p > 0$. Пусть, как и ранее, γ_n — любой набор из n натуральных чисел, и $\mathcal{F}_n$ — множество всех полиномов вида (4.22),

$$E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \inf_{P_{\gamma_n} \in F_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu}, \qquad f \in S_\varphi^{p,\mu}, \ — \qquad (4.41)$$

наилучшее приближение элемента f посредством полиномов, построенных по заданному набору γ_n из n базисных векторов:

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \| f - S_{\gamma_n}(f)\|_{p,\mu}, \qquad S_{\gamma_n}(f) = \sum_{k \in \gamma_n} \widehat{f}_\varphi(k) \, \varphi_k; \qquad (4.41')$$

$$E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{p,\mu} = \sup_{f \in \mathfrak{N}} E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} \ —$$

верхняя грань величин $E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu}$ на некотором подмножестве $\mathfrak{N}$ из $S_\varphi^{p,\mu}$ и

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N}) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{p,\mu}.$$

В таких обозначениях величину $D_n(\psi \, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu}$, определяемую соотношением (4.24), можем записать в виде

$$D_n(\psi \, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(\psi \, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu}. \qquad (4.42)$$

Условимся еще о ряде обозначений. Если $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} = \{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая система комплексных чисел, а $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — системы неотрицательных чисел, и γ_n — фиксированный набор из n натуральных чисел, то будем полагать

$$\psi_{\gamma_n} = \{\psi_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^{\infty},$$

где

$$\psi_{\gamma_n}(k) = \begin{cases} 0, & k \in \gamma_n, \\ \psi_k = \psi(k), & k \overline{\in} \gamma_n; \end{cases}$$

$$\psi' = \{\psi'(k)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{где} \quad \psi'(k) = \psi'_k = \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}; \tag{4.43}$$

$$\psi'_{\gamma_n} = \{\psi'_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^{\infty}, \tag{4.44}$$

где

$$\psi'_{\gamma_n}(k) = \begin{cases} 0, & k \in \gamma_n, \\ \psi'_k, & k \overline{\in} \gamma_n. \end{cases}$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть числа p, q и последовательности ψ, μ и λ такие, что $q > p > 0$ и выполняется условие* (4.29).

Тогда при любом натуральном n выполняется равенство

$$E_{\gamma_n}(\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda})_{p,q} = \mathcal{E}_{\gamma_n}(\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda})_{p,q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\overline{\psi'}_{\gamma_n}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \tag{4.45}$$

где $\overline{\psi'}_{\gamma_n}(k),\ k \in N,$ — перестановка в убывающем порядке последовательности $|\psi'_{\gamma_n}(k)|,\ k \in N.$

Доказательство. Прежде всего заметим, что равенство (4.30) является частным случаем (4.45). Действительно, пусть $g_{n-1}^{\psi'}$ — $(n-1)$-й член характеристической последовательности областей $g_k^{\psi'}$ для системы ψ', т.е.

$$g_{n-1}^{\psi'} = \{k \in N : \ |\psi'(k)| \geq \varepsilon_{n-1}\} \tag{4.46}$$

и $n' \overset{\mathrm{df}}{=} \delta'_{n-1} = |g_{n-1}^{\psi'}|$ — количество натуральных чисел, содержащихся в $g_{n-1}^{\psi'}$. Выберем набор $\gamma_{n'}^{*}$ из условия $\gamma_{n'}^{*} = g_{n-1}^{\psi'}$. В этом случае, согласно (4.43) и (4.44), будем иметь

$$\overline{\psi'}_{\gamma_{n'}^{*}}(k) = \overline{\psi'}(k + n'), \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.47}$$

Следовательно, в силу (4.46), (4.47) и (4.30)

$$E_{\gamma^*_{n'}}(\psi\, U^{q,\lambda}_{\varphi})_{p,q} = \mathcal{E}_{\gamma^*_{n'}}(\psi\, U^{q,\lambda}_{\varphi})_{p,q} = \left(\sum_{k=n'+1}^{\infty} (\overline{\psi'}(k))^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}$$
$$= E_n(\psi\, U^{q,\lambda}_{\varphi})_{\psi'\, p,\mu}.$$

Таким образом, в самом деле

$$E_{\gamma^*_{\delta_{n-1}}}(\psi\, U^{q,\lambda}_{\varphi})_{p,q} = \mathcal{E}_{\gamma^*_{\delta_{n-1}}}(\psi\, U^{q,\lambda}_{\varphi})_{p,q}$$
$$= E_n(\psi\, U^{q,\lambda}_{\varphi})_{\psi'\, p,\mu} = \mathcal{E}_n(\psi\, U^{q,\lambda}_{\varphi})_{\psi'\, p,\mu}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.4, поэтому остановимся только на его узловых моментах. В силу предложения 4.1 достаточно доказать только второе из равенств в (4.45). С этой целью, сначала с учетом (4.41′) и (4.44) запишем аналог равенства (4.31):

$$\mathcal{E}^p_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \sum_{k\overline{\in}\,\gamma_n} |\mu_k \widehat{f}_{\varphi}(k)|^p = \sum_{k\overline{\in}\,\gamma_n} |\psi'_k|^p\, |\widehat{f}^{\,\psi}_{\varphi}(k)|^p\, \lambda^p_k$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_{\gamma_n}(k)|^p\, |\,\widehat{f}^{\,\psi}(k)|^p\, \lambda^p_k \tag{4.48}$$

и через i_k, $k \in 1,2,\ldots$, обозначим натуральные числа, выбранные так, чтобы выполнялись условия

$$\psi'_{\gamma_n}(i_k) = \overline{\psi'}_{\gamma_n}(k),\ k = 1,2,\ldots.$$

Тогда (4.48) перепишется в виде

$$\mathcal{E}^p_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} |\overline{\psi'}_{\gamma_n}(k)\, \widehat{f}^{\,\psi}_{\varphi}(i_k)\, \lambda_{i_k}|^p.$$

Выполняя замену (4.34), получаем аналог неравенства (4.35):

$$\mathcal{E}^p_{\gamma_n}(\psi\, U^{q,\lambda}_{\varphi})_{p,\mu} \le \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (\overline{\psi'}_{\gamma_n}(k))^p\, m^r_k,\ r = \frac{p}{q}\ : \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1\right\},$$

после чего доказательство этой теоремы заканчивается фактически повторением соответствующих рассуждений из доказательства теоремы 4.4. □

Рассматривая нижние грани обеих частей равенства (4.45) по всевозможным наборам γ_n из n натуральных чисел, приходим к выводу, что точная нижняя грань правой части (4.45) реализуется набором γ_n^*, который определяется соотношением

$$\gamma_n^* = \big\{ i_k \in N : |\psi'_{i_k}| = |\overline{\psi'}_{i_k}|,\ k = 1, 2, \ldots n \big\}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Согласно (4.43) и (4.44)

$$\overline{\psi'}_{\gamma_n^*}(k) = \overline{\psi'}(k+n), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому в силу (4.42)

$$D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\overline{\psi'}_{\gamma_n^*}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (\overline{\psi'}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}} .$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.6. *Пусть числа p, q и последовательности ψ, μ и λ такие, что $q > p > 0$ и выполняется условие* (4.29). *Тогда при любом натуральном n выполняется равенство*

$$D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (\overline{\psi'}_k)^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \tag{4.49}$$

в котором $\overline{\psi'}_k$, $k \in N$, — перестановка в убывающем порядке последовательности $\{|\psi'_k|\}_{k=1}^{\infty}$.

Обратим внимание на то, что последовательность $\overline{\psi'}_k$, $k \in N$, в общем случае является ступенчатой. Поэтому в силу равенства (4.26) такой же характер имеет и величина $D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu}$ при $p \geq q > 0$. Если же $p < q$, то согласно (4.49) эта величина строго убывает с ростом параметра n.

Литература

[1] К. И. Бабенко, *О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами* // ДОКЛ. АН СССР. **132** (1960), N 2, 247–250.

[2] К. И. Бабенко, *О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами* // ДАН СССР. **132** (1960), N 5, 982–985.

[3] С. А. Теляковский, *Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных* // Сиб. мат. журн. **4** (1963), N 6, 1404–1411.

[4] С. А. Теляковский, *Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами* // Мат. сборник. **63(105)** (1964), 426–444.

[5] Я. С. Бугров, *Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной* // Мат. сборник. **64 (106)** (1964), 410–418.

[6] Н. С. Никольская, *Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике* L_p // ДОКЛ. АН СССР. **208** (1973), N 5, 1283–1285.

[7] Н. С. Никольская, *Приближение периодических функций класса* $SH^r_{p^*}$ *суммами Фурье* // Сиб. мат. журн. **16** (1975), N 4, 761–780.

[8] Э. М. Галеев, *Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике* L_p // Успехи мат. наук. **32** (1977), N 4, 251–252.

[9] Э. М. Галеев, *Приближение сумами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными* // Мат. заметки. **23** (1978), N 2, 197–212.

[10] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. **178** (1986), 1–112.

[11] П. В. Задерей, *Приближение* $(\overline{\psi}, \overline{\beta})$*-дифференцируемых периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн. **45** (1993), N 3, 367–377.

[12] А. С. Романюк, *О приближении классов периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн. **44** (1992), N 5, 662–672.

[13] А. С. Романюк, *Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве* L_q // Укр. мат. журн. **43** (1991), N 10, 1398–1408.

[14] А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств* S^p_φ. Киев, 2001, 85 с. (Препр./ НАН Украины, Ин-т математики; 2001.2).

[15] А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств* S^p_φ // Укр. мат. журн. **53** (2001), N 3, 392–416.

[16] А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств* S^p_φ *в разных метриках* // Укр. мат. журн. **53** (2001), N 8, 1121–1146.

[17] А. И. Степанец, А. С. Сердюк, *Прямые и обратные теоремы теории приближений функций в пространстве* S^p // Укр. мат. журн. **54** (2002), N 1, 106–124.

[18] А. И. Степанец, *Методы теории приближений: в 2 ч.* // Праці Ін-ту математики НАН Украини. **40**, Київ: Ін–т математики НАН Украини, 2002, ч. II, 468 с.

[19] А. И. Степанец, *Аппроксимационные характеристики пространств* S^p // Теорія наближень та гармонійний аналіз: Праці Українського математичного конгресу, 2001. Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. С. 208–226.

[20] А. И. Степанец, В. И. Рукасов, *Пространства S^p с несимметричной метрикой* // Укр. мат. журн. **54** (2003), N 2, 264–277.

[21] А. И. Степанец, В. И. Рукасов, *Наилучшие "сплошные" n-членные приближения в пространствах S^p_φ* // Укр. мат. журн. **55** (2003), N 5, 663–670.

[22] А. И. Степанец, А. Л. Шидлич, *Наилучшие n-членные приближения Λ-методами в пространствах S^p_φ* // Укр. мат. журн. **55** (2003), N 8, 1107–1126.

[23] А. И. Степанец, *Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах* // Укр. мат. журн. **55** (2003), N 10, 1392–1423.

[24] А. И. Степанец, *Наилучшие приближения q-эллипсоидов в пространствах $S^{p,\,\mu}_\varphi$* // Укр. мат. журн. **56** (2004), N 10, 1378–1383.

[25] А. С. Сердюк, *Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності їх ψ-похідних.* Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, 2003, Т. 46, с. 229–248.

[26] В. Р. Войцеховський, *Поперечники деяких класів з простору S^p*. Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін–ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, 2003, Т. 46, с. 17–26.

[27] С. Б. Вакарчук, *Неравенство типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах S^p*, $1 \le p < \infty$ // Укр. мат. журн. **56** (2004), N 5, 595–605.

[28] С. Б. Вакарчук, *О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации в пространствах S^p $(1 \le p < \infty)$* // Воронеж.зим. мат.школа "Современные методы теории фунций и смежные проблемы" (Воронеж, 26 января–2 февраля, 2003 г.). Воронеж: Воронеж.ун-т, 2003, 47–48.

[29] В. Р. Войцеховський, *Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору S^p сумами Зигмунда* // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін–ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, **35** (2002), 33–46.

[30] А. Л. Шидліч, *Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах S^p_φ* // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, **35** (2002), 215–232.

[31] А. Л. Шидліч, *Найкращі n-членні наближення Λ-методами в просторах S^p_φ* // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, **46** (2003), 283–306.

[32] В. И. Рукасов, *Наилучшие n-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой* // Укр. мат. журн. **55** (2003), N 6, 806–816.

[33] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* М.: Изд-во "Мир", 1974, 333 с.

[34] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М.: Изд-во "Наука", 1965, 407 с.

[35] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства.* М.: Изд-во Иностранной литературы, 1948, 456 с.

[36] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения.* М.: Изд-во "Наука", 1976, 320 с.

Сведения об авторах

Александр Иванович Степанец

Институт математики НАН України
ул. Терещенковская 3,
01601, Киев-4,
Украина
E-Mail: `step@imath.kiev.ua`