Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 1, 21 – 56

Задача Коші для сингулярних псевдодиференціальних систем параболічного типу

Владислав А. Літовченко

(*Представлена С. Д. Івасишеним*)

Анотація. За допомогою опуклих донизу функцій означено клас псевдодиференціальних сингулярних систем з цілими аналітичними символами, який містить у собі $\overrightarrow{2B}$-параболічні системи диференціальних рівнянь, тобто параболічні системи з оператором Бесселя, в яких кожна просторова змінна має, взагалі кажучи, свою вагу відносно часової змінної. Досліджено властивості фундаментальної матриці розв'язків таких систем та доведено теорему про коректну розв'язність задачі Коші у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями типу ультрарозподілів Жеврє. Для окремого підкласу систем описано максимальні класи початкових даних, при яких задача Коші коректно розв'язна, а її розв'язок має необхідні властивості.

2000 MSC. 35G10, 35S30.

Ключові слова та фрази. Задача Коші, параболічні системи, псевдодиференціальний оператор.

Вступ

Рівняння з диференціальним оператором Бесселя відносять до рівнянь з виродженим за просторовою змінною оператором (сингулярні рівняння) [1]. Такі рівняння виникають при вивченні температурних полів у симетричних середовищах. Вони описують явища тепломасообміну, радіальні коливання хвиль, зустрічаються в кристалографії, гідродинаміці та в задачах про взаємодію тіл [2–4].

Дослідженню задачі Коші для параболічних систем з оператором Бесселя присвячено багато праць (див. для прикладу [5–15]).

Стаття надійшла в редакцію 26.06.2006

ISSN 1810 – 3200.

Зокрема, в [5] М. І. Матійчук разом з В. В. Крехівським поширюють поняття параболічності за Петровським на випадок систем рівнянь з частинними похідними, які за однією з просторових змінних містять оператор Бесселя (B-параболічність). Згодом М. І. Матійчук досліджує задачу Коші вже для систем з оператором Бесселя, які характеризуються аналогом параболічності за Ейдельманом ($\overrightarrow{2B}$-параболічність) [6]. Для таких систем будується теорія класичних розв'язків задачі Коші.

Знаходженню зображення розв'язків рівномірно B-параболічних систем першого порядку за часовою змінною t у вигляді інтегралів Пуассона функцій або узагальнених борельових мір зі спеціальних вагових просторів (що фактично є множинами початкових значень цих розв'язків) присвячена праця [12].

При дослідженні проблем, пов'язаних з відшуканням класів єдиності та класів коректності задачі Коші для класичних систем рівнянь у згортках, зокрема, для диференціальних та диференціально-різницевих систем з коефіцієнтами, залежними лише від t, широко використовуються простори типу S Гельфанда й Шилова [16], а також простори типу W Гуревича [17], які одержані ним унаслідок уточнення відомих на той час класів єдиності розв'язків задачі Коші для цих систем [13, 18–24]. Зазначимо, що простори типу W (а саме W^M, W^M_Ω) є узагальненням просторів типу S, елементи яких допускають аналітичне продовження на весь комплексний простір.

Питання, пов'язані з описом класів коректності задачі Коші для лінійних систем першого порядку за t, в яких за просторовими змінними діють поліноми від диференціальних операторів Бесселя, вивчаються в [13]. Дослідження проводяться в стилі, запропонованому І. М. Гельфандом і Г. Є. Шиловим [18]; базуються на використанні узагальнених функцій (типу розподілів) у поєднанні з методом перетворення Фур'є–Бесселя.

У [14] анонсовані результати досліджень задачі Коші для параболічних у розумінні Шилова систем рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, за останньою компонентою просторової змінної в яких діють степені оператора Бесселя. Для таких систем стверджується, що векторний простір $(\overset{\circ}{\mathbf{S}}{}^{1/h}_{\gamma})'$ (певний аналог векторного топологічно спряженого простору до простору типу $\mathbf{S}$), де $\gamma = 1-\mu/p$, якщо $0 < \mu \le 1$, і $\gamma = 1-\mu/h$ при $\mu \le 0$ (тут μ — рід, p — точний порядок системи, а h — показник параболічності), є класом початкових даних задачі Коші, при яких ця задача коректно розв'язана, а її розв'язок — диференційовна за t і нескінченно диференційовна за просторовою змінною x звичайна вектор-функція. Сформульовано принцип локалізації розв'язку задачі Коші (тобто з'ясовано властивість локального посилення його збіжності при $t \to +0$). Такого ж типу результати, але вже у відповідних просторах $(\overset{\circ}{\mathbf{S}}_\alpha)'$, анонсовані в [15] для B-параболічних систем зі змінними коефіцієнтами, які є нескінченно диференційовними за x і обмеженими разом зі всіма своїми похідними. Деталі доведень зазначених результатів, у випадку B-параболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами, наведено в [21].

Згодом з'ясувалося [25–29], що теорія просторів типу S і W є природним середовищем дослідження задачі Коші не тільки для диференціальних рівнянь (систем рівнянь) з частинними похідними, але й для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з гладкими символами. У термінах цих просторів описуються класи початкових даних, при яких задача Коші не лише коректно розв'язна, але її розв'язок за просторовою змінною має такі ж властивості гладкості й поведінку в околі нескінченно віддалених точок, що й фундаментальний розв'язок рівняння. При цьому виявилося, що чим краще поводиться з функційної точки зору фундаментальний розв'язок рівняння, тобто чим вужчим є простір типу S чи W, в який потрапляє фундаментальний розв'язок, тим ширшими є класи початкових даних відповідної задачі Коші.

З метою розширення класів початкових даних задачі Коші (за рамки просторів типу W) В. В. Городецьким разом з Р. С. Колісник були побудовані функційні простори C_ρ, C^γ, C^γ_ρ (названі ними просторами типу C), які містять простори типу W як певні підкласи [30]. Досліджено топологічну структуру таких просторів, вивчено основні операції над їх елементами та поширено теорію перетворення Фур'є на ці простори.

У [29] досліджується задача Коші для еволюційних рівнянь вигляду

$$\partial_t U(t,x) = (A_\varphi U)(t,x),$$

де A_φ — оператор Бесселя нескінченного порядку, побудований за цілою аналітичною функцією φ, яка є мультиплікатором у просторі W^M_Ω і така, що $e^\varphi \in W^M_\Omega$. З'ясувалося, що в цьому випадку A_φ на елементах з W^M_Ω допускає зображення в класичній формі дробового диференціювання (тобто в термінах перетворень Фур'є–Бесселя). Це дало змогу, завдяки традиційним методам досліджень з використанням перетворення Фур'є–Бесселя, встановити коректну розв'язність задачі Коші для таких рівнянь за умови, що узагальнені початкові дані є згортувачами в просторі Фур'є-образів елементів з W^M_Ω.

Згодом розглядалися рівняння з оператором A_φ загальнішого вигляду. У [28] A_φ — комбінований оператор диференціювання — Бесселя нескінченного порядку, побудований за функцією φ з такими самими, що і раніше, властивостями, а в [31] A_φ — оператор Бесселя нескінченного порядку з коефіцієнтами, залежними від часу (символом диференціювання цього оператора є залежна від t функція φ, яка диференційовна за t і така, що φ разом з φ'_t мають такі самі властивості в просторі C^γ_ρ, що й символ φ з [29] у W^M_Ω). У зазначених працях анонсовані твердження про необхідні й достатні умови коректної розв'язності задачі Коші для відповідних рівнянь з початковими даними, які є узагальненими функціями типу ультрарозподілів Жевре. Пізніше наводяться деталі доведень цих результатів (щоправда, лише у випадку тверджень достатнього характеру щодо коректної розв'язності) [32]. Слід зазначити, що специфіка проведених досліджень у [31, 32] насправді не виводить дослідження задачі Коші за рамки просторів типу W. Дійсно, фундаментальні розв'язки розглядуваних еволюційних рівнянь належать до просторів C^γ_ρ з відповідними ρ та γ, причому такими, що для $\Omega(x) = -\ln\rho(x+1)$, $M(x) = \ln\gamma(x+1)$ на $[0;+\infty)$ існують двоїсті за Юнгом функції. Тоді, продовживши $\Omega(\cdot)$, $M(\cdot)$ парно на $(-\infty;0)$, з огляду на означення двоїстості за Юнгом [18], дістанемо, що зазначені $\Omega(\cdot)$ та $M(\cdot)$ мають усі властивості опуклих функцій, за допомогою яких будуються простори типу W [18, с. 7]. Якщо зважити тепер ще й на саме означення просторів C^γ_ρ та W^M_Ω, то дістанемо таку топологічну рівність: $C^\gamma_\rho = W^M_\Omega$.

Отже, на сьогодні достатньо розвинена теорія задачі Коші для класичних параболічних систем рівнянь із частинними похідними, що містять оператори Бесселя; інтенсивно розвивається теорія задачі Коші для еволюційних сингулярних рівнянь. Проте досі залишаються нез'ясованими питання, пов'язані з: розвитком методики досліджень задачі Коші для еволюційних сингулярних (у зазначеному сенсі) систем з гладкими символами псевдодиференціювання у випадку, коли початкові дані належать до досить широких класів функцій; поширенням результатів, що стосуються класів початкових даних, з якими задача Коші є коректно розв'язною, на випадок $\overrightarrow{2B}$-параболічних класичних сингулярних систем із частинними похідними та описом максимальних множин із цих класів, при яких відповідні розв'язки задачі Коші мають необхідні властивості.

У цій статті, за допомогою опуклих вектор-функцій $\Omega(\cdot)$ і $M(\cdot)$ означується клас систем сингулярних псевдодиференціальних рівнянь із незалежними від просторових змінних аналітичними символами, які неперервні за t і при кожному фіксованому t є мультиплікаторами в W^M_Ω. Власні числа матричного символу (псевдодиференціювання) підпорядковані спеціальній умові, що накладає обмеження на поведінку в комплексному просторі їх дійсних частин. Цей клас містить у собі $\overrightarrow{2B}$-параболічні системи диференціальних рівнянь із частинними похідними, в яких за просторовими змінними можуть діяти степені операторів Бесселя.

Для таких систем вивчаються властивості фундаментальної матриці розв'язків (ф.м.р.) та досліджується коректна розв'язність задачі Коші в рамках просторів типу W. Для окремого підкласу систем знайдено сукупність усіх початкових узагальнених функцій, при яких класичний розв'язок відповідної задачі Коші за просторовою змінною має такі ж властивості гладкості й поведінку в околі особливих точок, що й ф.м.р. Цей результат одержано завдяки критерію мультиплікатора в просторах типу W, сформульованого в термінах матрицанта системи в образах Фур'є–Бесселя.

1. Необхідні відомості. Постановка задачі

Нехай $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ — n-вимірні комплексний та дійсний евклідові простори; $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_m = \{1; \ldots; m\}$, $m \in \mathbb{N}$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — елементи з $\mathbb{R}^n$; $|\varphi(\cdot)| = \sum_{j=1}^n |\varphi_j(\cdot)|$, де $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot); \ldots; \varphi_n(\cdot))$, зокрема $|z| = \sum_{j=1}^n |z_j|$, $z \in \mathbb{C}^n$; $z^q = \prod_{j=1}^n z_j^{q_j}$, $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $z \in \mathbb{C}^n$; $\|(b_{ij})_{i=1,j=1}^{l,m}\| = \max_{i \in \mathbb{N}_l, j \in \mathbb{N}_m} |b_{ij}|$; $C^\infty(L)$ — простір усіх нескінченно диференційовних функцій, визначених на множині L; S — простір Шварца [16], а $\omega_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_n$, — зростаючі, неперервні й необмежені на $[0; +\infty)$ функції, причому $\omega_j(0) = 0$. Покладемо для $t \geq 0$ $\Omega_j(t) = \int_0^t \omega_j(\xi)\, d\xi$, $j \in \mathbb{N}_n$. При кожному $j \in \mathbb{N}_n$ функція $\Omega_j(\cdot)$ має такі властивості (див. [18]):

1) вона диференційовна, зростаюча на $[0; +\infty)$;

2) $\Omega_j(0) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} \Omega_j(t) = +\infty$;

3) $\Omega_j(\cdot)$ — опукла (донизу) функція, тобто: а) $\forall \{t_1, t_2\} \subset [0; +\infty)$: $\Omega_j(t_1) + \Omega_j(t_2) \leq \Omega_j(t_1 + t_2)$; б) $\forall \delta \geq 1$ $\forall t \in [0; +\infty)$: $\Omega_j(\delta t) \geq \delta \Omega_j(t)$; в) $\forall \delta \in (0; 1)$ $\forall t \in [0; +\infty)$: $\Omega_j(\delta t) \leq \delta \Omega_j(t)$.

Продовжимо $\Omega_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_n$, на $(-\infty, 0)$ парно і покладемо $\Omega(x) = \{\Omega_j(x_j),\ j \in \mathbb{N}_n\}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Поряд з Ω, подібним способом, за функціями $\mu_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_n$, з такими самими властивостями, що й $\omega_j(\cdot)$, визначимо вектор-функцію $M(x) = \{M_j(x_j), j \in \mathbb{N}_n\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, і розглянемо простори [18]:

$$W_\Omega = \big\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\big|\, \exists\, \delta > 0\ \forall\, q \in \mathbb{Z}_+^n\ \exists\, c_q > 0 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n : \ |D^q \varphi(x)| \leq c_q \exp\{-|\Omega(\delta x)|\} \big\};$$

$$W^M = \big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^n) \,\big|\, \exists\, \delta > 0 \;\forall\, q \in \mathbb{Z}_+^n \;\exists\, c_q > 0$$
$$\forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}^n : \;|z^q \varphi(z)| \le c_q \exp\{|M(\delta y)|\}\big\};$$

$$W_\Omega^M = \big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{C}^n) \,\big|\, \exists\, \{c, \delta_1, \delta_2\} \subset (0; +\infty)$$
$$\forall\, z \in \mathbb{C}^n : |\varphi(z)| \le c \exp\{Q^-(\delta_1, \delta_2; z)\}\big\},$$

де $Q^\pm(\delta_1, \delta_2; z) = \pm|\Omega(\delta_1 x)| + |M(\delta_2 y)|$, $z = x + iy$. Як зазначено в [18, 33], $W_\Omega^M = W_\Omega \bigcap W^M$ — об'єднання повних, досконалих зліченно нормованих просторів, причому послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset W_\Omega^M$ збігається в цьому просторі до функції φ з W_Ω^M (позначатимемо $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{W_\Omega^M} \varphi$) тоді і тільки тоді, коли: 1) $\varphi_\nu(z) \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} \varphi(z)$ рівномірно щодо z на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{C}^n$; 2) $\exists\, \{c, \delta_1, \delta_2\} \subset (0; +\infty)$ $\forall\, \nu \ge 1$ $\forall\, z \in \mathbb{C}^n$: $|\varphi_\nu(z)| \le c \exp\{Q^-(\delta_1, \delta_2; z)\}$.

Надалі вважатимемо, що компоненти вектор-функції Ω, крім зазначених властивостей, мають ще й таку:

$$\Omega_j(\delta t) \ge g_1(\delta)\Omega_j(t) + g_2(\delta), \qquad \delta \in (0; 1), \; t \in \mathbb{R}, \; j \in \mathbb{N}_n,$$

де $g_1(\cdot)$, $g_2(\cdot)$ — деякі обмежені на $(0; 1)$ функції, причому перша з них додатна, а $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{M}$ — вектор-функції, з якими Ω та M — взаємодвоїсті за Юнгом [18].

Далі, зафіксуємо r з множини $\{0; 1; \ldots; n\}$ і позначимо через $\overset{r}{W}_\Omega$, $\overset{r}{W}{}^M$, $\overset{r}{W}{}_\Omega^M$ сукупності всіх функцій відповідно з W_Ω, W^M та W_Ω^M, які є парними за першими r компонентами своїх аргументів. У $\overset{r}{W}_\Omega$, $\overset{r}{W}{}^M$, $\overset{r}{W}{}_\Omega^M$ (надалі називатимемо їх просторами типу $\overset{r}{W}$) традиційним способом визначається топологія [18], при цьому, якщо $r = 0$, то $W_\Omega = \overset{0}{W}_\Omega$, $W^M = \overset{0}{W}{}^M$, $W_\Omega^M = \overset{0}{W}{}_\Omega^M$. Сукупності функцій, які задані на $\mathbb{R}^n$, допускають аналітичне продовження на весь $\mathbb{C}^n$ і як функції комплексної змінної є елементами просторів $\overset{r}{W}{}^M$, $\overset{r}{W}{}_\Omega^M$, позначатимемо через $\overset{r}{W}{}^M(\mathbb{R}^n)$, $\overset{r}{W}{}_\Omega^M(\mathbb{R}^n)$.

Фактично з [18,28] одержуємо, що в просторах типу $\overset{r}{W}(\mathbb{R}^n)$ визначені та неперервні: 1) операції додавання, віднімання та множення; 2) оператор комбінованого зсуву $T_{x,\nu}^h$:

$$(T_{x,\nu}^h \varphi)(x) = b_\nu \int\limits_{[0;\pi]} \varphi(\eta_{x_j}^{h_j}(\xi_j), \ldots, \eta_{x_j}^{h_j}(\xi_j), \mu_{x_{r+1}}^{h_{r+1}}, \ldots, \mu_{x_n}^{h_n})$$
$$\times \left(\prod_{j=1}^r \sin^{2\nu_j} \xi_j\right) d\xi,$$

$$\nu = \{\nu_j > -1/2,\ j \in \mathbb{N}_r\}, \qquad h \in \mathbb{R}^{n-r},\ r \neq 0;$$
$$(T^h_{x,\nu}\varphi)(x) = \varphi(x-h), \qquad \{h; x\} \subset \mathbb{R}^n,\ r = 0,$$

де $\eta^h_x(\xi) = \sqrt{x^2 + h^2 - 2xh\cos\xi}$, $\mu^h_x = x - h$, $[0;\pi] = [0;\pi]\times\cdots\times[0;\pi] \subset \mathbb{R}^r$, $b_\nu = \prod_{j=1}^r \Gamma(\nu_j+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu_j+1/2))$, а $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера, при цьому $T^h_{x,\nu}$ є нескінченно диференційовним оператором у цих просторах; 3) оператор комбінованого диференціювання

$$B^{q'}_{\nu,x'} D^{q''}_{x''} = \left(\prod_{j=1}^r B^{q_j}_{\nu_j,x_j}\right)\left(\prod_{j=r+1}^n \partial^{q_j}_{x_j}\right),$$
$$x = (x'; x'') \in \mathbb{R}^n,\ q = (q'; q'') \in \mathbb{Z}^n_+,$$

де $B_{\nu_j,x_j} = \partial^2/\partial x_j^2 + (2\nu_j+1)/x_j \partial/\partial x_j$ — оператор Бесселя порядку $\nu_j > -1/2$, який діє за змінною x_j; 4) оператори Фур'є–Бесселя F_B, F_B^{-1}:

$$\psi(\sigma) = F_B[\varphi](\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}} \varphi(x', x'')\left(\prod_{l=1}^r j_{\nu_l}(\sigma_l x_l) x_l^{2\nu_l+1}\right) e^{i(x'',\sigma'')} dx,$$

$$\varphi(x) = F_B^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}} \psi(\sigma', \sigma'')\left(\prod_{l=1}^r j_{\nu_l}(\sigma_l x_l) \sigma_l^{2\nu_l+1}\right) e^{-i(x'',\sigma'')} d\sigma,$$

де $c_\nu = (2\pi)^{r-n}\prod_{j=1}^r (2^{2\nu_j}\Gamma^2(\nu_j+1))^{-1}$, $\mathbb{R}^n_{+,r} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, j \in \mathbb{N}_r\}$, $\xi' \in \mathbb{R}^r$, $\xi'' = (\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-r}$, $(x'', \sigma'') = \sum_{j=r+1}^n x_j \sigma_j$, $j_\nu(\cdot)$ — нормована функція Бесселя ν-го порядку (тобто $j_\nu(\sqrt{\lambda}\xi)$ є розв'язком рівняння $D^2_\xi u + (2\nu+1)/\xi D_\xi u + \lambda u = 0$ за умови, що $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$); причому правильні такі співвідношення:

$$F_B[\overset{r}{W}_\Omega] = \overset{r}{W}{}^{\widetilde{\Omega}}; \quad F_B[\overset{r}{W}{}^M_\Omega] = \overset{r}{W}{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}}.$$

Згортку двох функцій φ і ψ з простору типу $\overset{r}{W}(\mathbb{R}^n)$ означимо формулою

$$(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}} (T^\xi_{x,\nu}\varphi(x))\psi(\xi)\left(\prod_{j=1}^r \xi_j^{2\nu_j+1}\right) d\xi.$$

Неважко переконатися, що для зазначених функцій φ й ψ виконується рівність

$$F_B[\varphi * \psi] = F_B[\varphi] \cdot F_B[\psi].$$

Через Φ' позначимо простір, топологічно спряжений з $\Phi \in \{\overset{r}{W}_\Omega(\mathbb{R}^n), \overset{r}{W}{}^M(\mathbb{R}^n), \overset{r}{W}{}^M_\Omega(\mathbb{R}^n)\}$. Оскільки в просторах типу $\overset{r}{W}$ визначений оператор комбінованого зсуву аргументу $T^h_{x,\nu}$, то згортку узагальненої функції $f \in \Phi'$ з основною функцією $\varphi \in \Phi$ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T^\xi_{x,\nu}\varphi(x)\rangle, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

(тут $\langle f_\xi, \cdot\rangle$ позначає дію функціонала f за змінною ξ). Зазначимо, що $(f * \varphi)(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (бо $T^h_{x,\nu}$ нескінченно диференційовний в Φ). Елемент f з Φ' назвемо згортувачем у просторі Φ, якщо: 1) $\forall\, \varphi \in \Phi :$ $f * \varphi \in \Phi$; 2) операція $f*$ — неперервна в Φ.

Перетворення Фур'є–Бесселя елемента f з Φ' означимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_B[f], F_B[\varphi]\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \qquad \varphi \in \Phi.$$

Нехай $\mathcal{L}^M_{\Omega,r}([0;T])$, $0 < T < +\infty$, — сукупність усіх функцій a: $[0;T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що: 1) $a(t,(x_1,\ldots,x_n))$ — парна функція за кожною змінною x_j, $j \in \mathbb{N}_r$, причому $a(t,\cdot)$, $t \in [0,T]$, допускає аналітичне продовження до цілої функції на $\mathbb{C}^n$; 2) $\exists\,\{\delta; c\} \subset [0;+\infty)$ $\forall\, t \in [0;T)$ $\exists\, \eta \in (0;1)$ $\forall\, \varepsilon \in (0;\eta)$ $\exists\, \nu(\varepsilon) = \nu(t,\varepsilon) > 0$, $\nu(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 0$, $\forall\, z \in \mathbb{C}^n$: $|a(t+\varepsilon,z) - a(t,z)| \le \nu(\varepsilon)(Q^+(1,\delta;z)+c)$; 3) $\exists\,\{\delta_1;\delta_2;c\} \subset [0;+\infty)$ $\forall\, z \in \mathbb{C}^n$: $\sup_{t\in[0;T]}|a(t,z)| \le Q^+(\delta_1,\delta_2;z)+c$.

Клас $\mathcal{L}^M_{\Omega,r}$ замкнений відносно операцій додавання, віднімання та множення на неперервну функцію $b(t)$, $t \in [0;T]$. Більше того, якщо $\hat\Omega(\cdot), \hat M(\cdot)$ — опуклі вектор-функції такі, що $\hat\Omega_j(t) \le \Omega_j(t)$, $\hat M_j(t) \le M_j(t)$, $t \in [0,T]$, $j \in \mathbb{N}_n$, то очевидно, що $\mathcal{L}^{\hat M}_{\hat\Omega,r}([0,T]) \subset \mathcal{L}^M_{\Omega,r}([0,T])$.

Правильне таке твердження.

Лема 1.1. *Нехай a належить до класу $\mathcal{L}^M_{\Omega,r}([0;T])$. Тоді при кожному фіксованому t з $[0,T]$ функція $a(t,\cdot)$ — мультиплікатор у просторі $\Psi \in \{\overset{r}{W}_\Omega; \overset{r}{W}{}^M_\Omega\}$.*

Доведення. Згідно з означенням мультиплікатора, досить переконатися у виконанні таких умов: 1) $(a(t,\cdot)\varphi) \in \Psi$, $t \in [0;T]$, $\varphi \in \Psi$; 2) $\forall\,\{\varphi;\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset \Psi$, $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{\Psi} \varphi$, $\forall\, t \in [0;T] : a(t,\cdot)\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{\Psi} a(t,\cdot)\varphi$.

Нехай спочатку $\Psi = \overset{r}{W}{}^M_\Omega$. Тоді, скориставшись умовою 3) з опису класу $\mathcal{L}^M_{\Omega,r}([0;T])$, властивостями вектор-функцій Ω і M, а також тим, що $\varphi \in \overset{r}{W}{}^M_\Omega$, дістанемо

$$|a(t,z)\varphi(z)| \le c_1(Q^+(\delta_1,\delta_2;z)+c)\exp\{Q^-(\delta_3,\delta_4;z)\}$$

$$\leq c_2 \sup_{\tau>0}\{\tau e^{-\tau}\} \exp\{Q^-(\delta_5, \delta_6; z)\}, \qquad t \in [0;T],\ z \in \mathbb{C}^n,$$

де c_2, δ_5, δ_6 — додатні сталі, не залежні від z. Отже, умова 1) виконується.

Виконання умови 2) також є очевидним, якщо зважити на означення збіжності в $\overset{r}{W}{}^{M}_{\Omega}$, властивості функції a та на те, що $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{\overset{r}{W}{}^{M}_{\Omega}} \varphi$.

Доведення леми 1.1 у випадку, коли $\Psi = \overset{r}{W}{}_{\Omega}$ реалізується аналогічно. $\square$

Візьмемо тепер a з $\mathcal{L}^{M}_{\Omega,r}([0;T])$ і побудуємо в просторі $\widetilde{\Psi} \in \big\{\overset{r}{W}{}^{\widetilde{M}};\ \overset{r}{W}{}^{\widetilde{M}}_{\widetilde{\Omega}}\big\}$ оператор B_a за допомогою формули

$$(B_a\varphi)(t,\cdot) = F_B^{-1}[a(t,\xi)F_B[\varphi](\xi)](t,\cdot), \qquad t \in [0;T],\ \varphi \in \widetilde{\Psi}.$$

Цей оператор є лінійним і неперервним у $\widetilde{\Psi}$ (при кожному фіксованому t з $[0;T]$), оскільки такими є оператори перетворення Фур'є–Бесселя. Більше того, згідно з твердженням леми 1.1,

$$B_a : \widetilde{\Psi} \to \widetilde{\Psi}, \qquad t \in [0;T]. \tag{1.1}$$

Властивість (1.1) оператора B_a дозволяє означити спряжений оператор B_a^* до B_a у просторі $\widetilde{\Psi}'$ так:

$$\langle B_a^* f, \varphi\rangle = \langle f, B_a\varphi\rangle, \qquad f \in \widetilde{\Psi}',\ \varphi \in \widetilde{\Psi}.$$

Наведемо приклади оператора B_a.

1^0. Нехай

$$a(t,\xi) = b(t)\left(\prod_{j=1}^{r}(-\xi_j^2)^{q_j}\right)\left(\prod_{j=r+1}^{n}(i\xi_j)^{q_j}\right), \qquad q \in \mathbb{Z}_+^n,\ \xi \in \mathbb{C}^n,\ t \in [0;T],$$

а $b(\cdot)$ — неперервна функція на $[0;T]$. Тоді оператор B_a у просторі $\widetilde{\Psi}$ збігатиметься з комбінованим оператором диференціювання $B^{q'}_{\nu,z'}D^{q''}_{z''}$ з коефіцієнтом $b(\cdot)$, де $q = (q'; q'') \in \mathbb{Z}_+^n$.

2^0. Оскільки $a(\cdot,\cdot) \in \mathcal{L}^{M}_{\Omega,r}([0;T])$, то

$$a(t,z) = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{|q|=l} c_q(a) z'^{2q'} z''^{q''}, \qquad t \in [0;T],\ z \in (z'; z'') \in \mathbb{C}^n, \tag{1.2}$$

де $z'^{2q'} = \prod_{j=1}^{r} z_j^{2q_j}$, $z''^{q''} = \prod_{j=r+1}^{n} z_j^{q_j}$, а

$$c_q(a)=\left(\left(\prod_{j=1}^{r}(2q_j)\right)\left(\prod_{j=r+1}^{n}q_j\right)\right)^{-1}\frac{\partial^{|2q'|+|q''|}a(t,z)}{\partial z_1^{2q_1}\dots\partial z_r^{2q_r}\partial z_{r+1}^{q_{r+1}}\dots\partial z_n^{q_n}}\Big|_{z=0},$$
$$q=(q';q'')\in\mathbb{Z}_+^n. \quad (1.3)$$

Скористаємося розкладом (1.2) для означення оператора $a(t, iB_{\nu,z'}D_{z''})$:

$$a(t,iB_{\nu,z'}D_{z''})=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{|q|=l}c_q(a)\left(\prod_{j=1}^{r}(-B_{\nu_j,z_j})^{q_j}\right)\left(\prod_{j=r+1}^{n}(-i\partial_{z_j})^{q_j}\right),$$

який назвемо оператором Поста дробового диференціювання з символом $a(t,\cdot)$, $t\in[0;T]$, породженого операторами $(-B_{\nu,z'})$ та $(-iD_{z''})$ (детальніше про узагальнене диференціювання за Постом див., наприклад, у [34, 35]).

Зваживши на результати, одержані в [28, 31], приходимо до висновку, що

$$(a(t,iB_{\nu,z'},D_{z''})\varphi)(t,z)=(B_a\varphi)(t,z),$$
$$t\in[0;T],\ z\in\mathbb{C}^n, \varphi\in \overset{r}{W}{}^{\widetilde{\Omega}}\ \ (\overset{r}{W}{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}}).$$

З огляду на ці приклади, домовимося надалі оператор B_a називати псевдодиференціальним оператором із символом a (залежним від параметра t).

Позначимо через $\mathbf{\Phi}$ і $\mathbf{\Phi}'$ — декартові степені (з натуральним показником m) просторів Φ і Φ' з покомпонентною збіжністю у, відповідно, Φ та Φ'; $\mathrm{P}(\mathbf{\Phi})$ — множину всіх квадратних матриць порядку m, рядками яких є елементи з $\mathbf{\Phi}$ (також з покомпонентною збіжністю в просторі Φ). Говоритимемо, що вектор-функція $\varphi=(\varphi_1;\dots;\varphi_m)$ — мультиплікатор у просторі $\mathbf{\Phi}$, якщо: 1) $\forall\, p\in\mathrm{P}(\mathbf{\Phi})$: $p\varphi\in\mathbf{\Phi}$; 2) $\forall\,\{p;p_\nu,\nu\geq 1\}\subset P\mathbf{\Phi}$, $p_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\mathrm{P}(\mathbf{\Phi})} p : p_\nu\varphi \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\mathbf{\Phi}} p\varphi$.

Нехай $\mathbf{B}=(B_{a_{ij}})_{i=1,j=1}^{m,m}$ — матричний псевдодиференціальний оператор у просторі $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$ з параметром $t\in[0;T]$, побудований за матрицею-символом $\mathcal{A}_t(\cdot)=(a_{ij}(t,\cdot))_{i=1,j=1}^{m,m}$, кожен елемент якої належить до класу $\mathcal{L}^M_{\Omega,r}([0;T])$, тобто — оператор, дія якого на елементах φ з $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$, при кожному фіксованому $t\in[0;T]$, задається таким способом:

$$(\mathbf{B}\varphi)(t,\cdot)=\left(\sum_{j=1}^{m}(B_{a_{ij}}\varphi_j)(t,\cdot)\right)_{i=1}^{m},$$

де $B_{a_{ij}}$ — псевдодиференціальний оператор з символом a_{ij} (нагадаємо, що $\widetilde{\Psi}\in\{\overset{r}{W}{}^{\widetilde{M}};\overset{r}{W}{}^{\widetilde{M}}_{\widetilde{\Omega}}\})$.

Розглянемо систему

$$\partial_t u(t,x) = (\mathbf{B}u)(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi{=}(0;T] \times \mathbb{R}^n_{+,r}, \tag{1.4}$$

де $u = col(u_1; \ldots ; u_m)$. Припустимо, що для (1.4) виконується така умова:

$$\begin{gathered}\exists\, \{\delta_1^*;\delta_2^*\} \subset (0;+\infty)\ \exists\, c^* \in \mathbb{R}\ \forall\, t \in (0;T]\ \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n : \\ \max_{j\in\mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\lambda_j(t,\xi) \le Q^-(\delta_1^*, \delta_2^*; \xi) + c^*,\end{gathered} \tag{1.5}$$

де λ_j, $j \in \mathbb{N}_m$, — власні числа матриці $\mathcal{A}_t$ — символу матричного оператора $\mathbf{B}$.

Наведемо приклади системи (1.4), для якої виконується умова (1.5).

$\mathbf{1}^0$. $\overrightarrow{2B}$-параболічні системи диференціальних рівнянь з оператором Бесселя і неперервними коефіцієнтами, залежними лише від часу [6]. У цьому випадку $\Omega(\zeta) = \{\zeta_j^{2B_j}, j \in \mathbb{N}_n\}$, $M(\eta) = \{\eta_j^{2B_j}, j \in \mathbb{N}_n\}$, де B_j, $j \in \mathbb{N}_n$, — натуральні компоненти вектора $\overrightarrow{B}$; елементами класу $\mathcal{L}^M_{\Omega,1}([0;T])$ є вирази вигляду $\sum b_q(t)\big(\prod_{j=1}^r(-\xi_j^2)^{q_j}\big)\big(\prod_{j=r+1}^n(i\xi_j)^{q_j}\big)$ з неперервними функціями $b_q(\cdot)$ на множині $[0;T]$ (тут знак суми поширюється на всі q з $\mathbb{Z}^n_+$ такі, що $\sum_{j=1}^r q_j/B_j + \sum_{j=r+1}^n q_j/(2B_j) \le 1$).

$\mathbf{2}^0$. Нехай B_φ — комбінований оператор диференціювання нескінченного порядку в просторі $\overset{r}{W}\,{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}}$, побудований за функцією

$$\varphi(\xi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{|q|=l} c_q(\varphi) \xi'^{2q'} \xi''^{q''}, \qquad \xi \in \mathbb{C}^n,$$

(тут $c_q(\varphi)$ визначається рівністю (1.3)), яка належить до класу P^M_Ω — сукупності цілих однозначних функцій $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами в $\overset{r}{W}\,{}^M_\Omega$ і такі, що $e^\varphi \in \overset{r}{W}\,{}^M_\Omega$ [28, 31]):

$$\begin{aligned}(B_\varphi f)(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{|q|=l} c_q(\varphi) \Bigg(\Bigg(&\prod_{j=1}^r (-B_{\nu_j,x_j})^{q_j}\Bigg) \\ &\times \Bigg(\prod_{j=r+1}^n (-i\partial_{x_j})^{q_j}\Bigg)\Bigg) f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ f \in \overset{r}{W}\,{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}}.\end{aligned}$$

Розглянемо систему

$$\begin{cases}\partial_t u_1(t,x) = a(B_\varphi u_1)(t,x) + t^2 u_2(t,x), \\ \partial_t u_2(t,x) = -u_1(t,x) + a(B_\varphi u_2)(t,x),\end{cases} \qquad (t;x) \in \Pi,\ a \in \mathbb{R}.$$

Якщо розв'язок цієї системи шукати лише серед елементів класу $\overset{r}{\mathbf{W}}\,{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}}$, то

$$\mathcal{A}_t(\xi) = \begin{pmatrix} a\varphi(\xi) & t^2 \\ -1 & a\varphi(\xi) \end{pmatrix}, \qquad \xi \in \mathbb{C}^n,$$

(тут враховано те, що $B_\varphi f = F_B^{-1}[\varphi F_B[f]]$, $f \in \overset{r}{W}\,{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}}$ (див. [28])). Звідси одержуємо, що

$$\lambda_{1,2}(t,\xi) = a\varphi(\xi) \pm it, \qquad \xi \in \mathbb{C}^n,\ t \in (0;T].$$

Отже, $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 = a\mathrm{Re}\,\varphi$.

З іншого боку, оскільки $\varphi \in P_\Omega^M$, то $e^\varphi \in \overset{r}{W}\,{}^{M}_{\Omega}$, тобто

$$\exists\,\{c;\delta_1;\delta_2\} \subset (0;+\infty)\ \forall\, t \in (0;T]\ \forall\, \xi \in \mathbb{C}^n:$$
$$|e^{\varphi(\xi)}| = e^{\mathrm{Re}\,\varphi(\xi)} \le c\exp\{Q^-(\delta_1,\delta_2;\xi)\},$$

або, що те ж саме,

$$\mathrm{Re}\varphi(\xi) \le Q^-(\delta_1,\delta_2;\xi) + c_1, \qquad c_1 = \max\{1;c\}.$$

Таким чином, дана система рівнянь з оператором комбінованого диференціювання нескінченного порядку, є системою (1.4), для якої виконується умова (1.5), лише при $a > 0$.

Якщо для системи (1.4) задати крайові умови

$$\partial_{x_l} u\big|_{x_l=0} = 0, \qquad l \in \mathbb{N}_r, \tag{1.6}$$

та початкову умову

$$u(t,\cdot)\big|_{t=0} = f, \qquad f \in \widetilde{\mathbf{\Psi}}', \tag{1.7}$$

то під розв'язком задачі Коші (1.4), (1.6), (1.7) (надалі, задача Коші (1.4)) розумітимемо таку вектор-функцію u, яка диференційовна за t на $(0;T]$, при кожному фіксованому t з $(0;T]$ належить до області визначення оператора $\mathbf{B}$, задовольняє систему (1.4) та крайові умови (1.6) у звичайному розумінні, а початкову умову (1.7) — у сенсі збіжності в просторі $\widetilde{\mathbf{\Psi}}'$.

2. Розв'язування задачі Коші

Подіємо формально на систему (1.4) перетворенням Фур'є–Бесселя відносно x, а відтак поширимо результат за просторовою змінною ξ на увесь комплексний простір $\mathbb{C}^n$. Одержимо лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь з параметром ξ

$$\partial_t v(t,\xi) = (\mathcal{A}_t v)(t,\xi), \qquad (t,\xi) \in (0;T] \times \mathbb{C}^n, \tag{2.1}$$

де $v = col(v_1; \ldots; v_m)$.

Нехай $\theta(t;\xi,\tau) = (\theta^{ij}(t;\xi,\tau))_{i=1,j=1}^{m,m}$ для всіх $\tau \in [0;T)$, $t \in (\tau;T]$ і $\xi \in \mathbb{C}^n$, є розв'язком системи (2.1), що задовольняє початкову умову

$$\theta(t;\xi,\tau)\big|_{t=\tau} = E \tag{2.2}$$

у звичайному розумінні (тут E — одинична матриця), тобто матрицант системи (2.1). Зазначимо, що зроблені припущення на елементи матриці $\mathcal{A}_t$ забезпечують існування такого матрицанта, причому будь-який інший розв'язок системи (2.1) має вигляд

$$v = \theta C,$$

де C — деяка матриця-стовпець з елементами, залежними лише від ξ (див., наприклад, у [36]).

Наступні допоміжні твердження характеризують властивості θ.

Лема 2.1. *Для кожного $\tau \in [0;T)$ існує $\varepsilon \in (0;1)$ таке, що для всіх $t \in (\tau;\tau+\varepsilon]$ і $\xi \in \mathbb{C}^n$*

$$\|\theta(t;\xi,\tau)\| \le c \exp\{((t-\tau)/4)(Q^-(\delta_1^*,\delta_2^0;\xi) + g^*)\},$$

де c, δ_2^0, g^* — додатні сталі, не залежні від τ, t, ε і ξ.

Доведення. Запишемо (2.1) у вигляді

$$\partial_t \theta = \mathcal{A}_{t^*}(\xi)\theta + q(t,\xi), \tag{2.3}$$

де $q(t,\xi) = (\mathcal{A}_t(\xi) - \mathcal{A}_{t^*}(\xi))\theta(t;\xi,\tau)$, а t^* — довільно фіксована точка з $[\tau;T]$. Розв'язавши задачу Коші (2.2), (2.3), прийдемо до такого зображення матрицанта системи (2.1):

$$\theta(t;\xi,\tau) = e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)} + \int_\tau^t e^{(t-\sigma)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)} q(\sigma,\xi)\, d\sigma,$$

де $e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}} = E + \sum_{j=1}^\infty ((t-\tau)\mathcal{A}_{t^*})^j / j!$.

Згідно з твердженням відповідної леми з [18, с. 78]

$$\|e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}\| \le ce^{(t-\tau)\max_{j\in\mathbb{N}_m}\mathrm{Re}\lambda_j(t^*,\xi)}\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}(2(t-\tau)\|\mathcal{A}_{t^*}(\xi)\|)^j\right),$$

для всіх $t\in[\tau;T]$ і $\xi\in\mathbb{C}^n$, де c — додатна стала, не залежна від t,τ і ξ.

Звідси, скориставшись умовою (1.5), властивостями вектор-функції Ω та елементами матриці $\mathcal{A}_{t^*}$ і поклавши $\overline{\delta}_k=\max_{i\in\mathbb{N}_m,j\in\mathbb{N}_m}(m\delta_k^{ij})$, $k\in\mathbb{N}_2$; $c^0=\max_{i\in\mathbb{N}_m,j\in\mathbb{N}_m}(mc^{ij})$, де δ_k^{ij}, c^{ij} — сталі з оцінок елементів a_{ij} матриці $\mathcal{A}_t$ (див. умову 3) з означення класу $\mathcal{L}^M_{\Omega,r}([0;T])$), одержимо, що

$$\|e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}\|\le c2^{2(m-1)}\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}\sup_{z>0}\{z^je^{-z}\}\right)$$
$$\times\exp\{((t-\tau)/2)[Q^-(\delta_1^*,2\delta_2^*+\overline{\delta_2};\xi)+(2c^*+c^0)]\}$$

при $\delta_1^*\ge\overline{\delta_1}$, і

$$\|e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}\|\le c(4/\breve{g}_1)^{m-1}\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}\sup_{z>0}\{z^je^{-z}\}\right)$$
$$\times\exp\left\{((t-\tau)/2)[Q^-(\delta_1^*,2\delta_2^*+\widehat{g}_1;\xi)+2c^*+\widehat{g}_1c^0-\widehat{g}_2]\right\},$$
$$\breve{g}_1=\min\{1;g_1(y^*)\},$$

$$\widehat{g}_1=\max\{1;g_1(y^*)\},\qquad \widehat{g}_2=\begin{cases}0, & g_2(y^*)\ge 0,\\ g_2(y^*), & g_2(y^*)<0,\end{cases}\qquad y^*=\delta_1^*/\overline{\delta_1},$$

якщо $\delta_1^*<\overline{\delta_1}$.

Таким чином, існують додатні сталі c, δ_0, не залежні від t^*, t, τ і ξ, такі, що

$$\|e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}\|\le c\exp\{((t-\tau)/2)(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\xi)+g)\},\tag{2.4}$$

для всіх $\tau\in[0;T)$, $\{t^*;t\}\subset[\tau;T]$ і $\xi\in\mathbb{C}^n$, де $g=2c^*+\widehat{g}_1c^0-\widehat{g}_2$.

Використовуючи нерівність (2.4), знайдемо

$$\|\theta(t;\xi,\tau)\|\le c\exp\{((t-\tau)/2)(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\xi)+g)\}$$
$$+cm\int_\tau^t\exp\{((t-\sigma)/2)(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\xi)+g)\}\|q(\sigma,\xi)\|\,d\sigma.\tag{2.5}$$

Оскільки $\|q(t,\xi)\| \le m\|\mathcal{A}_t(\xi)-\mathcal{A}_{t^*}(\xi)\|\,\|\theta(t;\xi,\tau)\|$, то зваживши на властивості елементів матриці $\mathcal{A}_t$ щодо змінної t і поклавши $t^*=\tau$, для всіх t з $(\tau;\tau+\varepsilon]$ і $\xi\in\mathbb{C}^n$ одержимо

$$\|q(t,\xi)\| \le m\nu(\varepsilon)(Q^+(1,\delta^0;\xi)+c_1^0)\|\theta(t;\xi,\tau)\|,$$

де $\delta^0=\max_{i\in\mathbb{N}_m,j\in\mathbb{N}_m}\{\delta^{ij}\}$, $c_1^0=\max_{i\in\mathbb{N}_m,j\in\mathbb{N}_m}\{c^{ij}\}$; $\nu(\cdot)$, δ^{ij} й c^{ij} — відповідні величини з властивості 2) елемента a_{ij} матриці $\mathcal{A}_t$ (див. опис класу $\mathcal{L}^M_{\Omega,r}$).

Звідси, а також з нерівності (2.5), дістанемо

$$\begin{aligned}\|\theta(t;\xi,\tau)\|\exp\{-((t-\tau)/2)(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\xi)+g)\}&\\ \le c+cm^2\nu(\varepsilon)(Q^+(1,\delta^0;\xi)+c_1^0)&\\ \times\int_\tau^t \exp\{-((\sigma-\tau)/2)(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\xi)+g)\}\|\theta(\sigma;\xi,\tau)\|\,d\sigma,&\\ t\in(\tau;\tau+\varepsilon],\ \tau\in[0;T),\ \xi\in\mathbb{C}^n.&\end{aligned}$$

Тепер, поклавши

$$\varphi(t)=\|\theta(t;\xi,\tau)\|\exp\{-((t-\tau)/2)(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\xi)+g)\},\quad \phi(t)=c,$$
$$\chi(t)=cm^2\nu(\varepsilon)(Q^+(1,\delta^0;\xi)+c_1^0)$$

і врахувавши твердження леми 2 з [37, с. 300], прийдемо до

$$\begin{aligned}\varphi(t)\le\phi(t)+\int_\tau^t\chi(\sigma)\phi(\sigma)\exp\left\{\int_\sigma^t\chi(\rho)\,d\rho\right\}d\sigma&\\ \le c+(cm)^2\nu(\varepsilon)(Q^+(1,\delta^0;\xi)+c_1^0)&\\ \times\int_\tau^t\exp\{(t-\sigma)cm^2\nu(\varepsilon)(Q^+(1,\delta^0;\xi)+c_1^0)\}\,d\sigma&\\ \le c(1+J(t;\xi,\tau)),&\end{aligned}$$

де

$$J(t;\xi,\tau)=\exp\{2cm^2\nu(\varepsilon)(t-\tau)(Q^+(1,\delta^0;\xi)+c_1^0)\}.$$

Далі, при $\delta_1^*\ge1$

$$J(t;\xi,\tau)\le\exp\{((t-\tau)/4)(8cm^2\nu(\varepsilon))(Q^+(\delta_1^*,\delta^0;\xi)+c_1^0)\},$$

якщо ж $0<\delta_1^*<1$, то

$$J(t;\xi,\tau)\le\exp\{((t-\tau)/4)(8cm^2\nu(\varepsilon)(g_1')^{-1})(Q^+(\delta_1^*,g_1''\delta^0;\xi)+g_1''c_1^0-g_2'')\},$$

де $g_1' = \min\{1; g_1(\delta_1^*)\}$, $g_1'' = \max\{1; g_1(\delta_1^*)\}$, а

$$g_2'' = \begin{cases} 0, & g_2(\delta_1^*) \geq 0, \\ g_2(\delta_1^*), & g_2(\delta_1^*) < 0; \end{cases}$$

оскільки

$$\Omega_j(\zeta_j) \leq (\Omega_j(\delta_1^* \zeta_j) - g_2(\delta_1^*))/g_1(\delta_1^*), \qquad \zeta_j \in \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}_m.$$

Зафіксуємо тепер $\varepsilon > 0$ так, щоб $8cm^2\nu(\varepsilon) \leq g_1'$. Тоді, врахувавши те, що

$$\begin{aligned} &\exp\{((t-\tau)/2)(Q^-(\delta_1^*, \delta_0; \xi) + g)\} \\ &\qquad \leq \exp\left\{((\tau - t)/4)\sum_{j=1}^{n} \Omega_j(\delta_1^* \mathrm{Re}\, \xi_j)\right\} \\ &\qquad\qquad \times \exp\{((t-\tau)/4)(Q^-(\delta_1^*, 2\delta_0; \xi) + 2g)\}, \end{aligned}$$

для $\tau \in [0; T)$, $t \in (\tau; \tau + \varepsilon]$ і $\xi \in \mathbb{C}^n$, дістанемо таку оцінку матриціанта θ:

$$\|\theta(t; \xi, \tau)\| \leq c \exp\{((t-\tau)/4)(Q^-(\delta_1^*, \delta_2^0; \xi) + g^*)\}, \tag{2.6}$$

де c, δ_2^0 — додатні сталі, не залежні від τ, t, ξ і ε, а $g^* = 2g + g_1'' c_1^0 - g_2''$. □

Лема 2.2. *Існують додатні сталі c, δ_1^*, δ_2^0 і g^* такі, що для всіх $t \in (\tau; T]$ і $\xi \in \mathbb{C}^n$*

$$\|\theta_t(\xi)\| \leq c \exp\{(t/4)(Q^-(\delta_1^*, \delta_2^0; \xi) + g^*)\}, \qquad \theta_t(\cdot) = \theta(t; \cdot, 0). \tag{2.7}$$

Дане твердження стає очевидним, якщо зважити на те, що згідно з лемою 2.1 існує таке розбиття $\{t_j\}_{j=1}^k$ проміжку $(0; t]$, $t \in (0; T]$, на кожному елементі $(t_j; t_{j+1}]$ якого для матриціанта θ виконується нерівність (2.6) зі сталими, не залежними від t, t_j, t_{j+1} і ξ, а також на одну з відомих властивостей матриціанта [36]:

$$\theta(t; \cdot, t_0) = \theta(t; \cdot, t_1)\theta(t_1; \cdot, t_0), \qquad \{t_0; t_1; t\} \subset (0; T].$$

Наслідок 2.1. *При кожному фіксованому t з $(0; T]$ $\theta_t(\cdot)$ належить до класу* $\mathrm{P}(\boldsymbol{\Psi})$.

Лема 2.3. *Кожен елемент матриціанта $\theta_t(\cdot)$ диференційовний за $t \in (0; T]$ у розумінні топології простору Ψ.*

Доведення. Досить переконатися в тому, що граничне співвідношення

$$\hat{\theta}_{\Delta t}(t,\cdot)=(\theta_{(t+\Delta t)}(\cdot)-\theta_t(\cdot))/\Delta t \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \mathcal{A}_t(\cdot)\theta_t(\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності в класі $\mathrm{P}(\boldsymbol{\Psi})$.

Зазначимо, що матрицант θ_t диференційовний за $t\in(0;T]$ у звичайному розумінні [36], тому згідно з теоремою про скінченні прирости

$$\hat{\theta}_{\Delta t}(t,\cdot)=\partial_t\theta_{(t+\varepsilon\Delta t)}(\cdot), \qquad \{t,t+\varepsilon\Delta t\}\subset(0;T],\ \varepsilon\in(0;1),$$

тобто

$$\hat{\theta}_{\Delta t}(t,\cdot)=\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}(\cdot)\theta_{(t+\varepsilon\Delta t)}(\cdot)$$

(бо $\theta_\tau(\cdot)$ — звичайний розв'язок системи (2.1) для всіх τ з $(0;T]$).

Розглянемо спочатку випадок, коли $\Delta t\geq 0$. Тоді

$$\theta_{(t+\varepsilon\Delta t)}(\cdot)=\theta(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,t)\theta_t(\cdot).$$

Отже,

$$\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}\theta_{(t+\varepsilon\Delta t)}-\mathcal{A}_t\theta_t=(\mathcal{A}_{t+\varepsilon\Delta t}\theta(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,t)-\mathcal{A}_t)\theta_t.$$

Зваживши на властивості елементів матриці $\mathcal{A}_t$, а також на структуру матрицанта θ [36]

$$\theta(t;\xi,\tau)=E+\int_\tau^t\mathcal{A}_{t_1}(\xi)\,dt_1+\int_\tau^t\mathcal{A}_{t_1}(\xi)\int_\tau^{t_1}\mathcal{A}_{t_2}(\xi)\,dt_2\,dt_1+\ldots,$$
$$t\in[\tau;T],\ \xi\in\mathbb{C}^n, \quad (2.8)$$

прийдемо до того, що

$$\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}(\xi)\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\mathcal{A}_t(\xi), \qquad \theta(t+\varepsilon\Delta t;\xi,t)\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}E$$

рівномірно щодо ξ на кожній компактній множині $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}^n$; а відтак — і до рівномірної збіжності щодо $\xi\in\mathbb{K}$ матриці $\hat{\theta}_{\Delta t}(t,\xi)$ до $\mathcal{A}_t(\xi)\theta_t(\xi)$ при $\Delta t\to+0$, для всіх $t\in(0;T]$.

Далі, нехай $\Delta t<0$, $|\Delta t|<t/2$, тоді

$$\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}\theta_{(t+\varepsilon\Delta t)}-\mathcal{A}_t\theta_t=(\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}\theta(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,t/2)-\mathcal{A}_t\theta(t;\cdot,t/2))\theta_{t/2}.$$

Звідси, за аналогією з попереднім випадком, одержуємо, що

$$\hat{\theta}_{\Delta t}(t,\xi)\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}\mathcal{A}_t(\xi)\theta_t(\xi), \qquad t\in(0;T],$$

рівномірно щодо ξ на кожному компакті $\mathbb{K}$ з $\mathbb{C}^n$.

Доведемо тепер, що кожний елемент матриці $\hat{\theta}_{\Delta t}$ рівномірно обмежений у просторі $\Psi = \overset{r}{W}{}_{\Omega}^{M}$ щодо Δt (для достатньо малих $|\Delta t|$). Дійсно,

$$\begin{aligned} \|\hat{\theta}_{\Delta t}(t,\cdot)\| &\le m\|\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}(\xi)\| \, \|\theta_{(t+\varepsilon\Delta t)}(\xi)\| \\ &\le mc(Q^{+}(\overline{\delta_1},\overline{\delta_1};\xi)+c^0)\exp\{((t+\varepsilon\Delta t)/4)(Q^{-}(\delta_1^*,\delta_2^0;\xi)+g^*)\} \\ &\le c_1\exp\{Q^{-}(\delta_1^*,\delta_2^0;\xi)+g'\}, \\ &\quad c_1\ne c_1(\Delta t),\ \delta_i\ne\delta_i(\Delta t),\ i\in\mathbb{N}_2,\ g'\ne g'(\Delta t), \end{aligned}$$

(тут враховано властивості елементів матриці $\mathcal{A}_t$, твердження леми 2.2, а також те, що $(t+\varepsilon\Delta t)\in[t/2;3t/2]$ при $|\Delta t|<t/2$).

Зазначена обмеженість матриці $\hat{\theta}_{\Delta t}$ у випадку, коли $\Psi = \overset{r}{W}{}_{\Omega}$ перевіряється аналогічно. $\square$

Зважаючи на те, що обернений оператор Фур'є–Бесселя F_B^{-1} є неперервним у просторі Ψ, з твердження леми 2.3 дістаємо такий наслідок.

Наслідок 2.2. $F_B^{-1}[\partial_t\theta_t(\cdot)] = \partial_t F_B^{-1}[\theta_t(\cdot)],\ \ t\in(0;T]$.

Лема 2.4.
$$\theta_t(\cdot)\varphi(\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\boldsymbol{\Psi}} \varphi(\cdot), \qquad \varphi\in\boldsymbol{\Psi}.$$

Доведення. Достатньо встановити виконання таких умов: 1) $\theta_t(\xi) \xrightarrow[t\to+0]{} E$ рівномірно щодо ξ на кожному компакті $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}^n$; 2) обмеженість вектор-функції $\theta_t\varphi$ за t для достатньо малих $t>0$ у класі $\boldsymbol{\Psi}$ при кожному $\varphi\in\boldsymbol{\Psi}$.

Зазначимо, що умова 2) стає очевидною, якщо врахувати оцінку (2.7) матриціанта θ, а також те, що компоненти вектора φ належать до простору Ψ.

Переконаємося у виконанні умови 1). Для цього скористаємося структурою (2.8) матриціанта $\theta_t(\cdot)$. Відомо [36], що матричний ряд (2.8) збігається абсолютно й рівномірно щодо $(t;\xi)$ на кожній множині вигляду $[a,b]\times\mathbb{K}$, де $[a,b]\subset(0;T]$, а $\mathbb{K}$ — компакт із $\mathbb{C}^n$. Звідси вже, зваживши на вигляд кожного доданка ряду (2.8) (починаючи з другого) та властивості елементів матриці $\mathcal{A}_t$, дістанемо виконання умови 1). $\square$

Одержані властивості матриціанта θ системи (2.1) дозволяють сформулювати таке твердження про коректну розв'язність задачі Коші (1.4).

Теорема 2.1. *Нехай елемент* f *з* $\widetilde{\mathbf{\Psi}}'$ *такий, що* $F_B[f]$ — *мультиплікатор у класі* $\mathbf{\Psi}$*. Тоді для задачі Коші* (1.4) *існує єдиний розв'язок* u*, який неперервно залежить від початкових даних і такий, що для всіх* t *з* $(0;T]$*:*

1) $u(t,\cdot) \in \widetilde{\mathbf{\Psi}}$;

2) $F_B[\partial_t u(t,\cdot)] = \partial_t F_B[u(t,\cdot)]$;

3) $u(t,\cdot) = G_t(\cdot) * f$*, де* $G_t(\cdot) = F_B^{-1}[\theta_t(\xi)](t,\cdot)$*, а* $p * g = \langle g, T^{\xi}_{x,\nu} p\rangle = \big(\sum_{j=1}^m \langle g_j, T^{\xi}_{x,\nu} p_{ij}\rangle\big)_{i=1}^m$, $p \in \mathrm{P}(\widetilde{\mathbf{\Psi}})$, $g \in \mathbf{\Psi}'$.

Доведення. Оскільки нас цікавлять розв'язки системи (1.4), які при кожному фіксованому t з $(0;T]$ є елементами простору $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$ і по t задовольняють умову 2) даної теореми, то зваживши на те, що відображення $F_B(F_B^{-1}) : \tilde{\Psi} \to \Psi$ є взаємно однозначним і неперервним, одержуємо рівносильність системи (1.4) з системою

$$\partial_t V(t,\xi) = (\mathcal{A}_t V)(t,\xi), \qquad (t,\xi) \in \Pi. \tag{2.9}$$

Причому початкова умова (1.7) виконуватиметься тоді й лише тоді, коли

$$V(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\mathbf{\Psi}'} F_B[f] \tag{2.10}$$

(див. означення перетворення Фур'є–Бесселя узагальненої функції).

Отже, питання про коректну розв'язність задачі Коші (1.4) у просторі $\widetilde{\mathbf{\Psi}}'$ початкових даних рівносильне питанню про коректну розв'язність задачі Коші (2.9), (2.10) у просторі $\mathbf{\Psi}'$ початкових даних (щодо крайових умов (1.6), то вони завжди виконуватимуться в цьому випадку, оскільки $j'_{\nu_l}(0) = 0$, $l \in \mathbb{N}_r$).

Як уже зазначалося, система (2.9) є лінійною системою звичайних диференціальних рівнянь з параметром, загальний розв'язок якої має вигляд

$$V(t,\xi) = \theta_t(\xi) C(\xi), \qquad (t,\xi) \in \Pi. \tag{2.11}$$

З початкової умови (2.10), зваживши на (2.11) та на твердження леми 2.4, одержимо

$$\langle v_j(t,\cdot), \varphi_j\rangle = \sum_{k=1}^m \langle c_k, \overline{\theta_t^{jk}(\cdot)}\varphi_j\rangle \xrightarrow[t\to+0]{} \langle c_j, \varphi_j\rangle = \langle F_B[f_j], \varphi_j\rangle,$$

$$\varphi_j \in \Psi,\ j \in \mathbb{N}_m,$$

(тут $\overline{(\cdot)}$ позначає комплексну спряженість, а $C = (c_k)_{k=1}^m$, $\theta_t = (\theta_t^{jk})_{j=1,k=1}^{m,m}$).

Отже, $V(t,\cdot)=\theta_t(\cdot)F_B[f]$, $t\in(0;T]$, — розв'язок задачі Коші (2.9), (2.10). Оскільки $F_B[f]$ — мультиплікатор у $\mathbf{\Psi}$, а матрицант $\theta_t(\cdot)$ при кожному t з $(0;T]$ належить до $\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})$ (див. наслідок 2.1), то $V(t,\cdot)\in\mathbf{\Psi}$, $t\in(0;T]$.

Доведемо тепер, що знайдений розв'язок єдиний в просторі $\mathbf{\Psi}$. Для цього припустимо, що в цьому просторі існує ще один розв'язок V_1 задачі Коші (2.9), (2.10). Виходячи зі структури загального розв'язку (2.11) системи (2.9), маємо

$$V_1(t,\cdot)=\theta_t(\cdot)C_1(\cdot),\qquad t\in(0;T].$$

Оскільки $V_1(t,\cdot)\in\mathbf{\Psi}$, $t\in(0;T]$, то компоненти вектора $C_1(\cdot)$ — цілі аналітичні функції на $\mathbb{C}^n$, які є мультиплікаторами в Ψ. Розглянемо вектор-функцію $V_2(t,\cdot)=V_1(t,\cdot)-V(t,\cdot)$, $t\in(0;T]$, яка також є розв'язком системи (2.9) і, як неважко переконатися, задовольняє нульову початкову умову: $V_2(t,\cdot)\xrightarrow[t\to+0]{\mathbf{\Psi}}0$. З цієї умови дістанемо, що

$$\langle(C_1-F_B[f]),\varphi\rangle=\langle 0,\varphi\rangle,\qquad \varphi\in\mathbf{\Psi}. \tag{2.12}$$

Зваживши на те, що $\theta_t^{jj}(\xi)\xrightarrow[t\to+0]{}1$ рівномірно щодо ξ на кожному компакті $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}^n$ (див. доведення леми 2.4), прийдемо до існування такого (достатньо малого) $t_0>0$, що $\theta_{t_0}^{jj}(\xi)\neq 0$, $\xi\in\mathbb{C}^n$, $j\in\mathbb{N}_m$. Поклавши тепер $\varphi_j=\overline{(c_{1j}-F_B[f_j])}(\theta_{t_0}^{jj}(\cdot))^2$, з (2.12) прийдемо до таких рівностей:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}}\left(\overline{(c_{1j}-F_B[f_j])}\theta_t^{jj}(\xi)\right)^2\left(\prod_{k=1}^r\xi_k^{2\nu_k+1}\right)d\xi=0,\qquad j\in\mathbb{N}_m.$$

Звідси вже, врахувавши гладкість $C_1(\cdot)$ і $F_B[f](\cdot)$, одержуємо рівність цих вектор-функцій на $\mathbb{R}^n_{+,r}$. Таким чином, $V_1(t,\xi)\equiv V(t,\xi)$, $(t,\xi)\in\Pi$. Це й доводить єдиність розв'язку задачі Коші (2.9), (2.10) у просторі $\mathbf{\Psi}$.

Щодо умови 2) цієї теореми, то виконання її стає очевидним, якщо взяти до уваги наслідок 2.2.

Нарешті, з огляду на те, що

$$u(t,\cdot)=F_B^{-1}[V](t,\cdot)=F_B^{-1}[\theta_t(\xi)F_B[f]](t,\cdot),\qquad t\in(0;T],$$

а також на аналог твердження теореми 1 з [38], одержимо, що $u(t,\cdot)=G_t(\cdot)*f$, $t\in(0;T]$.

Розв'язок u задачі Коші (1.4) неперервно залежить від початкових даних задачі, оскільки відповідний розв'язок V має таку властивість, а F_B^{-1} є неперервним оператором з Ψ у $\widetilde{\Psi}$. $\square$

Нехай далі для (1.4), крім умови (1.5), виконується ще й така умова:

$$\begin{aligned}&\exists\,\{\delta_1^-;\delta_2^-\}\subset(0;+\infty)\ \exists\,c^-\in\mathbb{R}\ \forall\,t\in[0;T]\forall\,\xi\in\mathbb{C}^n:\\&\qquad\min_{j\in\mathbb{N}_m}\mathrm{Re}\lambda_j(t,\xi)\ge-(Q^+(\delta_1^-,\delta_2^-;\xi)+c^-).\end{aligned}\tag{2.13}$$

Прикладом такої системи знову можуть бути $\overrightarrow{2B}$-параболічні за Ейдельманом сингулярні системи рівнянь із частинними похідними.

Виявляється, що в цьому випадку умови коректної розв'язності задачі Коші (1.4), сформульовані в теоремі 2.1, є не лише достатніми, але й необхідними. Для доведення цього факту нам знадобляться наступні допоміжні твердження.

Лема 2.5. *Нехай $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$ — обернена матриця до матриціанта $\theta(t;\cdot,\tau)$ системи (2.1) при $\tau\in[0;T)$ і $t\in(\tau;T]$. Тоді існують додатні сталі c, δ_1, δ_2 і g такі, що для всіх $t\in(0;T]$ і $\xi\in\mathbb{C}^n$*

$$\|\theta_t^{-1}(\xi)\|\le c\exp\{t(Q^+(\delta_1,\delta_2;\xi)+g)\},\qquad\theta_t^{-1}(\cdot)=\theta^{-1}(t;\cdot,0).$$

Доведення. Перш за все зазначимо, що $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)=\theta(\tau;\cdot,t)$, $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0,T)$. Дійсно, згідно з відповідними властивостями матриціанта [36]

$$E=\theta(\tau;\cdot,\tau)=\theta(\tau;\cdot,t)\theta(t;\cdot;\tau),\qquad t\in(\tau;T].$$

Отже, $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$ — нормований розв'язок такої задачі Коші:

$$\begin{aligned}&\partial_\tau\theta^{-1}(t;\xi,\tau)=\mathcal{A}_\tau(\xi)\theta^{-1}(t;\xi,\tau),\qquad(\tau,\xi)\in[0;t)\times\mathbb{C}^n,\\&\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)|_{\tau=t}=E.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Далі діятимемо так, як і при доведенні леми 1.2. Зафіксуємо довільне τ^* з $[0;t]$ і запишемо систему з (2.14) у вигляді

$$\partial_\tau\theta^{-1}=\mathcal{A}_{\tau^*}(\xi)\theta^{-1}+q(\tau,\xi),$$

де $q(\tau,\cdot)=(\mathcal{A}_\tau(\cdot)-\mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot))\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$. Тоді

$$\theta^{-1}(t;\cdot,\tau)=e^{(\tau-t)\mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)}+\int_t^\tau e^{(\tau-\sigma)\mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)}q(\sigma,\cdot)\,d\sigma,$$

причому правильні такі нерівності:

$$\|e^{(\tau-t)\mathcal{A}_{\tau^*}(\xi)}\|\le c\,e^{(\tau-t)\min_{j\in\mathbb{N}_m}\mathrm{Re}\lambda_j(\tau^*,\xi)}\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}(2(t-\tau)\|\mathcal{A}_{\tau^*}(\xi)\|)^j\right)$$

$$\leq c\left(1 + 2^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}((t-\tau)(Q^+(\overline{\delta_1}, \overline{\delta_2}; \xi) + c^0))^j\right)$$
$$\times \exp\{(t-\tau)[Q^+(\delta_1^-, \delta_2^-; \xi) + c^-]\}$$
$$\leq c2^m m! \exp\{(t-\tau)[Q^+(\delta_1^- + \overline{\delta_1}, \delta_2^- + \overline{\delta_2}; \xi) + c^- + c^0]\}, \quad \tau \in [0; t). \tag{2.15}$$

Звідси вже, зваживши на те, що при $\tau^* = t$ для всіх τ з $[t-\varepsilon, t)$, $\varepsilon \in (0;1)$, і $\xi \in \mathbb{C}^n$

$$\|q(\tau, \xi)\| \leq m\nu(\varepsilon)(Q^+(1, \delta^0; \xi) + c_1^0)\|\theta^{-1}(t; \xi, \tau)\|,$$

дістанемо

$$\|\theta^{-1}(t; \xi, \tau)\| \exp\{(\tau - t)(Q^+(\delta_1, \delta_2; \xi) + c^+)\}$$
$$\leq c + cm^2\nu(\varepsilon)(Q^+(1, \delta^0; \xi) + c_1^0)$$
$$\times \int_t^\tau \exp\{(\sigma - t)(Q^+(\delta_1, \delta_2; \xi) + c^+)\}\|\theta^{-1}(t; \xi, \sigma)\| \, d\sigma,$$

де c, δ_1, δ_2 — додатні сталі, не залежні від t, τ, ξ і ε.

Тепер скористаємося аналогом леми 2 з [37, с. 300] і прийдемо до нерівностей

$$\|\theta^{-1}(t; \xi, \tau)\| \exp\{(\tau - t)(Q^+(\delta_1, \delta_2; \xi) + c^+)\}$$
$$\leq c + (cm)^2\nu(\varepsilon)(Q^+(1, \delta^0; \xi) + c_1^0)$$
$$\times (t-\tau)\exp\{(t-\tau)cm^2\nu(\varepsilon)(Q^+(\delta_1, \delta_2; \xi) + c_1^0)\}$$
$$\leq c(1 + \exp\{(t-\tau)2cm^2\nu(\varepsilon)(Q^+(1, \delta^0; \xi) + c_1^0)\}),$$

або, що те ж саме,

$$\|\theta^{-1}(t; \xi, \tau)\| \leq c\exp\{(\tau - t)(1/2 + 3cm^2\nu(\varepsilon))(Q^+(\delta_3, \delta_4; \xi) + c_2)\},$$

де $\delta_3 = \max\{1; 2\delta_1\}$, $\delta_4 = \max\{\delta_2; 2\delta^0\}$, $c_2 = \max\{c_1^0; 2c^+\}$, $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\tau \in [t-\varepsilon, t)$, $t \in (0; T]$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ так, щоб $t - \varepsilon \geq 0$ і виконувалася нерівність $6cm^2\nu(\varepsilon) \leq 1$, тоді для всіх $t \in (0; T]$, $\tau \in [t-\varepsilon, t)$ і $\xi \in \mathbb{C}^n$ маємо

$$\|\theta^{-1}(t; \xi, \tau)\| \leq c\exp\{(\tau - t)(Q^+(\delta_3, \delta_4; \xi) + c_2)\}, \tag{2.16}$$

де c, δ_3, δ_4 і c_2 — додатні сталі, не залежні від t, τ, ξ і ε.

На завершення зазначимо, що міркуючи аналогічно тому, як і при обґрунтуванні твердження леми 2.2, за допомогою рівності $\theta^{-1}(t; \cdot, \tau) = \theta(\tau; \cdot, t)$, оцінку (2.16) можна легко поширити по змінній τ на весь проміжок $[0, t)$ для кожного фіксованого t з $(0, T]$. $\square$

Лема 2.6. *Для кожного елемента* $P(\cdot)$ *з* $\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})$ *існує число* $t_0 \in (0;1)$ *таке, що для всіх* $t \in (0;t_0)$ *добуток* $P(\cdot)\theta_t^{-1}(\cdot)$ *належить до класу* $\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})$.

Доведення. Нехай спочатку $\Psi = \overset{r}{W}{}_{\Omega}^{M}$. Оскільки матриця P належить до $\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})$, то

$$\exists\,\{c_1,\delta_3,\delta_4\}\subset(0;+\infty)\;\forall\,\xi\in\mathbb{C}^n:\;\|P(\xi)\|\le c_1\exp\{Q^-(\delta_3,\delta_4;\xi)\}.$$

Звідси, зваживши на твердження леми 2.5 та на властивості $\Omega(\cdot)$ й $M(\cdot)$, одержимо

$$\begin{aligned}&\|P(\xi)\theta_t^{-1}(\xi))\|\\ &\le m^2cc_1e^{t\cdot g}\exp\left\{\sum_{j=1}^{m}(t\Omega_j(\delta_1\mathrm{Re}\xi_j)-\Omega_j(\delta_3\mathrm{Re}\xi_j)+M_j((\delta_2+\delta_4)\mathrm{Im}\xi_j))\right\}\\ &\le m^2cc_1e^{g-g_2(\delta^+)}\exp\left\{\sum_{j=1}^{m}((t-g_1(\delta^+))\Omega_j(\delta_1\mathrm{Re}\xi_j)+M_j((\delta_2+\delta_4)\mathrm{Im}\xi_j))\right\},\\ &\qquad\qquad\delta^+=\min\{1/2;\delta_3/\delta_1\},\; t\in(0;1),\;\xi\in\mathbb{C}^n.\end{aligned}$$

Отже, для всіх $t<g_1(\delta^+)$ з інтервалу $(0;T]$ і $\xi\in\mathbb{C}^n$ добуток $P(\xi)\theta_t^{-1}(\xi)$ належить до $\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})$.

Випадок $\Psi = \overset{r}{W}{}_{\Omega}$ реалізується аналогічно. □

Теорема 2.2 (критерій мультиплікатора). *Для того, щоб вектор-функція* $\varphi(\cdot)$ *була мультиплікатором у* $\mathbf{\Psi}$, *необхідно й достатньо, щоб для кожного досить малого* $t \in (0;1)$ *добуток* $\theta_t(\cdot)\varphi$ *належав до простору* $\mathbf{\Psi}$.

Доведення. Необхідність очевидна, оскільки матрицант $\theta_t(\cdot)$ належить до $\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})$ для всіх $t \in (0;T]$ (див. наслідок 2.1).

Доведемо достатність. Для цього зафіксуємо довільно матрицю $P(\cdot)$ з $\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})$ і розглянемо добуток $P\varphi$, який подамо в такому вигляді:

$$P(\cdot)\varphi(\cdot)=(P(\cdot)\theta_t^{-1}(\cdot))(\theta_t(\cdot)\varphi(\cdot)),\qquad t\in(0;1).\tag{2.17}$$

На підставі твердження леми 2.6 одержуємо, що $(P\varphi)(\cdot)\in\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})$. Отже, умова 1) з означення мультиплікатора в $\mathbf{\Psi}$ виконується (див. п. 1).

Переконаємося тепер у виконанні умови 2) з цього означення. Нехай послідовність $\{P;P_\nu,\nu\ge1\}\subset\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})$ така, що $P_\nu \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})} P$. Тоді досить довести, що $P_\nu\varphi \xrightarrow[\nu\to+\infty]{\mathbf{\Psi}} P\varphi$, тобто: а) $(P_\nu(\xi)-P(\xi))\varphi(\xi) \xrightarrow[\nu\to+\infty]{}$

0 рівномірно щодо ξ на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}^n$; б) послідовність $\{(P_\nu\varphi)(\cdot),\, \nu \geq 1\}$ обмежена в $\mathbf{\Psi}$.

Зазначимо, що умова а) одержується безпосередньо зі збіжності $\{P_\nu, \nu \geq 1\}$ до P у класі $\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})$ та з рівномірної обмеженості φ на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}^n$. Щодо умови б), то вона також стає очевидною, якщо зважити на рівність (2.17), лему 2.6 та збіжність $\{P_\nu, \nu \geq 1\}$ у $\mathrm{P}(\mathbf{\Psi})$. □

Основний результат цього пункту сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 2.3. *Якщо для системи* (1.4)*, крім умови* (1.5)*, виконується умова* (2.13)*, то для того, щоб відповідна задача Коші* (1.4) *була коректно розв'язною і:* 1) *її розв'язок* $u(t,\cdot)$ *при кожному фіксованому* $t \in (0;T]$ *належав до простору* $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$*;* 2) $\partial_t F_B[u] = F_B[\partial_t u]$, $t \in (0;T]$*, необхідно й достатньо, щоб* $F_B[f]$ *був мультиплікатором у* $\mathbf{\Psi}$*. При цьому завжди виконуватиметься рівність*

$$u(t,x) = G_t(x) * f, \quad (t,x) \in \Pi.$$

Доведення. Достатність одержується з теореми 2.1. Доведемо необхідність. Як уже зазначалося при доведенні теореми 2.1, питання про коректну розв'язність задачі Коші (1.4) у просторі $\widetilde{\mathbf{\Psi}}'$ початкових даних рівносильне питанню про коректну розв'язність задачі Коші (2.9), (2.10) у просторі початкових даних $\mathbf{\Psi}'$. Тому достатньо встановити, що якщо задача Коші (2.9), (2.10) коректно розв'язна, то $F_B[f]$ — мультиплікатор у $\mathbf{\Psi}$.

Оскільки $V(t,\cdot) = \theta_t(\cdot)C(\cdot) \in \mathbf{\Psi}$ при кожному фіксованому t з $(0;T]$ (див. (2.11)), то згідно з теоремою 2.2, функція $C(\cdot)$ — мультиплікатор у $\mathbf{\Psi}$. Зважаючи на твердження леми 2.4, з умови (2.10) одержуємо, що

$$\langle C(\cdot), \varphi(\cdot)\rangle = \langle F_B[f](\cdot), \varphi(\cdot)\rangle, \qquad \varphi \in \mathbf{\Psi}.$$

Звідси, на підставі єдиності розв'язку задачі Коші (2.9), (2.10), приходимо до того, що $F_B[f]$ — регулярний вектор-функціонал, породжений мультиплікатором у просторі $\mathbf{\Psi}$. □

Наслідок 2.3. *Сукупність усіх згортувачів у класі* $\widetilde{\mathbf{\Psi}}$ *є максимальним класом початкових даних, при яких відповідна задача Коші для системи* (1.4) *коректно розв'язна, причому компоненти її розв'язку мають такі самі властивості за просторовою змінною, що й елементи ф.м.р. цієї системи.*

3. Класичний випадок системи (1.4)

Зафіксуємо довільно вектор $\overrightarrow{B} = \{B_i \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}_n\}$ і розглянемо псевдодиференціальний оператор $\mathbf{B}$ з таким матричним символом:

$$\mathcal{A}_t(\xi) = \left(a_{lj}(t,\xi) = \sum_{r_{\overrightarrow{B}}(q)\le 1} b_q^{lj}(t)\left(\prod_{j=1}^{r}(-\xi_j^2)^{q_j}\right)\left(\prod_{j=r+1}^{n}(i\xi_j)^{q_j}\right)\right)_{l=1,j=1}^{m,m},$$

де $b_q^{lj}(\cdot)$ — неперервні на $[0;T]$ функції, а $r_{\overrightarrow{B}}(q) = \sum_{j=1}^{r} q_j/B_j + \sum_{j=r+1}^{n} q_j/(2B_j)$, $q \in \mathbb{Z}_+^n$. Елементи матриці $\mathcal{A}_t(\cdot)$ належать до класу $\mathcal{L}_{\Omega,r}^M$ з $\Omega(\xi) = \{\xi_j^{2B_j}, j \in \mathbb{N}_n\}$, $M(\eta) = \{\eta_j^{2B_j}, j \in \mathbb{N}_n\}$. Зазначимо, що з такими вектор-функціями Ω й M простір W_Ω^M збігається з простором $S_\alpha^\beta, \alpha = \{1/(2B_j), j \in \mathbb{N}_n\}, \beta = \{1 - 1/(2B_j), j \in \mathbb{N}_n\}$ (тобто з простором типу S) [16]. Надалі при таких Ω, M простір $\overset{r}{W}{}_\Omega^M$ позначатимемо $\overset{r}{S}{}_\alpha^\beta$.

У цьому випадку система (1.4) набуде вигляду

$$\partial_t u_j(t,x) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{r_{\overrightarrow{B}}(q)\le 1} b_q^{jl}(t) B_{\nu,x'}^{q'} D_{x''}^{q''} u_l(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi,\ j \in \mathbb{N}_m. \tag{3.1}$$

Вважатимемо, що для цієї системи виконується відповідна умова (1.5). Ця умова гарантує рівномірну щодо t $2\overrightarrow{B}$-параболічність (у сенсі Шилова) системи (3.1), тобто:

$$\exists\,\delta > 0\ \forall\, t \in (0;T]\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n : \max_{j\in\mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\lambda_j(t,x) \le -\delta \sum_{j=1}^{n} x_j^{2B_j} \tag{3.2}$$

(тут λ_j, $j \in \mathbb{N}_m$, — власні числа матриці $\mathcal{A}_t(\cdot)$). З'ясуємо, чи з (3.2) випливатиме (1.5). Розглянемо спочатку випадок незалежності матриці $\mathcal{A}_t(\cdot)$ від змінної t: $\mathcal{A}_t(\cdot) \equiv \mathcal{A}(\cdot)$. Як зазначено фактично у [18, с. 133], умова (3.2) виконуватиметься для (3.1) тоді й тільки тоді, коли

$$\|\theta_t(x)\| \le c\left(1 + \sum_{j=1}^{n} x_j^{2B_j}\right)^{m-1} \exp\left\{-at\sum_{j=1}^{n} x_j^{2B_j}\right\},$$
$$c > 0,\ a > 0,\ (t,x) \in \Pi. \tag{3.3}$$

Крім цього, є правильною оцінка

$$\|\theta_t(z)\| \le c_1 \exp\left\{bt\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^{2B_j} + y_j^{2B_j}\right)\right\}, \qquad c_1 > 0,\ b > 0, \tag{3.4}$$

для $t \in (0,T]$ і $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$. Звідси, з допомогою теорем типу Фрагмена–Ліндельофа [16, с. 247–249, 285], одержуємо, що

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, t \in (0;T]\ \exists\, c > 0\ \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}^n :$$
$$\|\theta_t(z)\| \le c \exp\Big\{ -\delta t \sum_{j=1}^{n} \big(x_j^{2B_j} - y_j^{2B_j}\big)\Big\}. \tag{3.5}$$

Тоді, скориставшись нерівністю [18, с. 77]

$$e^{t(\max\limits_{j\in\mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\lambda_j(t,z))} \le \|e^{t\mathcal{A}(z)}\|, \qquad t \in (0,T],\ z \in \mathbb{C}^n,$$

прийдемо до умови (1.5).

Випадок залежності матриці $\mathcal{A}_t(\cdot)$ від t (у вказаному сенсі) реалізується складно. Тому тут зазначимо лише еквівалентність умов (1.5) і (3.2) у тому розумінні, що кожна з них однаково характеризує поведінку матриціанта θ_t у комплексному просторі $\mathbb{C}^n$. Дійсно, згідно з твердженням леми 2.2, для матриціанта θ_t двоїстої за Фур'є системи до (3.1), для якої виконується умова (1.5), справджується оцінка типу (3.5). Проте таку оцінку легко одержати й завдяки зазначеним теоремам типу Фрагмена–Ліндельофа, виходячи лише з умови (3.2).

Зваживши на те, що оцінка (3.5) разом із властивостями елементів класу $\mathcal{L}^M_{\Omega,r}([0,T])$ є достатніми для виконання тверджень лем 2.2–2.4, то твердження теореми 2.1 виконуватиметься й у випадку задачі Коші для рівномірно щодо t $\overrightarrow{2B}$-параболічної (у розумінні Шилова) системи (3.1).

Припустимо тепер, що для (3.1) виконується ще й умова (2.13) при зазначених Ω та M. Тоді звуження (2.13) на $\mathbb{R}^n$ буде таким:

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, t \in (0;T]\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n : \min_{j\in\mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\lambda_j(t,x) \ge -\delta \sum_{j=1}^{n} x_j^{2B_j}. \tag{3.6}$$

Як і в попередньому випадку, використовуючи вже θ_t^{-1}, переконуємося, що умова (3.6) забезпечує виконання твердження леми 6, а при незалежності коефіцієнтів $b_q^{lj}(t)$ системи (3.1) від змінної t — у рівносильності умов (2.13) і (3.6) (тут істотним є зображення $\theta_t^{-1}(\cdot) = e^{-t\mathcal{A}(\cdot)}$).

Слід також зазначити, що класична техніка дослідження ф.м.р. параболічних систем (з коефіцієнтами, не залежними від просторової змінної) [37], придатна й для дослідження θ^{-1} (оскільки $\theta^{-1}(t;\cdot,\tau) = \theta(\tau;\cdot,t)$ — нормований розв'язок відповідної системи (2.14)), причому вже для доведення леми 2.5 досить вимагати виконання умови (3.6) лише для $\lambda_j = \tilde{\lambda}_j$ — власних чисел матриці

$$\mathcal{A}_t^0(x) = \left(\sum_{r_{\overrightarrow{B}}(q)=1} b_q^{lj}(t) \left(\prod_{j=1}^{r} (-x_j^2)^{q_j} \right) \left(\prod_{j=r+1}^{n} (ix_j)^{q_j} \right) \right)_{l,j=1}^{m}.$$

Ця умова завжди виконується для $\overrightarrow{2B}$-параболічних (у розумінні Ейдельмана) систем (3.1). Тому, з огляду на доведення теореми 2.3, приходимо до висновку, що твердження цієї теореми завжди справджуватиметься для $\overrightarrow{2B}$-параболічної (у сенсі Ейдельмана) системи (3.1), а також, коли виконуватимуться одночасно умови (3.2) і (3.6).

Правильні такі допоміжні твердження.

Лема 3.1. *Нехай* $f \in (\overset{r}{W}\,{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}})'$, $\varphi \in \overset{r}{W}\,{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}}$, *а* $\rho(\cdot)=(f*\varphi)(\cdot)$. *Тоді функція* $\rho(\cdot)$ *— нескінченно диференційовна на* $\mathbb{R}^n_{+,r}$, *причому правильна така рівність:*

$$(B^{q'}_{\nu,x'} D^{q''}_{x''}\rho)(x) = \langle f_\xi, (B^{q'}_{\nu,x'} D^{q''}_{x''} T^\xi_{x,\nu}\varphi)(x,\xi)\rangle,$$
$$q = (q', q'') \in \mathbb{Z}^n_+,\ x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n_{+,r}. \quad (3.7)$$

Доведення. Нескінченна диференційовність на $\mathbb{R}^n_{+,r}$ функції $\rho(\cdot)$ безпосередньо випливає з означення згортки, нескінченної диференційовності в просторі $\overset{r}{W}\,{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}}$ оператора комбінованого зсуву $T^\xi_{x,\nu}$ [16, 32] та неперервності функціонала f. Звідси, зокрема, зваживши на структуру оператора Бесселя й на лінійність функціонала f одержуємо, що

$$B^{q'}_{\nu,x'} D^{q''}_{x''}\langle f_\xi, T^\xi_{x,\nu}\varphi\rangle = \langle f_\xi, (B^{q'}_{\nu,x'} D^{q''}_{x''} T^\xi_{x,\nu}\varphi)(x,\xi)\rangle, \quad (3.8)$$

для всіх $x_j \neq 0$ при $j \in \mathbb{N}_r$ таких, що відповідні $q_j \neq 0$ (тобто — виконання рівності (3.7) для зазначених x).

Отже, для доведення рівності (3.7) в цілому, достатньо переконатися в її виконанні, наприклад, при $x_1 = 0$ й $q_1 = 1$ (решта випадків легко реалізується аналогічно завдяки індукції).

Як уже зазначалося в п.1, оператор комбінованого зсуву $T^\xi_{x,\nu}$ та оператор $B^{q'}_{\nu,x'} D^{q''}_{x''}$ є неперервними в $\overset{r}{W}\,{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}}$, тому

$$B_{\nu_1,x_1} D^{q''}_{x''} T^\xi_{x,\nu}\varphi\big|_{x_1=0} = \lim_{x_1\to 0}(B_{\nu_1,x_1} D^{q''}_{x''} T^\xi_{x,\nu}\varphi), \qquad \varphi \in \overset{r}{W}\,{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}}. \quad (3.9)$$

Оскільки

$$D^{q''}_{x''} T^\xi_{x,\nu}\varphi(x) = T^\xi_{x,\nu} D^{q''}_{x''}\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_{+,r},$$

то, поклавши $\eta(\cdot) = (D^{q''}_{x''}\varphi)(\cdot)$ і скориставшись рівністю (3.9), одержимо, що при $x_1 = 0$

$$\left\langle F_B[f_\xi](\sigma), -\sigma_1^2\left(\prod_{l=2}^{r} j_{\nu_l}(x_l\sigma_l)\right)e^{i(x'',\sigma'')}F_B[\eta](\sigma)\right\rangle$$
$$= \langle f_\xi, B_{\nu_1,0}T^{\xi}_{x,\nu}\eta(x)\rangle = \langle f_\xi, \lim_{x_1\to 0}(B_{\nu_1,x_1}T^{\xi}_{x,\nu}\eta(x))\rangle$$
$$= \langle F_B[f_\xi](\sigma), \lim_{x_1\to 0} F_B[B_{\nu_1,x_1}T^{\xi}_{x,\nu}\eta(x)](\sigma,x)\rangle$$
$$= \left\langle F_B[f_\xi](\sigma), \lim_{x_1\to 0}\left(-\sigma_1^2\left(\prod_{l=1}^{r} j_{\nu_l}(x_l\sigma_l)\right)e^{i(x'',\sigma'')}F_B[\eta](\sigma)\right)\right\rangle$$

(тут ми скористалися означенням перетворення Фур'є-Бесселя узагальненої функції, неперервністю оператора $F_B[\cdot]$ у просторах типу $\overset{r}{W}$, а також тим, що $j_{\nu_1}(0)=1$).

Доведемо тепер, що при кожних фіксованих $x''\in\mathbb{R}^{n-r}$ та $x_j\geq 0$, $j\in\{2;\dots;r\}$,

$$\mathcal{R}_x(\sigma) = -\sigma_1^2\left(\prod_{l=1}^{r} j_{\nu_l}(x_l\sigma_l)\right)e^{i(x'',\sigma'')}F_B[\eta](\sigma) \xrightarrow[x_1\to 0]{\overset{r}{W}{}^{M}_{\Omega}} \mathcal{R}_{\hat{x}}(\sigma),$$

де $\hat{x}=(0,x_2,\dots,x_n)$. Для цього, згідно з означенням збіжності в $\overset{r}{W}{}^{M}_{\Omega}$, досить встановити виконання таких умов: а) $\mathcal{R}_x(\sigma) \xrightarrow[x_1\to 0]{} \mathcal{R}_{\hat{x}}(\sigma)$ рівномірно щодо σ із будь-якого компакта $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}^n$ при фіксованих $x''\in\mathbb{R}^{n-r}$ і $x_j\geq 0$, $j\in\{2;\dots;r\}$; б) $\forall\, x_j\geq 0$, $j\in\{2;\dots;r\}$, $\forall\, x''\in\mathbb{R}^{n-r}$ $\exists\{\delta_1,\delta_2,c\}\subset(0;+\infty)$ $\forall\, x_1\in[0;1)$ $\forall\,\sigma\in\mathbb{C}^n$: $|\mathcal{R}_x(\sigma)|\leq c\exp\{Q^-(\delta_1,\delta_2;\sigma)\}$.

Зазначимо, що

$$\mathcal{R}_{\hat{x}}(\sigma) = -\sigma_1^2 F_B[T^{\xi}_{\hat{x},\nu}\eta](\hat{x},\sigma)\in\overset{r}{W}{}^{M}_{\Omega}, \qquad \hat{x}\in\mathbb{R}^n_{+,r}, \tag{3.10}$$

(як функція змінної σ), тому при кожному фіксованому $\hat{x}$ функція $\mathcal{R}_{\hat{x}}(\sigma)$ обмежена по σ за модулем на кожному компакті $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}^n$. Таким чином, доведення умови а) звелося до доведення рівномірної збіжності $|j_{\nu_1}(x_1\sigma_1)-j_{\nu_1}(0)| \xrightarrow[x_1\to 0]{} 0$.

Скориставшись інтегральною формулою Пуассона для нормованої функції Бесселя

$$j_{\nu_1}(\xi) = c_{\nu_1}\int_0^{\pi/2}\cos(\xi\cos\tau)\sin^{2\nu_1}\tau\,d\tau, \qquad \nu_1>-1/2,\ \xi\in\mathbb{C},$$
$$c_{\nu_1} = 2\Gamma(\nu_1+1)/(\sqrt{\pi}\Gamma(\nu_1+1/2)), \tag{3.11}$$

дістанемо

$$|j_{\nu_1}(x_1\sigma_1)-j_{\nu_1}(0)| \le |c_{\nu_1}| \int\limits_0^{\pi/2} |\cos((x_1\sigma_1)\cos\tau)-1| \sin^{2\nu_1}\tau\, d\tau, \qquad \sigma_1 \in \mathbb{C}.$$

Далі, згідно з теоремою Лагранжа про скінченні прирости,

$$|\cos(x_1(\sigma_1\cos\tau)) - 1| = |\sin(\zeta x_1(\sigma_1\cos\tau))|\, |\sigma_1\cos\tau| x_1,$$
$$\zeta \in (0;1),\ x_1 \ge 0,\ \sigma_1 \in \mathbb{C}.$$

Звідси, врахувавши те, що

$$|\sin(\zeta x_1\sigma_1\cos\tau)| = \frac{1}{2}\left|e^{i\zeta x_1\sigma_1\cos\tau} - e^{-i\zeta x_1\sigma_1\cos\tau}\right| \le e^{|x_1|\,|\mathrm{Im}\sigma_1|} \le e^{|x_1\sigma_1|},$$

приходимо до оцінки

$$|j_{\nu_1}(x_1\sigma_1) - j_{\nu_1}(0)| \le x_1|c_{\nu_1}|\,|\sigma_1|e^{x_1|\sigma_1|} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2\nu_1}\tau\, d\tau$$
$$= x_1|c_{\nu_1}|\,|\sigma_1|(2\nu_1+1)^{-1}e^{x_1|\sigma_1|}, \qquad x_1 \ge 0,\ \sigma_1 \in \mathbb{C},$$

а відтак — і до виконання умови а).

Доведемо тепер умову б). Безпосередньо з (3.10) одержуємо, що

$$\forall\, x_j \ge 0,\ j \in \{2;\ldots;r\},\ \forall\, x'' \in \mathbb{R}^{n-r}\ \exists\, \{\delta_1,\delta_2,c_1\} \subset (0;+\infty)\ \forall\, \sigma \in \mathbb{C}^n:$$
$$\left|\sigma_1^2 \prod_{l=2}^{r} j_{\nu_l}(x_l\nu_l) e^{i(x'',\sigma'')} F_B[\eta](\sigma)\right| \le c_1 \exp\{Q^-(\delta_1,\delta_2;\sigma)\}.$$

Якщо взяти до уваги ще й оцінку

$$|j_{\nu_1}(x_1\sigma_1)| = \pi/2|c_{\nu_1}\sin^{2\nu_1}\tau_0|\,|\cos(x_1\sigma_1\cos\tau_0)|$$
$$\le \pi/2|c_{\nu_1}\sin^{2\nu_1}\tau_0|e^{|\mathrm{Im}\sigma_1|}, \qquad \sigma_1 \in \mathbb{C},\ x_1 \in [0;1],\ \tau_0 \in (0;\pi/2),$$

яка одержується фактично з формули (3.11) та теореми про середнє значення, то виконання умови б) стає очевидним.

Таким чином,

$$\langle f_\xi, B_{\nu_1,0}T^{\xi}_{x,\nu}\eta(x)\rangle$$
$$= \lim_{x_1\to 0} \left\langle F_B[f_\xi](\sigma), -\sigma_1^2\left(\prod_{l=1}^{r} j_{\nu_l}(x_l\sigma_l)\right) e^{i(x'',\sigma'')} F_B[\eta](\sigma)\right\rangle$$

$$= \lim_{x_1\to 0}\langle f_\xi, B_{\nu_1,x_1}T^{\xi}_{x,\nu}\eta(x)\rangle = \lim_{x_1\to 0} B_{\nu_1,x_1}\langle f_\xi, T^{\xi}_{x,\nu}\eta(x))\rangle$$
$$= B_{\nu,0}\langle f_\xi, T^{\xi}_{x,\nu}\eta(x)\rangle, \qquad x''\in\mathbb{R}^{n-r},\ x_j\ge 0,\ j\in\{2;\ldots;r\},$$

(тут ми скористалися рівністю (3.8)). □

Лема 3.2. *Для кожної узагальненої вектор-функції f з $(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})'$ правильна рівність*

$$\partial_t(G_t * f)(t,x) = (\partial_t G_t * f)(t,x), \qquad (t,x)\in\Pi,$$

(*тут і надалі $G_t(\cdot)$ — фундаментальна матриця розв'язків системи* (3.1)*, а $(\overset{r}{S}{}^{\alpha}_{\beta})'$ — простір, топологічно спряжений до $\overset{r}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$*).

Доведення. Виходячи з означення згортки, достатньо довести, що граничне співвідношення

$$\hat{G}_{\Delta t}(t,x) = (T^{\xi}_{x,\nu}G_{(t+\Delta t)}(x) - T^{\xi}_{x,\nu}G_t(x))/\Delta t \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} T^{\xi}_{x,\nu}\partial_t G_t(x),$$
$$(t,x)\in\Pi, \quad (3.12)$$

виконується в розумінні збіжності в класі $\mathrm{P}(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})$. Але оскільки $F_B[\overset{r}{S}{}^{\beta}_{\alpha}] = \overset{r}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$, причому перетворення Фур'є–Бесселя F_B неперервне [21], то граничне співвідношення (3.12) у класі $\mathrm{P}(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})$ рівносильне тому, що

$$F_B[\hat{G}_{\Delta t}(t,x)] \xrightarrow[\Delta t\to 0]{\mathrm{P}(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\beta}_{\alpha})} F_B[T^{\xi}_{x,\nu}\partial_t G_t(x)],$$

або, що те ж саме,

$$\left(\prod_{l=1}^{r} j_{\nu_l}(\xi_l\sigma_l)\right)e^{i(\xi'',\sigma'')}(\hat{\theta}_{\Delta t}(t,\sigma) - \mathcal{A}_t(\sigma)\theta_t(\sigma))/\Delta t \xrightarrow[\Delta t\to 0]{\mathrm{P}(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\beta}_{\alpha})} 0.$$

Звідси, зваживши на те, що функція $\left(\prod_{l=1}^{r} j_{\nu_l}(\xi_l\sigma_l)\right)e^{i(\xi'',\sigma'')}$ є мультиплікатором у просторі $\overset{r}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$ (по кожній із змінних), а також — на лему 2.3, приходимо до твердження леми 3.2. □

Лема 3.3. *Нехай $f\in(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})'$, тоді граничне співвідношення*

$$(G_t * f)(t,\cdot) \xrightarrow[t\to +0]{} f$$

виконується в класі $(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})'$.

Доведення. Згідно з означенням збіжності в класі $(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})'$, необхідно довести, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}} \left(\langle f_\xi, T^{\xi}_{x,\nu} G_t(\xi) \rangle \varphi(x) \prod_{l=1}^{r} x_l^{2\nu_l+1} \right) dx \xrightarrow[t \to +0]{} \langle f, \varphi \rangle, \qquad \varphi \in \overset{r}{S}{}^{\alpha}_{\beta},$$

(тут враховано те, що $G_t * f$ — регулярний вектор-функціонал (див. лему 3.1)), де $\langle f, \varphi \rangle = (\langle f_1, \varphi \rangle; \ldots; \langle f_m, \varphi \rangle)$. Оскільки кожний елемент функціональної матриці $T^{\xi}_{x,\nu} G_t(x)$ є неперервною абстрактною функцією аргументу x у досконалому просторі $\overset{r}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$, то, як випливає із загальної теорії інтегрування неперервних абстрактних функцій за параметром [16],

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}} (\langle f_\xi, T^{\xi}_{x,\nu} G_t(x) \rangle \varphi(x) \prod_{l=1}^{r} x_l^{2\nu_l+1})\, dx$$
$$= \left\langle f_\xi, \int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}} T^{\xi}_{x,\nu} G_t(x) \varphi(x) \prod_{l=1}^{r} x_l^{2\nu_l+1}\, dx \right\rangle = \langle f_\xi, \check{G}_t(\xi) \rangle, \qquad \varphi \in \overset{r}{S}{}^{\alpha}_{\beta},$$

де

$$\check{G}_t(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_{+,r}} T^{\xi}_{x,\nu} G_t(x) \varphi(x) \prod_{l=1}^{r} x_l^{2\nu_l+1}\, dx.$$

Звідси вже, згідно з неперервністю векторного функціонала f, стає зрозуміло, що для доведення леми 3.3 достатньо довести

$$\check{G}_{j,t}(\cdot) \xrightarrow[t \to +0]{\overset{r}{S}{}^{\alpha}_{\beta}} \varphi, \qquad j \in \mathbb{N}_m, \tag{3.13}$$

де $col(\check{G}_{1,t}(\cdot); \ldots; \check{G}_{m,t}(\cdot)) = \check{G}_t(\cdot)$.

Зважаючи на те, що

$$\check{G}_{j,t}(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} (G_t^{ji} * \varphi)(t, \cdot), \qquad G_t(\cdot) = (G_t^{ij}(\cdot))_{i=1,j=1}^{m,m},$$

причому

$$F_B[\check{G}_{j,t}](t, \cdot) = \sum_{i=1}^{m} \theta_t^{ji}(\cdot) F_B[\varphi](\cdot), \qquad \theta_t(\cdot) = (\theta_t^{ij}(\cdot))_{i=1,j=1}^{m,m},$$

а перетворення Фур'є–Бесселя взаємно однозначно й неперервно відображає простір $\overset{r}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$ в $\overset{r}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$, то граничні співвідношення (3.13) доцільно звести до відповідних еквівалентних:

$$\theta_t^{ij}(\cdot)F_B[\varphi](\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\overset{r}{S}{}^{\beta}_{\alpha}} F_B[\varphi](\cdot), \qquad \{i,j\}\subset\mathbb{N}_m. \tag{3.14}$$

На завершення зазначимо, що виконання співвідношень (3.14) безпосередньо випливає з твердження леми 2.4. □

Наступна теорема характеризує коректну розв'язність задачі Коші для системи (3.1).

Теорема 3.1. *Якщо початкова вектор-функція f належить до $(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})'$, то відповідна задача Коші для системи* (3.1) *коректно розв'язна. Її розв'язок диференційовний за t, нескінченно диференційовний за x і зображається у вигляді*

$$u(t,x)=(G_t*f)(t,x), \qquad f\in(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})',\ (t,x)\in\Pi.$$

Доведення. Диференційовність за t й нескінченна диференційовність за x вектор-функції $(G_t*f)(t,x)$, $(t,x)\in\Pi$, безпосередньо випливають з лем 3.1, 3.2. Оскільки ф.м.р. $G_t(\cdot)$ задовольняє систему (3.1), то за допомогою тверджень із зазначених лем дістанемо, що

$$\{\partial_t-\mathbf{B}\}(G_t*f)(t,x)=\{\partial_tG_t(x)-(\mathbf{B}G_t)(x)\}*f=0, \qquad (t,x)\in\Pi.$$

Отже, вектор-функція u задовольняє систему (3.1) у звичайному розумінні.

З твердження леми 3.3 випливає, що u задовольняє початкову умову (1.7) у сенсі збіжності в класі $(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})'$.

Доведемо тепер, що вказаний розв'язок задачі Коші для (3.1) єдиний і він неперервно залежить від початкової вектор-функції $f\in(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})'$. Для цього скористаємося аналогом загальної теореми єдиності з [18, с. 41].

Розглянемо спряжену задачу Коші до задачі (1.6), (1.7), (3.1):

$$\begin{aligned}
&\partial_tV(\tau,\xi)=-(\mathbf{B}^*V)(\tau,\xi), \quad (\tau,\xi)\in[0;t_1)\times\mathbb{R}^n_{+,r},\ t_1\in(0;T],\\
&\partial_{\xi_l}V\big|_{\xi_l=0}=0, \qquad l\in\mathbb{N}_r,\\
&V(\tau,\cdot)\xrightarrow[\tau\to t_1-0]{\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta}}\varphi(\cdot), \qquad \varphi\in\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta},
\end{aligned}\tag{3.15}$$

де $\mathbf{B}^*$ — матричний спряжений оператор до $\mathbf{B}$ системи (3.1), тобто оператор $\mathbf{B}^*$, побудований за матрицею-символом $\mathcal{A}_t^* = (\overline{\mathcal{A}}_t)^T$ (тут індексом T позначено операцію транспонування). Згідно з указаною теоремою із [18], розв'язок задачі Коші для (3.1) буде єдиним і неперервно залежатиме від $f \in (\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})'$, якщо задача Коші (3.15) розв'язна для довільних $t_1 \in (0;T]$ і $\varphi \in \overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta}$.

Зазначимо, що, міркуючи так, як і у випадку $G_t(\cdot)$, можна довести, що ф.м.р. $G^*_\tau(\cdot)$ системи з (3.15) належить до класу $\mathrm{P}(\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta})$ при кожному $\tau < t_1$. Тоді класичний розв'язок задачі Коші (3.15) зображується формулою

$$V(\tau,\xi) = (G^*_\tau * \varphi)(\tau,\xi), \qquad (\tau,\xi) \in [0;t_1) \times \mathbb{R}^n_{+,r},$$

і оскільки $\varphi \in \overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta}$, то $V(\tau,\cdot)$ також належить до $\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\alpha}_{\beta}$ для всіх $\tau < t_1$.

Далі, перевіримо виконання початкової умови з (3.15) для знайденого розв'язку. Оскільки перетворення Фур'є-Бесселя взаємно однозначно й неперервно переводять простір $\overset{r}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$ в $\overset{r}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$, то граничне співвідношення з (3.15) еквівалентне такому:

$$F_B[G^*_\tau](\tau,\cdot) F_B[\varphi](\cdot) \xrightarrow[\tau\to t_1-0]{\overset{r}{\mathbf{S}}{}^{\beta}_{\alpha}} F_B[\varphi](\cdot). \tag{3.16}$$

Проте у виконанні (3.16) не важко переконатися, якщо діяти так, як і при доведенні леми 2.4.

Щодо крайових умов із (3.15), то вони також виконуються завдяки рівностям

$$j'_{\nu_l}(0) = 0, \qquad l \in \mathbb{N}_r,$$

а також тому, що $V(\tau,\cdot) = F_B^{-1}[F_B[V]](\tau,\cdot)$, $\tau \in [0;t_1)$. $\square$

Література

[1] М. И. Ключанцев, *Интегралы дробного порядка и сингулярные краевые задачи* // Дифференц. уравнения. **XII** (1976), N 6, 983–990.

[2] А. И. Егоров, *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами.* М.: Наука, 1978, 463 с.

[3] П. К. Конаков, Т. Е. Веревочкин, *Тепломассообмен при изучении монокристаллов.* М.: Металлургия, 1971, 387 с.

[4] А. В. Лыков *Тепломассообмен: Справочник.* М.: Энергия, 1978, 480 с.

[5] В. В. Крехивский, М. И. Матийчук, *Фундаментальные решения задачи Коши для линейных параболических систем с оператором Бесселя* // Докл. АН СССР. **181** (1968), N 6, 1320–1323.

[6] М. И. Матийчук, *Задача Коши для одного класса вырождающихся параболических систем* // Укр. мат. журн. **36** (1984), N 3, 321–327.

[7] М. И. Матийчук, *Об одном методе решения задачи Коши для сингулярных параболических уравнений* // Укр. мат. журн. **44** (1992), N 1, 135–134.

[8] М. І. Матійчук, *Параболічні сингулярні крайові задачі.* Київ: Ін-т матем. НАН України, 1999, 176 с.

[9] В. В. Крехивский, *Теоремы единственности решений задачи Коши для уравнений с оператором Бесселя* // Математическое моделирование физических процессов. К.: Ин-т матем. АН УССР, (1989), 82–86.

[10] В. В. Крехівський, *Коректність задачі Коші для параболічних систем диференціальних рівнянь з оператором Бесселя* // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. пр. Чернівці, (1990), 96–103.

[11] И. И. Веренич, М. И. Матийчук, *О свойствах решений параболических систем с оператором Бесселя.* // Матем. сборник. К.: Наук. думка, 1976, 151–154.

[12] С. Д. Ивасишен, В. П. Лавренчук, *Об интегральном представлении решений параболической системы с оператором Бесселя* // Нелинейн. граничн. задачи. (1992), вып. 4, 19–25.

[13] Я. И. Житомирский, *Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя* // Матем. сб. **36** (1955), N 2, 299–310.

[14] В. В. Городецький, І. В. Житарюк, *Задача Коші для одного класу параболічних систем з оператором Бесселя в просторах узагальнених функцій* // Доп. АН УРСР. (1991), N 7, 20–23.

[15] В. В. Городецький, *Про гладкі розв'язки B-параболічних рівнянь та множини їх початкових значень* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. Київ: Ін-т матем. НАН України, (1996), вип. 12, 268–272.

[16] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций.* М.: Физматгиз, 1958, 307 с.

[17] Б. Л. Гуревич, *Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных систем* // Докл. АН СССР. **99** (1954), N 6, 893–896.

[18] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.* М.: Физматгиз, 1958, 274 с.

[19] М. Л. Горбачук, П. И. Дудников, *О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы* // Докл. АН УССР. Сер. А. (1981), N 4, 9–11.

[20] О. Г. Возняк, С. Д. Івасишен, *Однозначна розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь з узагальненими початковими даними* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. **44** (2001), N 4, 27–39.

[21] В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу.* Чернівці: Рута, 1998, 225 с.

[22] О. І. Кашпіровський, *Аналітичне зображення узагальнених функцій типу S* // Доп. АН УРСР. Сер. А. (1980), N 4, 12–14.

[23] В. А. Літовченко, *Цілковита розв'язність задачі Коші у просторах типу S для рівнянь, параболічних за Петровським* // Укр. мат. журн. **54** (2002), N 11, 1467–1479.

[24] В. А. Литовченко, *Задача Коши для $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от времени* // Мат. заметки. **77** (2005), вып. 3, 395–411.

[25] В. В. Городецький, О. М. Ленюк, *Про дробове диференціювання у просторах типу S'* // Доп. НАН України, (1998), N 11, 20–24.

[26] В. А. Літовченко, *Повна розв'язність задачі Коші для одного псевдодиференціального рівняння у просторах типу S* // Математичні студії. Львів. **17** (2002), N 2, 189–198.

[27] В. А. Літовченко, *Коректна розв'язність задачі Коші для рівняння з псевдодиференціальним оператором Бесселя* // Доп. НАН України. (2003), N 2, 21–25.

[28] В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, *Задача Коші для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання та Бесселя нескінченного порядку* // Доп. НАН України. (2003), N 9, 18–24.

[29] О. В. Мартинюк, *Задача Коші для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя нескінченного порядку* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 134. Математика. Чернівці: Рута, (2002), 71–83.

[30] В. В. Городецький, Р. С. Колісник, *Про одне узагальнення просторів типу W* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 134. Математика. Чернівці: Рута, (2002), 30–37.

[31] В. В. Городецький, С. С. Дрінь, *Задача Коші для еволюційних сингулярних рівнянь нескінченного порядку* // Доп. НАН України. (2003), N 11, 12–17.

[32] В. В. Городецький, *Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку.* Чернівці: Рута, 2005, 291 с.

[33] Т. І. Готинчан, Р. Н. Атаманюк, *Різні форми означення просторів типу W* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика. Чернівці: Рута, (2001), 21–26.

[34] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987, 688 с.

[35] В. А. Літовченко, *Зображення узагальненого диференціювання за Е. Постом у класичній формі дробового диференціювання* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Матем. (2000), вип. 76, 54–58.

[36] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* 4-е изд. М.: Наука, 1988, 552 с.

[37] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа.* М.: Мир, 1968, 427 с.

[38] В. М. Борок, *Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных* // Докл. АН СССР. **XCVII** (1954), N 6, 949–952.

Відомості про авторів

Владислав Антонович Літовченко

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського 2,
58012, Чернівці
Україна
E-Mail: vladlit@chnu.cv.ua