Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 1, 1 – 20

# Приближение в среднем матричнозначными многочленами на спрямляемых кривых

Люц Клёц, Сергей М. Загороднюк

(*Представлена М. М. Маламудом*)

**Аннотация.** В данной работе изучаются вопросы приближения матричнозначными многочленами в пространствах $L^p(M)$, $p \in (0, \infty)$, на жордановых кривых. Для мер $M$ полного ранга получены необходимые и достаточные условия плотности замыкания $L_0^p(M)$ множества матричных многочленов в $L^p(M)$. Показано, что равенство $L_0^p(M) = L^p(M)$ не зависит от сингулярной части меры $M$. При $L_0^p(M) \neq L^p(M)$ для мер полного ранга решена задача описания пространства $L_0^p(M)$. Введено понятие линейно регулярного пространства $L^p(M)$ и получены достаточные условия линейной регулярности $L^p(M)$. Показано, что для незамкнутой кривой Жордана, которая может быть и не спрямляемой, равенство $L_0^p(M) = L^p(M)$ всегда имеет место.

**2000 MSC.** 41A10, 30E10, 60-99.

**Ключевые слова и фразы.** Аппроксимация многочленами, жорданова кривая.

## Введение

Пусть $\Gamma$ есть замкнутая спрямляемая кривая Жордана в комплексной плоскости и $\mathfrak{L}(\Gamma)$ — $\sigma$-алгебра ее борелевских подмножеств. Посредством $\mathbb{C}_{n\times n}$ будем обозначать алгебру всех $n \times n$-матриц с комплексными элементами, а $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$ — конус всех неотрицательно-определенных эрмитовых матриц из $\mathbb{C}_{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$. Для $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значной меры $M$ на $\mathfrak{L}(\Gamma)$ можно ввести пространство $L^p(M)$, $p \in (0, \infty)$ всех измеримых $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных функций (точнее, классов эквивалентности таких функций), которые $p$-интегрируемы относительно $M$, см. [1, 2], а также [3]. Насколько нам известно, для $p = 2$ впервые пространства такого типа были введены И. С. Кацем [4] в связи со спектральной теорией самосопряженных операторов. В том случае,

*Статья поступила в редакцию* 22.03.2006

когда $\Gamma$ есть единичная окружность $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, пространства $L^2(M)$ оказались очень полезными в качестве спектральных пространств $n$-мерных слабо стационарных последовательностей, см., например, [5] и [6]. При этом возникала задача описания подпространства $L_0^2(M)$, которое есть замыкание множества $\mathcal{P}_{n\times n}$ всех $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных многочленов в $L^2(M)$. В частности, интересуются вопросом, для каких мер $M$ имеет место равенство $L_0^2(M) = L^2(M)$. Существует обширная литература, посвященная подобным проблемам, причем большинство результатов было получено уже в 1950-ые и 1960-ые годы, см. [5, 7].

Для скалярного случая, т.е. при $n = 1$, следует упомянуть классические теоремы Г. Сегё, А. Н. Колмогорова и М. Г. Крейна, которые относятся к вопросам полноты многочленов в $L^p(M)$ на окружности для любого $p \in (0, \infty)$, см., например, [8, стр. 296–299]. Результаты этих трех авторов были перенесены на случай замкнутой спрямляемой кривой Жордана Я. Л. Геронимусом [9] для $p \in [1, \infty)$ и Г. Ц. Тумаркиным [10] для $p \in (0, \infty)$. При этом Я. Л. Геронимус использовал теорию пространств Харди для произвольных областей, а Г. Ц. Тумаркин получил свои теоремы более прямым путем, используя соответствующие результаты для единичной окружности и применяя конформное отображение.

В матричном случае вопросы полноты матричных многочленов в $L^p(M)$ на единичной окружности для любого $p \in (0, \infty)$ изучались в [11].

Настоящая работа посвящена некоторым задачам в пространствах $L^p(M)$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, \infty)$ и замкнутых спрямляемых кривых Жордана $\Gamma$. Параграфы 1–3 носят вспомогательный характер. Для удобства читателя, в первом параграфе мы напомним некоторые теоремы о $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных внешних функциях, а во втором параграфе приведем некоторые результаты из теории конформных отображений. В третьем параграфе приводятся основные факты о пространствах $L^p(M)$. Четвертый параграф посвящен вопросу плотности множества $\mathcal{P}_{n\times n}$ в $L^p(M)$. Мы покажем, что равенство $L_0^p(M) = L^p(M)$ не зависит от сингулярной части меры $M$. В том случае, когда $M$ есть мера полного ранга, т.е., когда определитель производной Радона–Никодима абсолютно непрерывной части меры $M$ не равняется нулю п.в., мы получим необходимое и достаточное условие плотности $\mathcal{P}_{n\times n}$.

При $L_0^p(M) \neq L^p(M)$ возникает задача описания подпространства $L_0^p(M)$. Для мер полного ранга она решается в пятом параграфе.

В шестом параграфе мы вкратце обсудим плотность множеств вида $J^\kappa \mathcal{P}_{n\times n}$, здесь $\kappa \in \mathbb{Z}$, а $J$ есть функция $J(\zeta) := \zeta I_n$, где $\zeta \in \Gamma$,

$I_n$ — единичная матрица $n$-го порядка.

По аналогии с понятием линейной регулярности слабо стационарной случайной последовательности можно ввести понятие линейно регулярного пространства $L^p(M)$. Седьмой параграф содержит достаточные условия линейной регулярности пространства $L^p(M)$.

В заключительном восьмом параграфе устанавливается, что для незамкнутой кривой Жордана, которая может быть и не спрямляемой, равенство $L^p_0(M) = L^p(M)$ всегда имеет место.

**Обозначения.** Посредством $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначаем, соответственно, множества комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Помимо появившихся выше обозначений, следует указать на следующее. Любой нулевой элемент обозначается 0. Всюду в работе $n$ обозначает некоторое натуральное число. Для $X \in \mathbb{C}_{n\times n}$ обозначаем $X^*, \det X, \operatorname{tr} X$ соответственно сопряженную матрицу, определитель и след матрицы. Если $X$ - обратима, то $X^{-1}$ — обратная матрица. Если $X \in \mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$ и $r \in (0, \infty)$, то $X^r$ есть матрица, определяемая функциональным исчислением для эрмитовых матриц. $I_n$ будет обозначать как единичную матрицу порядка $n$, так и постоянную функцию с таким значением; $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

## 1. Пространства Харди

Теория пространств Харди над $\mathbb{D}$ для скалярных функций изложена, например, в книгах [12–14], перенесение на матричнозначные или даже операторнозначные функции можно найти, например, в [15, 16]. Пространство Харди из $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных функций обозначим $H^p_{n\times n}$, $p \in (0, \infty]$, при этом для простоты пишем $H^p_{1\times 1} =: H^p$. Банахово пространство всех $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных функций, аналитических на $\mathbb{D}$ и непрерывных на $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$ будем обозначать $\mathcal{A}_{n\times n}$. Множество $\mathcal{P}_{n\times n}$ образует плотное подмножество в $\mathcal{A}_{n\times n}$. Класс Смирнова $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных функций обозначим $D_{n\times n}$. В обозначениях всех этих множеств функций мы будем опускать индексы при $n = 1$. Напомним, что класс $D_{n\times n}$ состоит из всех функций вида $\rho^{-1}\Phi$, где $\Phi \in H^\infty_{n\times n}$, а $\rho$ - внешняя функция из $H^\infty$, см., например, теорему C в [15, стр. 78]. При этом $\mathbb{C}$-значная аналитическая функция $\rho$ на $\mathbb{D}$ называется внешней, если она допускает представление $\rho(w) = e^{i\alpha} \exp(\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{z+w}{z-w} \ln g(z)\, dz)$, $w \in \mathbb{D}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $g$ — неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{T}$ такая, что $\ln g$ суммируем по мере Лебега $\lambda$ на $\mathbb{T}$. Из этого представления непосредственно следует, что $\rho$ не имеет нулей, $\rho^{-1}$ — внешняя, а произведение двух внешних функций есть внешняя функция. Следовательно, произведение двух функций из $D_{n\times n}$ принадлежит $D_{n\times n}$.

Отметим еще, что мы будем отождествлять, как это принято, функцию из $D_{n\times n}$ с ее граничной функцией на $\mathbb{T}$.

Аналитическую $\mathbb{C}_{n\times n}$-значную функцию $\Phi$ на $\mathbb{D}$ назовем функцией полного ранга, если $\det\Phi(w)$ отличен от нуля хотя бы для одной точки $w\in\mathbb{D}$. Пусть $\Phi\in H^\infty_{n\times n}$ есть функция полного ранга. Она называется внешней функцией, если $\Phi H^2_{n\times n}$ плотно в $H^2_{n\times n}$, см. определение A(ii) в [15, стр. 94]. Поскольку такое условие эквивалентно тому, что множество $\{\Phi Q,\ Q\in\mathcal{P}_{n\times n}\}$ плотно в $H^2_{n\times n}$, то применяя теорему о внешних функциях [17, стр. 38] непосредственно получаем следующий результат:

**Лемма 1.1.** *Пусть $\Phi\in H^\infty_{n\times n}$ есть функция полного ранга. Тогда $\Phi$ — внешняя функция тогда и только тогда, когда $\det\Phi$ — внешняя.*

Пусть $\Phi$ есть $\mathbb{C}_{n\times n}$-значная аналитическая функция полного ранга. Она называется внешней функцией, если существует внешняя функция $\rho\in H^\infty$ такая, что $\rho\Phi\in H^\infty_{n\times n}$ и $\rho\Phi$ — внешняя, см. определение B в [15, стр. 94]. Из этого определения видно, что каждая внешняя функция принадлежит классу $D_{n\times n}$. Кроме того, оказывается, что при $n=1$ определение совпадает с определением внешней функции, данным выше для скалярных функций, см. теорему A в [15, стр. 95].

**Лемма 1.2.** *Если $\Phi$ есть $\mathbb{C}_{n\times n}$-значная внешняя функция полного ранга, то $\Phi^{-1}$ — внешняя.*

*Доказательство.* Пусть $\rho\in H^\infty$ такая внешняя функция, что $\rho\Phi\in H^\infty_{n\times n}$ есть внешняя. Тогда согласно леммы 1.1 функция $\det(\rho\Phi)$ — внешняя, следовательно $(\det(\rho\Phi))^{-1}=\det(\rho\Phi)^{-1}=\rho^{-n}\det\Phi^{-1}$ — внешняя и $\det\Phi^{-1}=\rho^n(\det(\rho\Phi))^{-1}$ — также внешняя. Вновь используя лемму 1.1 получаем, что $\Phi^{-1}$ — внешняя функция. $\square$

## 2. Замкнутая спрямляемая кривая Жордана

Пусть $\Gamma$ есть замкнутая спрямляемая кривая Жордана в $\mathbb{C}$. По теореме Жордана она разделяет $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ на ограниченную (внутреннюю) область $\Delta$ и неограниченную (внешнюю) область. Пусть $\varphi$ есть некоторое конформное отображение $\mathbb{D}$ на $\Delta$. По теореме Каратеодори существует единственное непрерывное продолжение $\varphi$ на $\mathbb{D}\cup\mathbb{T}$, которое отображает $\mathbb{D}\cup\mathbb{T}$ взаимно-однозначно и взаимно-непрерывно на $\Delta\cup\Gamma$. Это продолжение, как и любое его сужение на некоторое подмножество множества $\mathbb{D}\cup\mathbb{T}$, обозначим также $\varphi$. Обратное к $\varphi$ отображение обозначим $\psi$. Функция $\varphi$ имеет следующее свойство, см., например, теорему 3.12 в [13, стр. 44]:

**Лемма 2.1.** *Производная* $\varphi'$ *функции* $\varphi$ *принадлежит пространству* $H^1$.

Внутренняя часть функции $\varphi \in \mathcal{A}$ зависит от взаимного расположения точки 0 и кривой $\Gamma$ и может быть описана явно.

**Лемма 2.2.** *Если* $0 \in \mathbb{C}\backslash\Delta$, *то* $\varphi$ *есть внешняя функция. Если* $0 \in \Delta$, *то внутренняя часть* $\varphi_i$ *функции* $\varphi$ *равна множителю Бляшке вида*

$$\varphi_i(z) = \frac{z_0^*}{|z_0|}\frac{z_0 - z}{1 - z_0^* z}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{2.1}$$

*где* $z_0$ *— некоторая точка из* $\mathbb{D}$.

*Доказательство.* Если $0 \in \mathbb{C}\backslash(\Delta \cup \Gamma)$, то $\varphi^{-1} \in \mathcal{A}$, из чего следует, что $\varphi$ является внешней функцией, см., например, упражнение 12(a) главы 5 в [14]. Если $0 \in \Delta$, то существует единственная точка $z_0 \in \mathbb{D}$ такая, что $\varphi(z_0) = 0$. Отщепляя соответствующий множитель Бляшке, имеем $\varphi = \varphi_i\varphi_o$, где $\varphi_i$ имеет вид (2.1). Из рассуждений, аналогичных вышеприведенным, заключаем, что $\varphi_o$ — внешняя функция.

Предположим, что $0 \in \Gamma$ и $\varphi$ не является внешней функцией. Тогда $\varphi_i$ — обязательно сингулярная внутренняя функция. Но поскольку $\varphi$ есть однолистная функция, то у нее нет нетривиальной сингулярной внутренней части, см., например, [13, Теорема 3.17]. Полученное противоречие показывает, что $\varphi$ является внешней функцией. □

Пусть $\gamma$ есть мера длины дуги на $\mathfrak{L}(\Gamma)$, а $\lambda$ — мера длины дуги на $\mathfrak{L}(\mathbb{T})$. Для какой-то, вообще говоря, векторнозначной меры $\mu$ на $\mathfrak{L}(\Gamma)$ обозначим через $\psi\mu$ ее образ при отображении $\psi$, т.е. $(\psi\mu)(B) := \mu(\varphi(B))$, $B \in \mathfrak{L}(\mathbb{T})$. Аналогично определяется $\varphi\nu$ для меры $\nu$ на $\mathfrak{L}(\mathbb{T})$. Следующий результат можно найти, например, в [12, стр. 179].

**Лемма 2.3.** *Меры* $\varphi\lambda$ *и* $\gamma$, *как и меры* $\lambda$ *и* $\psi\gamma$, *эквивалентны.*

Используя интегральную формулу для длины пути, можно легко доказать, что производная Радона–Никодима $\frac{d(\psi\gamma)}{d\lambda}$ равняется

$$\frac{d(\psi\gamma)}{d\lambda} = |\varphi'| \quad \lambda\text{-п.в.} \tag{2.2}$$

## 3. Пространства $L^p(M)$

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_{m\times n}$ — линейное пространство всех $m\times n$-матриц с элементами из $\mathbb{C}$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{C}_{m\times n}$. Пусть $M$ есть

$\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значная мера на $\mathfrak{L}(\Gamma)$. Она абсолютно непрерывна относительно конечной неотрицательной меры $\tau := \operatorname{tr} M$. Чтобы исключить тривиальные случаи, мы предположим, что $\tau$ не является нулевой мерой. Производная Радона–Никодима $\frac{dM}{d\tau}$ есть $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значная измеримая функция. Кроме того, $\operatorname{tr} \frac{dM}{d\tau}(\zeta) = 1$, следовательно, $\frac{dM}{d\tau}(\zeta)$ оказывается сжатием для $\tau$-п.в. $\zeta \in \Gamma$.

Если $p \in (0,\infty)$, то через $L^p(M;\mathbb{C}_{m\times n};\|\cdot\|)$ обозначается пространство (классов эквивалентности) функций $F:\Gamma\to\mathbb{C}_{m\times n}$ таких, что функция $F\left(\frac{dM}{d\tau}\right)^{\frac{1}{p}}$ измерима и

$$|||F|||_p := \left(\int\limits_\Gamma \left\|F\Big(\frac{dM}{d\tau}\Big)^{\frac{1}{p}}\right\|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Кроме того, пусть $L^\infty(M;\mathbb{C}_{m\times n};\|\cdot\|)$ — пространство (классов эквивалентности) функций $F:\Gamma\to\mathbb{C}_{m\times n}$ таких, что функция $FP_M$ измерима и

$$|||F|||_\infty := \operatorname{ess\,sup}\|FP_M\| < \infty.$$

При этом $P_M(\zeta)$ является ортопроектором на область значений оператора $\frac{dM}{d\tau}(\zeta)$ для $\tau$-п.в. $\zeta\in\Gamma$, а существенная верхняя грань берется относительно меры $\tau$.

Пространства такого типа были введены в [1] и [2], см. также [3]. Легко видеть, что их определение не зависит от выбора меры $\tau$, т.е., вместо $\tau$ можно использовать любую регулярную неотрицательную $\sigma$-конечную меру на $\mathfrak{L}(\Gamma)$, относительно которой $M$ абсолютно непрерывна.

Пространство $L^p(M;\mathbb{C}_{m\times n};\|\cdot\|)$ есть левый $\mathbb{C}_{m\times n}$-модуль, т.е. из $X\in\mathbb{C}_{m\times m}$ и $F\in L^p(M;\mathbb{C}_{m\times n};\|\cdot\|)$ следует $XF\in L^p(M;\mathbb{C}_{m\times n};\|\cdot\|)$. Кроме того, если $p\in[1,\infty]$, оно есть банахово пространство относительно нормы $|||\cdot|||_p$, а если $p\in(0,1)$, оно является пространством Фреше относительно инвариантной метрики $|||F-G|||_p^p,\ F,G\in L^p(M;\mathbb{C}_{m\times n};\|\cdot\|)$.

Вообще говоря, $|||\cdot|||_p$ зависит от выбора нормы $\|\cdot\|$. Но так как все нормы в конечномерном пространстве $\mathbb{C}_{m\times n}$ эквивалентны, то топология пространства $L^p(M;\mathbb{C}_{m\times n};\|\cdot\|)$ зависит только от $M$ и $p$, а не от выбора нормы $\|\cdot\|$. В настоящей работе мы занимаемся вопросами, зависящими только от топологии пространства $L^p(M;\mathbb{C}_{m\times n};\|\cdot\|)$. Поэтому при надобности мы можем выбрать какую-нибудь конкретную норму $\|\cdot\|$, чтобы упростить вычисления.

Например, если в качестве $\|\cdot\|$ взять обычную операторную норму, то для $p,r\in(0,\infty),\ p\leq r,\ F\in L^p(M;\mathbb{C}_{m\times n};\|\cdot\|)$ имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \Big\| F\Big(\frac{dM}{d\tau}\Big)^{\frac{1}{p}} \Big\|^p \, d\tau = \int\limits_{\Gamma} \Big\| F\Big(\frac{dM}{d\tau}\Big)^{\frac{1}{r}} \Big(\frac{dM}{d\tau}\Big)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \Big\|^p \, d\tau$$

$$\leq \int\limits_{\Gamma} \Big\| F\Big(\frac{dM}{d\tau}\Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|^p \, d\tau \leq \tau(\Gamma)^{1-\frac{p}{r}} \Bigg( \int\limits_{\Gamma} \Big\| F\Big(\frac{dM}{d\tau}\Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|^r \, d\tau \Bigg)^{\frac{p}{r}}$$

в силу того, что $\frac{dM}{d\tau}$ является сжатием $\tau$-п.в. и в силу неравенства Йенсена. Если $F \in L^\infty(M; \mathbb{C}_{m\times n}; \|\cdot\|)$, то непосредственно получается $\big(\int_\Gamma \|F\left(\frac{dM}{d\tau}\right)^{\frac{1}{p}}\|^p \, d\tau\big)^{\frac{1}{p}} \leq \tau(\Gamma) \operatorname{ess\,sup} \|FP_M\|$. Учитывая еще, что множество простых функций плотно в $L^p(M; \mathbb{C}_{m\times n}; \|\cdot\|)$, см. [1, Теорема 16], можно сформулировать следующую лемму:

**Лемма 3.1.** *Пусть $p, r \in (0, \infty]$, $p \leq r$, и пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{C}_{m\times n}$. Тогда $L^r(M; \mathbb{C}_{m\times n}; \|\cdot\|) \subseteq L^p(M; \mathbb{C}_{m\times n}; \|\cdot\|)$, причем имеет место оценка*

$$|||F|||_p \leq c_{p,r} |||F|||_r, \qquad F \in L^r(M; \mathbb{C}_{m\times n}; \|\cdot\|)$$

*с некоторой не зависящей от $F$ постоянной $c_{p,r}$. Если $p < \infty$, тогда $L^r(M; \mathbb{C}_{m\times n}; \|\cdot\|)$ является плотным подмножеством пространства $L^p(M; \mathbb{C}_{m\times n}; \|\cdot\|)$.*

Оказывается, что евклидова норма $\|\cdot\|_E$, $\|X\|_E := (\operatorname{tr}(XX^*))^{\frac{1}{2}}$, $X \in \mathbb{C}_{m\times n}$, во многих отношениях особенно удобна. Кроме того, с целью упрощения изложения мы в дальнейшем примем $m = n$, но подчеркнем, что для случая $m \neq n$ можно доказать аналогичные результаты, хотя иногда необходимы несложные дополнительные выкладки. Пространство $L^p(M; \mathbb{C}_{n\times n}; \|\cdot\|_E)$ обозначим вкратце $L^p(M)$, $p \in (0, \infty]$. Поскольку $\frac{dM}{d\tau} \in \mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$ $\tau$-п.в., то для $p \in (0, \infty)$ существует $\mathbb{C}_{n\times n}$-значная измеримая функция $N$ такая, что $\left(\frac{dM}{d\tau}\right)^{\frac{2}{p}} = NN^*$ $\tau$-п.в. Имеет место следующая лемма, простое доказательство которой мы опускаем:

**Лемма 3.2.** *Пусть $p \in (0, \infty)$. Отображение $F \to FN$, $F \in L^p(M)$, осуществляет изометрический изоморфизм между пространствами $L^p(M)$ и $L^p(P_M d\tau)$.*

Отметим в связи с предыдущей леммой, что пространство $L^p(P_M d\tau)$ является обычным пространством $L^p(I_n d\tau)$, $p \in (0, \infty)$ всех (классов эквивалентности) $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных измеримых функций, $p$-интегрируемых относительно $\tau$, если $\det \frac{dM}{d\tau} \neq 0$ $\tau$-п.в.

Пусть $\tau = \tau_a + \tau_s$ есть разложение меры $\tau$ на абсолютно непрерывную часть $\tau_a$ и сингулярную часть $\tau_s$ (относительно меры $\gamma$).

Пусть $B_a, B_s \in \mathfrak{L}(\Gamma)$ такие множества, что $B_a \cup B_s = \Gamma$, $B_a \cap B_s = \emptyset$, $\tau_s(B_a) = 0$, $\gamma(B_s) = 0$. Если мы определим $M_a(B) := M(B \cap B_a)$, $M_s(B) := M(B \cap B_s)$, $B \in \mathfrak{L}(\Gamma)$, то получим аналогичное разложение $M = M_a + M_s$ меры $M$. Производную Радона–Никодима меры $M_a$ относительно $\gamma$ обозначим $W$, так, что $dM_a = W d\gamma$, где $W$ есть $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значная измеримая функция. Обозначая $1_B$ характеристическую функцию множества $B$ и отождествляя $L^p(M_a)$ с $1_{B_a}L^p(M)$ и $L^p(M_s)$ с $1_{B_s}L^p(M)$, мы можем рассматривать $L^p(M_a)$ и $L^p(M_s)$ как подпространства пространства $L^p(M)$ и представить $L^p(M)$ в виде прямой суммы $L^p(M) = L^p(M_a) \dot{+} L^p(M_s)$.

В дальнейшем $q$ означает следующую зависящую от $p$ величину: $q = \frac{p}{p-1}$, если $p \in (1, \infty)$, и $q = \infty$, если $p = 1$.

**Лемма 3.3 (см. [1, Теорема 9] или [3, Теорема 2.5]).** *Пусть $p \in [1, \infty)$. Сопоставляя в соответствие каждому $G \in L^q(M)$ отображение $F \to \operatorname{tr} \int_\Gamma F \frac{dM}{d\tau} G^* d\tau$, $F \in L^p(M)$, получим изометрический изоморфизм между пространством $L^q(M)$ и пространством непрерывных линейных функционалов на $L^p(M)$.*

Если $F \in L^p(M)$ и $G \in L^q(M)$ такие, что $\int_\Gamma F \frac{dM}{d\tau} G^* d\tau = 0$, то пишем $F \perp G$, а если $S$ есть подмножество пространства $L^p(M)$, то определим $S^\perp := \{G \in L^q(M) : \ F \perp G$ для всех $F \in S\}$, $p \in [1, \infty)$.

## 4. Плотность многочленов

Пусть $S$ есть некоторое подмножество пространства $L^p(M)$, $p \in (0, \infty]$. Обозначим $\vee S$ его левую $\mathbb{C}_{n\times n}$-линейную оболочку, т.е. множество всех функций вида $\sum_{j=1}^k X_j F_j$, $X_j \in \mathbb{C}_{n\times n}$, $F_j \in S$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}$. Замыкание множества $S$ относительно метрики пространства $L^p(M)$ обозначаем $\overline{S}$. Если $S$ есть подмножество некоторого другого метрического пространства, то его замыкание также будет обозначаться $\overline{S}$, но мы дополнительно укажем на метрику.

Введем функции $Z(z) := zI_n$ и $\hat{\Phi}(z) := \varphi(z)I_n$, $z \in \mathbb{T}$, а также $J(\zeta) := \zeta I_n$ и $\hat{\Psi}(\zeta) := \psi(\zeta)I_n$, $\zeta \in \Gamma$. Пусть $L^p_0(M) := \overline{\vee\{J^l : \ l \in \mathbb{N}_0\}}$, т.е. $L^p_0(M) := \overline{\mathcal{P}_{n\times n}}$, $p \in (0, \infty)$. Возникает вопрос, для каких мер $M$ имеет место равенство $L^p_0(M) = L^p(M)$. Следующие две простые, но очень полезные леммы показывают, что (хотя бы частичный) ответ на этот вопрос можно получить, используя соответствующие известные результаты для мер на $\mathfrak{L}(\mathbb{T})$.

Для $p \in (0, \infty]$ определим отображение $V = V_{\varphi,p}$ следующим образом: $(VF)(\cdot) := F(\varphi(\cdot))$, $F \in L^p(M)$.

**Лемма 4.1.** *Отображение $V$ есть изометрический изоморфизм между пространствами $L^p(M)$ и $L^p(\psi M)$, $p \in (0,\infty]$.*

*Доказательство.* Очевидно, $V$ является изоморфизмом. Поскольку $\psi\tau = \mathrm{tr}(\psi M)$, имеем $\frac{d(\psi M)}{d(\psi\tau)}(\cdot) = \frac{dM}{d\tau}(\varphi(\cdot))$. Путем замены переменной в интеграле при $p \in (0,\infty)$ и при $p = \infty$ непосредственно можно установить, что $V$ есть изометрия из $L^p(M)$ в $L^p(\psi M)$. Если $G \in L^p(\psi M)$, то аналогично заключаем, что $F(\cdot) := G(\psi(\cdot)) \in L^p(M)$. Поскольку $VF = G$, то $V$ отображает на все пространство $L^p(\psi M)$. $\square$

**Лемма 4.2.** *Для $p \in (0,\infty)$ имеет место равенство $VL_0^p(M) = L_0^p(\psi M)$.*

*Доказательство.* Из того, что $VJ^l = \hat{\Phi}^l,\ l \in \mathbb{N}_0$, и из того, что $\hat{\Phi}^l,\ l \in \mathbb{N}_0$, есть равномерный предел последовательности из $\mathcal{P}_{n\times n}$, получаем

$$VL_0^p(M) \subseteq L_0^p(\psi M). \tag{4.1}$$

С другой стороны, $V^{-1}Z^l = \hat{\Psi}^l,\ l \in \mathbb{N}_0$. Поскольку $\hat{\Psi}^l,\ l \in \mathbb{N}_0$, тоже есть равномерный предел последовательности из $\mathcal{P}_{n\times n}$, см., например, [18, стр. 100], получим $V^{-1}L_0^p(\psi M) \subseteq L_0^p(M)$, что вместе с (4.1) дает требуемое равенство. $\square$

Наш первый результат относительно плотности многочленов в $L^p(M)$ показывает, что для $p \in (0,\infty)$ выполнение равенства $L_0^p(M) = L^p(M)$ не зависит от сингулярной части $M_s$ меры $M$.

**Лемма 4.3.** *Если $p \in (0,\infty)$, то $L^p(M_s) \subseteq L_0^p(M)$.*

*Доказательство.* Пусть вначале $p \in [1,\infty)$. Тогда включение $L^p(M_s) \subseteq L_0^p(M)$ эквивалентно включению

$$L_0^p(M)^\perp \subseteq L^p(M_s)^\perp. \tag{4.2}$$

С помощью замены переменной получаем, что $\int_\Gamma F\frac{dM}{d\tau}G^* d\tau = \int_\mathbb{T} (VF)\frac{d(\psi M)}{d(\psi\tau)}(VG)^* d(\psi\tau),\ F \in L^p(M), G \in L^q(M)$. Это показывает, что $F \perp G$ эквивалентно $VF \perp VG$. Поэтому, применяя лемму 4.2, получим $V(L_0^p(M)^\perp) = L_0^p(\psi M)^\perp$. Тогда для $G \in L_0^p(M)^\perp$ имеет место $\int_\mathbb{T} Z^l \frac{d(\psi M)}{d(\psi\tau)}(G(\varphi))^* d(\psi\tau) = 0,\ l \in \mathbb{N}_0$. Из теоремы братьев Риссов следует, что мера $\frac{d(\psi M)}{d(\psi\tau)}(G(\varphi))^* d(\psi\tau)$ абсолютно непрерывна относительно меры $\lambda$. Следовательно, в силу леммы 2.3 мера $\frac{dM}{d\tau}G^* d\tau$ абсолютно непрерывна относительно $\gamma$, т.е.,

$$\frac{dM}{d\tau}G^* = 0 \quad \tau\text{-п.в. на } B_s. \tag{4.3}$$

Если $F \in L^p(M_s)$, то $F\frac{dM}{d\tau} = 0$ $\tau$-п.в. на $B_a$, что вместе с (4.3) влечет $\int_\Gamma F\frac{dM}{d\tau}G^* d\tau = 0$. Таким образом, (4.2) установлено.

Пусть теперь $p \in (0,1)$. В силу леммы 3.1 любую функцию из $L^p(M_s)$ можно в $L^p(M_s)$, а значит и в $L^p(M)$, сколь угодно точно приблизить функциями из $L^1(M_s)$. По уже доказанному, любую функцию из $L^1(M_s)$ можно в $L^1(M)$ сколь угодно точно приблизить функциями из $\mathcal{P}_{n\times n}$. Вновь применяя лемму 3.1, мы получим, что такое приближение имеет место и относительно метрики пространства $L^p(M)$. Таким образом, $L^p(M_s) \subseteq L^p_0(M)$. □

**Следствие 4.1.** *Если мера $M$ сингулярна относительно $\gamma$, то $L^p_0(M) = L^p(M),\ p \in (0,\infty)$.*

Предыдущее следствие можно усилить:

**Теорема 4.1.** *Пусть $p \in (0,\infty)$ и $S$ есть некоторое подмножество множества $L^p(M)$ такое, что $J^l \in S,\ l \in \mathbb{N}_0$. Тогда*

$$\overline{\vee S} = \overline{\vee S_a} \dotplus \overline{\vee S_s} = \overline{\vee S_a} \dotplus L^p(M_s), \tag{4.4}$$

*где $S_a := 1_{B_a}S$ и $S_s := 1_{B_s}S$.*

*Доказательство.* Очевидно, что

$$\overline{\vee S} \subseteq \overline{\vee S_a} \dotplus \overline{\vee S_s}. \tag{4.5}$$

С другой стороны, $\overline{\vee S_s} \subseteq L^p(M_s)$ в силу следствия 4.1 и $L^p(M_s) \subseteq \overline{\vee S}$ в силу леммы 4.3, следовательно,

$$\overline{\vee S_s} \subseteq \overline{\vee S}. \tag{4.6}$$

Из (4.6), в частности, вытекает, что $1_{B_a}F = F - 1_{B_s}F \in \overline{\vee S}$ для каждой функции $F \in S$, а это дает $\overline{\vee S_a} \subseteq \overline{\vee S}$. Учитывая (4.6) и (4.5), мы получаем утверждение теоремы. □

**Следствие 4.2.** *Пусть $p \in (0,\infty)$ и $S$ есть некоторое подмножество множества $L^p(M)$ такое, что $J^l \in S,\ l \in \mathbb{N}_0$. Тогда равенства $\overline{\vee S} = L^p(M)$ и $\overline{\vee S_a} = L^p(M_a)$ эквивалентны. В частности, $L^p_0(M) = L^p(M)$ тогда и только тогда, когда $L^p_0(M_a) = L^p(M_a)$.*

Напомним, что мера $dM = dM_a + dM_s = W d\gamma + dM_s$ на $\mathfrak{L}(\Gamma)$ называется мерой полного ранга, если $\det W \neq 0$ $\gamma$-п.в. Поскольку в силу (2.2) имеет место

$$\frac{d(\psi M_a)}{d\lambda} = \frac{d(\psi M_a)}{d(\psi\gamma)}\frac{d(\psi\gamma)}{d\lambda} = W(\varphi)|\varphi'| \quad \lambda\text{-п.в.}, \tag{4.7}$$

то из леммы 2.1 следует, что $M$ является мерой полного ранга на $\mathfrak{L}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\psi M$ есть мера полного ранга на $\mathfrak{L}(\mathbb{T})$. Следующий результат является обобщением результата в [10, Теорема 8] и следствия из теоремы в [11]:

**Теорема 4.2.** *Пусть $p \in (0,\infty)$ и пусть $dM = W d\gamma + dM_s$ есть мера полного ранга на $\mathfrak{L}(\Gamma)$. Тогда равенство $L_0^p(M) = L^p(M)$ эквивалентно равенству*

$$\int\limits_{\Gamma} \ln(\det W)|\psi'|\, d\gamma = -\infty. \tag{4.8}$$

*Доказательство.* Из лемм 4.1 и 4.2 мы можем заключить, что $L_0^p(M) = L^p(M)$ тогда и только тогда, когда

$$L_0^p(\psi M) = L^p(\psi M). \tag{4.9}$$

Учитывая, что $\psi M$ является мерой полного ранга, мы получим из теоремы в [11], что (4.9) эквивалентно условию

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \ln\det\frac{d(\psi M)}{d\lambda}\, d\lambda = -\infty. \tag{4.10}$$

Используя (4.7), (2.2), с помощью замены переменной получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{T}} \ln\det\frac{d(\psi M)}{d\lambda}\, d\lambda &= \int\limits_{\mathbb{T}} \ln\det(W(\varphi)|\varphi'|)\, d\lambda \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}} \ln(\det W(\varphi))\frac{1}{|\varphi'|}\, d(\psi\gamma) + \int\limits_{\mathbb{T}} n\ln|\varphi'|\, d\lambda \\ &= \int\limits_{\Gamma} \ln(\det W)|\psi'|\, d\gamma + n\int\limits_{\mathbb{T}} \ln|\varphi'|\, d\lambda.\end{aligned}$$

Поскольку в силу леммы 2.1 выполняются неравенства

$$-\infty < \int\limits_{\mathbb{T}} \ln|\varphi'|\, d\lambda < \infty,$$

то (4.10) и (4.8) эквивалентны. $\square$

## 5. Описание пространства $L_0^p(M)$

Пусть $dM = Wd\gamma + dM_s$ есть мера полного ранга на $\mathfrak{L}(\Gamma)$. Из теоремы 4.2 следует, что при условии

$$\int\limits_{\Gamma} \ln(\det W)|\psi'|\, d\gamma > -\infty \tag{5.1}$$

пространство $L_0^p(M)$ есть собственное подпространство пространства $L^p(M)$, $p \in (0,\infty)$. В этом случае возникает задача описания элементов пространства $L_0^p(M)$. Для $n = 1$ она была решена Г. Ц. Тумаркиным [10, Теорема 3]. Оказывается, что его рассуждения можно перенести на матричный случай.

Рассмотрим вначале меры на $\mathfrak{L}(\mathbb{T})$, т.е. предположим, что $dM = Wd\lambda + dM_s$ является мерой полного ранга на $\mathfrak{L}(\mathbb{T})$ и выполняется условие

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \ln(\det W)\, d\lambda > -\infty. \tag{5.2}$$

Пусть $f^+$ обозначает неотрицательную часть некоторой вещественнозначной функции $f$.

**Лемма 5.1.** *Для каждого $p \in (0,\infty)$ функции $\ln^+\|W^{\frac{2}{p}}\|$ и $\ln^+\|W^{-\frac{2}{p}}\|$ интегрируемы относительно $\lambda$.*

*Доказательство.* Интегрируемость функции $\ln^+\|W^{\frac{2}{p}}\|$ очевидна. Далее, из (5.2) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \ln\alpha(z)\lambda(dz) > -\infty, \tag{5.3}$$

где для $\lambda$-п.в. $z \in \mathbb{T}$ посредством $\alpha(z)$ обозначается наименьшее собственное значение матрицы $W(z)$. Если выбрать в качестве нормы $\|\cdot\|$ обычную операторную норму, то $\|W^{-\frac{2}{p}}\| = \alpha^{-\frac{2}{p}}$ $\lambda$-п.в., так что из (5.3) вытекает интегрируемость функции $\ln^+\|W^{-\frac{2}{p}}\|$ относительно $\lambda$. $\square$

**Лемма 5.2.** *Пусть $p \in (0,\infty)$. Пусть мера $M$ на $\mathfrak{L}(\mathbb{T})$ абсолютно непрерывна относительно $\lambda$, причем выполняется (5.2). Если функция $F$ есть предел некоторой последовательности $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq (L^p(M) \cap D_{n\times n})$ относительно метрики пространства $L^p(M)$, то $F \in D_{n\times n}$ и $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ стремится к $F$ равномерно на компактных подмножествах круга $\mathbb{D}$.*

*Доказательство.* Из теоремы 6.14 в [15] и из леммы 5.1 следует существование $\mathbb{C}_{n\times n}$-значной внешней функции полного ранга $\tilde{\Phi}$ такой, что $W^{-\frac{2}{p}} = \tilde{\Phi}^*\tilde{\Phi}$ $\lambda$-п.в. Значит выполнено

$$W^{\frac{2}{p}} = \Phi\Phi^* \quad \lambda\text{-п.в.}, \tag{5.4}$$

где $\Phi := \tilde{\Phi}^{-1}$, которая в силу леммы 1.2 также является внешней функцией. Поскольку $\Phi \in D_{n\times n}$, то $F_j\Phi \in D_{n\times n}$, а поскольку в силу леммы 3.2 имеем $F_j\Phi \in L^p(I_n d\lambda)$, то по теореме Полубариновой–Кочиной (см. [12, стр. 114] для скалярного случая и теорема тривиально переносится на матричный случай, поскольку матричное $H^p_{n\times n}$ есть по сути набор скалярных функций из $H^p$) $F_j\Phi \in H^p_{n\times n}$, $j \in \mathbb{N}$. Из той же леммы 3.2 вытекает, что $\{F_j\Phi\}_{j\in\mathbb{N}}$ есть последовательность Коши в $L^p(I_n d\lambda)$. Теперь аналогично доказательству Тумаркина [10, стр. 86–87] можно установить, что $\{F_j\Phi\}_{j\in\mathbb{N}}$ сходится равномерно на компактных подмножествах круга $\mathbb{D}$, предельная функция $\Psi$ принадлежит $H^p_{n\times n}$ и что имеет место соотношение

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \|\Psi - F_j\Phi\|_E^p \, d\lambda = 0. \tag{5.5}$$

Из (5.5),(5.4) и леммы 3.2 следует, что $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ стремится в $L^p(M)$ к функции $\Psi\Phi^{-1}$. Поэтому $\Psi\Phi^{-1} = F$ в $L^p(M)$ или, эквивалентно, $\Psi\Phi^{-1} = F$ $\lambda$-п.в. В силу того, что $\Psi \in H^p_{n\times n} \subseteq D_{n\times n}$ и $\Phi^{-1}$ как внешняя функция тоже принадлежит $D_{n\times n}$, получается $F \in D_{n\times n}$. □

**Лемма 5.3.** *Пусть $p$ и $M$ такие же, как в лемме* 5.2. *Тогда*

$$L^p_0(M) = L^p(M) \cap D_{n\times n}.$$

*Доказательство.* Включение

$$L^p_0(M) \subseteq L^p(M) \cap D_{n\times n} \tag{5.6}$$

непосредственно вытекает из леммы 5.2. Пусть $p \in [1,\infty)$ и $G \in L^p_0(M)^\perp$, т.е. $\int_{\mathbb{T}} Z^l W G^* d\lambda = 0$, $l \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, имеем

$$WG^* \in ZH^1_{n\times n}. \tag{5.7}$$

Если $F$ — любая функция из $L^p(M) \cap D_{n\times n}$, то $FWG^* \in D_{n\times n}$ и $FWG^*$ интегрируема относительно $\lambda$. Пользуясь теоремой Полубариновой–Кочиной и (5.7), получим, что $FWG^* \in ZH^1_{n\times n}$, и значит $\int_{\mathbb{T}} FWG^* d\lambda = 0$. Таким образом, получено $L^p_0(M)^\perp \subseteq (L^p(M) \cap D_{n\times n})^\perp$, что вместе с (5.6) дает требуемое равенство. Доказательство для случая $p \in (0,1)$ аналогично доказательству Тумаркина в скалярном случае [10, стр. 98–101] и опускается. □

Комбинируя лемму 5.3 и теорему 4.1, мы непосредственно получим следующий результат:

**Теорема 5.1.** *Пусть* $p \in (0, \infty)$ *и* $M$ *есть мера полного ранга на* $\mathfrak{L}(\mathbb{T})$*, причем выполняется* (5.2). *Тогда пространство* $L_0^p(M)$ *совпадает с множеством всех тех функций из* $L^p(M)$*, которые* $\lambda$*-п.в. равны граничным функциям из* $D_{n\times n}$.

Используя свойства конформного отображения $\varphi$, в частности леммы 2.1 и 2.3, предыдущую теорему можно обобщить на меры полного ранга на $\mathfrak{L}(\Gamma)$. Мы сформулируем соответствующий результат, но опускаем его доказательство, так как оно только очевидными деталями отличается от подробного доказательства Тумаркина в скалярном случае, см. доказательство теоремы 7 в [10].

**Теорема 5.2.** *Пусть* $p \in (0, \infty)$. *Пусть* $M$ *есть мера полного ранга на* $\mathfrak{L}(\Gamma)$*, причем выполняется* (5.1). *Тогда функция из* $L^p(M)$ *принадлежит* $L_0^p(M)$ *тогда и только тогда, когда она есть граничная функция такой аналитической функции* $\Phi$ *на* $\Delta$*, что* $\Phi(\varphi) \in D_{n\times n}$.

## 6. Пространства $L_\kappa^p(M)$

Пусть теперь $M$ снова любая $\mathbb{C}_{n\times n}^{\geq}$-значная мера на $\mathfrak{L}(\Gamma)$. Для $\kappa \in \mathbb{Z}$ введем пространство $L_\kappa^p(M) := \overline{\vee\{J^l : \ l \in (\kappa + \mathbb{N}_0)\}}$, $p \in (0, \infty)$. Конечно, если $0 \in \Gamma$ и $\kappa < 0$, то может случиться, что $J^\kappa \notin L^p(M)$. Поэтому при определении пространства $L_\kappa^p(M)$ мы предположим, что заведомо выполнено

$$J^\kappa \in L^p(M). \tag{6.1}$$

Из (6.1) следует, что $J^l \in L^p(M)$, $l \in (\kappa + \mathbb{N}_0)$, и таким образом, $L_\kappa^p(M)$ определено корректно. В настоящем параграфе мы обсудим вкратце вопрос выполнения равенства $L_\kappa^p(M) = L^p(M)$.

Очевидно, если $0 \notin \Gamma$, то умножение на $J$ есть гомеоморфизм пространства $L^p(M)$, причем $JL_\kappa^p(M) = L_{\kappa+1}^p(M)$. Следовательно, если $0 \notin \Gamma$, то равенство $L_\kappa^p(M) = L^p(M)$ имеет место для некоторого $\kappa \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда оно выполняется для всех $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Пусть $0 \in \Gamma$. Если точечная масса $M(\{0\})$ меры $M$ в точке $0$ не равна нулю, то $L_\kappa^p(M) \neq L^p(M)$ для $\kappa \in \mathbb{N}$, а (6.1) не выполняется для $\kappa \in (-\mathbb{N})$. Таким образом, мы можем предположить, что $M(\{0\}) = 0$. В таком случае, множество всех тех функций из $L^p(M)$, для которых существует (вообще говоря, зависящая от функции) окрестность точки $0$, где они равны нулю, является плотным подмножеством пространства $L^p(M)$. Поскольку оператор умножения на $J$ отображает это множество на себя, то для любого $l \in \mathbb{N}$ множество $J^l L^p(M)$ плотно в $L^p(M)$. Далее, если $\tilde{\kappa} \in \mathbb{Z}$, $\tilde{\kappa} \geq \kappa$, то $J^{\tilde{\kappa}-\kappa} L^p_\kappa(M) \subseteq L^p_{\tilde{\kappa}}(M)$ в силу непрерывности оператора умножения на $J$. Поэтому из равенства $L^p_\kappa(M) = L^p(M)$ следует равенство $L^p_{\tilde{\kappa}}(M) = L^p(M)$. Принимая еще во внимание включение $L^p_{\tilde{\kappa}}(M) \subseteq L^p_\kappa(M)$, мы получим следующую теорему:

**Теорема 6.1.** *Пусть $p \in (0, \infty)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ и выполнено* (6.1). *Предположим, что $0 \notin \Gamma$ или $0 \in \Gamma$ и $M(\{0\}) = 0$. При таких условиях $L^p_{\tilde{\kappa}}(M) = L^p(M)$ для некоторого $\tilde{\kappa} \geq \kappa$ тогда и только тогда, когда это равенство имеет место для всех $\tilde{\kappa} \geq \kappa$, $\tilde{\kappa} \in \mathbb{Z}$.*

**Следствие 6.1.** *В условиях предыдущей теоремы равенство $L^p_\kappa(M) = L^p(M)$ эквивалентно равенству $L^p_\kappa(M_a) = L^p(M_a)$.*

*Доказательство.* Равенство $L^p_\kappa(M) = L^p(M)$ эквивалентно равенству $L^p_0(M) = L^p(M)$ в силу теоремы 6.1, $L^p_0(M) = L^p(M)$ эквивалентно $L^p_0(M_a) = L^p(M_a)$ в силу следствия 4.2, а $L^p_0(M_a) = L^p(M_a)$ эквивалентно $L^p_\kappa(M_a) = L^p(M_a)$ снова в силу теоремы 6.1. □

## 7. Линейная регулярность пространств $L^p(M)$

Если $M$ есть $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значная мера на $\mathfrak{L}(\mathbb{T})$, то пространство $L^2(M)$ может служить спектральным пространством $n$-мерной слабо стационарной случайной последовательности, а равенство $L^2_0(M) = L^2(M)$ означает, что эта последовательность линейно сингулярна. Другой важный класс стационарных последовательностей образуют линейно регулярные последовательности. В связи с этим мы даем следующее определение:

**Определение 7.1.** *Пусть $p \in (0, \infty)$ и $M$ есть $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значная мера на $\mathfrak{L}(\Gamma)$. Пространство $L^p(M)$ называется линейно регулярным, если*

$$\bigcap_{\kappa \in \mathbb{N}} L^p_\kappa(M) = \{0\}. \tag{7.1}$$

Если $0 \in \Gamma$, то, очевидно, пространства $L^p(M)$ и $L^p(M - M(\{0\}))$ одновременно линейно регулярны или не линейно регулярны. Поэтому мы можем предположить, что $M(\{0\}) = 0$. Но тогда из теоремы 6.1 и следствия 4.1 следует, что независимо от того, где точка 0 расположена относительно кривой $\Gamma$, пространство $L^p(M)$ не может быть линейно регулярным, если $M_s \neq 0$. Таким образом, можно принять, что мера $M$ абсолютно непрерывна относительно $\gamma$, т.е. $M$ имеет вид $dM = W d\gamma$.

**Лемма 7.1.** *Пусть $p \in (0, \infty)$. Пространство $L^p(M) = L^p(W d\gamma)$ линейно регулярно тогда и только тогда, когда*

$$\bigcap_{\kappa \in \mathbb{N}} \overline{\varphi^\kappa L_0^p(\psi M)} = \{0\}, \tag{7.2}$$

*где замыкание берется в $L^p(\psi M)$.*

*Доказательство.* Пусть $U$ обозначает оператор умножения на функцию $J$ в пространстве $L^p(M)$. Из непрерывности оператора $U$ легко следует, что $\overline{U^\kappa L_0^p(M)} = L_\kappa^p(M)$, $\kappa \in \mathbb{N}$. С другой стороны, если $V$ есть изометрия из леммы 4.1, то $VUV^{-1}$ является оператором умножения на $\varphi$ в пространстве $L^p(\psi M)$. Принимая еще во внимание лемму 4.2, мы видим, что условия (7.1) и (7.2) эквивалентны. □

**Теорема 7.1.** *Пусть $p \in (0, \infty)$. Если выполнено условие:*

$$\varphi \text{ не является внешней функцией} \tag{7.3}$$

*и $(W(\varphi))^{\frac{2}{p}}$ допускает факторизацию*

$$(W(\varphi))^{\frac{2}{p}} = \Phi\Phi^* \tag{7.4}$$

*с некоторой функцией $\Phi \in D_{n\times n}$, то $L^p(M) = L^p(W d\gamma)$ линейно регулярно.*

*Доказательство.* Пусть $\tilde{\varphi}$ есть внешняя часть функции $\varphi'$ и пусть $\tilde{\Phi} := \tilde{\varphi}\Phi$. Функция $\tilde{\Phi}$ принадлежит $D_{n\times n}$. В силу (4.7) получаем $\left(\frac{d(\psi M)}{d\lambda}\right)^{\frac{2}{p}} = (W(\varphi)|\varphi'|)^{\frac{2}{p}} = (W(\varphi)|\tilde{\varphi}|)^{\frac{2}{p}} = \tilde{\Phi}\tilde{\Phi}^*$, причем из этого равенства видно, что $\tilde{\Phi} \in H_{n\times n}^p$. Учитывая лемму 3.2, получим, что отображение $F \to F\tilde{\Phi}$, $F \in L^p(\psi M)$, отображает $L_0^p(\psi M)$ на некоторое подпространство $\tilde{H}_{n\times n}^p$ пространства $H_{n\times n}^p$, т.е. (7.2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_{\kappa \in \mathbb{N}} \overline{\varphi^\kappa \tilde{H}_{n\times n}^p} = \{0\}, \tag{7.5}$$

при этом замыкание берется в $H_{n\times n}^p$. Но если $\varphi$ не является внешней функцией, то (7.5) имеет место. Поэтому применение леммы 7.1 завершает доказательство. □

Возникает вопрос, необходимы ли условия предыдущей теоремы для линейной регулярности пространства $L^p(M)$. При $p = 2$ и для

$\Gamma = \mathbb{T}$ условие (7.4) действительно необходимо, см., например, теорему 4.1 в [5, с. 74]. Заметим, что для мер полного ранга представление (7.4) существует тогда и только тогда, когда $(\det W(\varphi))^{\frac{2}{p}}$ допускает аналогичную факторизацию, что легко следует из [15, Теорема 6.14]. И поскольку факторизуемость скалярных функций не зависит от $p$, то эта же независимость имеет место для представления (7.4), если $M$ — мера полного ранга. Что касается условия (7.3), то мы покажем, что оно в самом деле необходимо.

Для $z_0 \in \mathbb{T}$ определим $\mathcal{P}_{n\times n}(z_0) := \{Q \in \mathcal{P}_{n\times n} : \ Q(z_0) = 0\}$.

**Лемма 7.2.** *Пусть $M$ есть $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значная мера на $\mathfrak{L}(\mathbb{T})$, которая абсолютно непрерывна относительно $\lambda$, т.е. $dM = W d\lambda$. Если $\varphi$ является внешней функцией, то $\overline{\varphi L^p_0(W d\lambda)} = L^p_0(W d\lambda),\ p \in (0,\infty)$.*

*Доказательство.* Доказательство распадается на несколько шагов:

$(i)$: Поскольку $\hat{\Phi} Z^l$ можно на $\mathbb{T}$ равномерно приблизить $\mathbb{C}_{n\times n}$-значными многочленами, то $\hat{\Phi} Z^l \in L^p_0(W d\lambda),\ l \in \mathbb{N}_0$. Следовательно,

$$\overline{\varphi L^p_0(W d\lambda)} \subseteq L^p_0(W d\lambda) \tag{7.6}$$

из-за непрерывности оператора умножения на $\varphi$ и из-за замкнутости множества $L^p_0(W d\lambda)$. Если $\varphi$ не имеет нулей, то применяя (7.6) к $\varphi^{-1}$, получим $\varphi^{-1} L^p_0(W d\lambda) \subseteq L^p_0(W d\lambda)$ или $L^p_0(W d\lambda) \subseteq \varphi L^p_0(W d\lambda) \subseteq \overline{\varphi L^p_0(W d\lambda)}$, что вместе с (7.6) дает требуемый результат. Будем теперь предполагать, что $\varphi$ имеет единственный нуль в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{T}$.

$(ii)$: Если функция

$$z \to (z - z_0)^{-1} I_n, \qquad z \in \mathbb{T}, \tag{7.7}$$

принадлежит $L^p(W d\lambda)$, то она принадлежит и $L^p_0(W d\lambda)$. В самом деле, поскольку $|z - z_0|^{-1} \geq |z - \frac{j+1}{j} z_0|^{-1},\ z \in \mathbb{T},\ j \in \mathbb{N}$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеем $\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \|((z - z_0)^{-1} I_n - (z - \frac{j+1}{j} z_0)^{-1} I_n)(W(z))^{\frac{1}{p}}\|^p_E \lambda(dz) = 0$. Очевидно, что все функции $z \to (z - \frac{j+1}{j} z_0)^{-1} I_n,\ z \in \mathbb{T},\ j \in \mathbb{N}$, принадлежат $L^p_0(W d\lambda)$, поэтому функция из (7.7) также принадлежит $L^p_0(W d\lambda)$.

$(iii)$: Применяя результат $(ii)$ к мере $|z - z_0|^p W(z) \lambda(dz),\ z \in \mathbb{T}$, мы можем из равенства $\int_{\mathbb{T}} \|(I_n - (z - z_0) Q(z))(W(z))^{\frac{1}{p}}\|^p_E \lambda(dz) = \int_{\mathbb{T}} \|((z - z_0)^{-1} I_n - Q(z))(|z - z_0|^p W(z))^{\frac{1}{p}}\|^p_E \lambda(dz),\ Q \in \mathcal{P}_{n\times n}$, получить, что постоянные принадлежат $\overline{\mathcal{P}_{n\times n}(z_0)}$. Поэтому

$$L^p_0(W d\lambda) \subseteq \overline{\mathcal{P}_{n\times n}(z_0)}. \tag{7.8}$$

$(iv)$: Легко видеть, что замыкание $\varphi\mathcal{P}$ в $\mathcal{A}$ есть замкнутый идеал. Точка $z_0$ есть единственный совместный нуль всех функций этого идеала. Поскольку, кроме того, внешняя функция $\varphi$ принадлежит этому идеалу, то из теоремы в [14, стр. 124] следует, что замыкание множества $\varphi\mathcal{P}$ в $\mathcal{A}$ совпадает с множеством всех $f \in \mathcal{A}$ таких, что $f(z_0) = 0$. Следовательно, замыкание множества $\varphi\mathcal{P}_{n\times n}$ в $\mathcal{A}_{n\times n}$ совпадает с множеством всех $F \in \mathcal{A}_{n\times n}$ таких, что $F(z_0) = 0$. В частности, $\mathcal{P}_{n\times n}(z_0)$ есть подмножество замыкания множества $\varphi\mathcal{P}_{n\times n}$ в $\mathcal{A}_{n\times n}$, что приводит к включению

$$\overline{\mathcal{P}_{n\times n}(z_0)} \subseteq \overline{\varphi L_0^p(Wd\lambda)}. \tag{7.9}$$

Сравнение (7.6), (7.8) и (7.9) завершает доказательство. □

Применяя лемму 7.2 к функции $\varphi^\kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$, и учитывая лемму 7.1 и рассуждения перед ней, получаем следующую теорему:

**Теорема 7.2.** *Пусть $p \in (0,\infty)$ и пусть $M$ есть $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значная мера на $\mathfrak{L}(\Gamma)$, которая абсолютно непрерывна относительно $\gamma$. Если функция $\varphi$ является внешней, то $L^p(M)$ не может быть линейно регулярным.*

Если $p$ и $M$ такие, как в предыдущей теореме, а $0 \in \mathbb{C}\backslash\Delta$, то из леммы 2.2 и этой теоремы следует, что пространство $L^p(M)$ не может быть линейно регулярным. Это можно увидеть и непосредственно, т.к. в этом случае все функции $J^l$, $l \in \mathbb{Z}$, аналитичны, а значит принадлежат пространству $L^p_\kappa(M)$ для любого $\kappa \in \mathbb{N}$.

## 8. Незамкнутая кривая Жордана

Рассмотрим вкратце ситуацию, когда $\Gamma$ является незамкнутой кривой Жордана, которая может быть и не спрямляемой. Как непрерывный образ компактного множества $\mathbb{T}$, кривая $\Gamma$ есть компактное множество. Пусть $\mathcal{C}_{n\times n}(\Gamma)$ — банахово пространство всех $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных непрерывных на $\Gamma$ функций $F$ с нормой $|||F|||_{\mathcal{C}_{n\times n}} := \max_{t\in\Gamma} \|F(t)\|_E$. Из теоремы Лаврентьева, см., например, [18, стр. 104], следует, что $\mathcal{P}_{n\times n}$ плотно в $\mathcal{C}_{n\times n}(\Gamma)$.

**Теорема 8.1.** *Если $\Gamma$ есть незамкнутая кривая Жордана, то $L_0^p(M) = L^p(M)$ для любой $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значной меры $M$ на $\mathfrak{L}(\Gamma)$ и для любого $p \in (0,\infty)$.*

*Доказательство.* Пусть $p \in [1,\infty)$ и $G \in L_0^p(M)^\perp$. Тогда $\int_\Gamma Q\frac{dM}{d\tau}G^* d\tau = 0$ для $Q \in \mathcal{P}_{n\times n}$, следовательно, для любой $F \in \mathcal{C}_{n\times n}(\Gamma)$ имеет место

$$\int\limits_\Gamma F\frac{dM}{d\tau}G^* d\tau = 0 \tag{8.1}$$

в силу плотности $\mathcal{P}_{n\times n}$ в $\mathcal{C}_{n\times n}(\Gamma)$. Из следствия 2 в [19, стр. 387] можно легко вывести, что существует взаимно однозначное соответствие между пространством всех $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных мер на $\mathfrak{L}(\Gamma)$ и пространством всех непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{C}_{n\times n}(\Gamma)$. Оно получается, если каждой такой мере $\tilde{M}$ поставить в соответствие функционал $F \to \operatorname{tr}\int_\Gamma F\frac{d\tilde{M}}{d\tilde{\sigma}}\,d\tilde{\sigma},\ F \in \mathcal{C}_{n\times n}(\Gamma)$, причем $\tilde{\sigma}$ является какой-то $\sigma$-конечной неотрицательной мерой на $\mathfrak{L}(\Gamma)$, относительно которой все элементы меры $\tilde{M}$ абсолютно непрерывны. Поэтому из (8.1) следует $\frac{dM}{d\tau}G^* = 0$ $\tau$-п.в., что дает $G = 0$ в $L^q(M)$. Таким образом, $L_0^p(M)^\perp = \{0\}$, а это эквивалентно $L_0^p(M) = L^p(M),\ p \in [1,\infty)$. Но тогда из леммы 3.1 следует, что такое равенство имеет место для всех $p \in (0,\infty)$. $\square$

Простыми следствиями предыдущей теоремы являются аналогичные результаты для пространств $L_\kappa^p(M),\ \kappa \in \mathbb{Z}$. А именно, поскольку $L_0^p(M) \subseteq L_\kappa^p(M)$ для $\kappa \in (-\mathbb{N})$, мы можем предположить, что $\kappa \in \mathbb{N}$. Тогда мы, очевидно, имеем $L_\kappa^p(M) \neq L^p(M)$, если $0 \in \Gamma$ и $M(\{0\}) \neq 0$. А в случаях $0 \notin \Gamma$ или $0 \in \Gamma$ и $M(\{0\}) = 0$, равенство $L_\kappa^p(M) = L^p(M)$ получается аналогично к доказательству теоремы 6.1.

## Литература


[1] L. Klotz, *Some Banach spaces of measurable operator-valued functions* // Probab. Math. Statist. (1991), N 12, 85–97.

[2] L. Klotz, *Inclusion relations for some $L^p$-spaces of operator-valued functions* // Math. Nachr. (1991), N 150, 119–126.

[3] A. J. Duran, P. Lopez-Rodriguez, *The $L^p$-space of a positive definite matrix of measures and density of matrix polynomials in $L^1$* // J. Approx. Theory, (1997), N 90, 299–318.

[4] И. С. Кац, *О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями* // Записки НИИ математики и механики ХГУ им. Горького и ХМО, **22** (1950), 95–113.

[5] Ю. А. Розанов, *Стационарные случайные процессы.* Москва, “Наука”, 1990.

[6] M. Rosenberg, *The square-integrability of matrix-valued functions with respect to a non-negative Hermitian measure* // Duke Math. J. (1964), N 31, 291–298.

[7] H. Helson, D. Lowdenslager, *Prediction theory and Fourier series in several variables* // Acta Math. (1958), N 99, 165–202.

[8] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* Москва, “Наука”, 1965.

[9] Я. Л. Геронимус, *О замкнутости некоторых систем функций в пространстве $L^p_\sigma$* // Записки НИИ математики и механики ХГУ им. Горького и ХМО, **21** (1949), 24–45.

[10] Г. Ц. Тумаркин, *Приближение в среднем функций на спрямляемых кривых* // Мат. сборник, **42(84)** (1957), N 1, 79–128.

[11] L. Klotz, *A matrix generalization of a theorem of Szegö* // Anal. Math. (1992), N 18, 63–72.

[12] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* Гос. изд-во тех.-теор. литературы, Москва Ленинград, 1950.

[13] P. L. Duren, *Theory of $H^p$ Spaces.* Academic Press, New York and London, 1970.

[14] К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций.* Издат-во иностр. лит-ры, Москва, 1963.

[15] M. Rosenblum, J. Rovnyak, *Hardy Classes and Operator Theory.* Oxford University Press, New York, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[16] Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* “Мир”, Москва, 1970.

[17] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* “Наука”, Москва, 1980.

[18] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций. Том 2.* “Наука”, Москва, 1968.

[19] N. Dinculeanu, *Vector Measures.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1966.

[20] В. Н. Засухин, *К теории многомерных стационарных процессов* // ДАН СССР (1941), N 33, 435–437.

## Сведения об авторах

**Люц Клёц**

Fachbereich Mathematik Universität
D-7010 Leipzig
Deutschland

**Сергей Михайлович Загороднюк**

Механико-математический факультет
Харьковский национальный
университет им. Каразина,
пл. Свободы 4,
Харьков 61077
Украина
*E-Mail:* `zagorodnyuk@univer.kharkov.ua`,
`Sergey.M.Zagorodnyuk@univer.kharkov.ua`