Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 2, 257 – 277

О функциях на сфере с нулевыми интегралами по окружностям фиксированного радиуса

Валерий В. Волчков, Виталий В. Волчков, Ирина М. Савостьянова

(*Представлена Р. М. Тригубом*)

Аннотация. Изучаются функции на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$, имеющие нулевые взвешенные средние по окружностям фиксированных радиусов. Найдено описание таких функций в виде разложений по сферическим гармоникам. Получены различные аналоги известных теорем об s радиусах на $\mathbb{S}^2$, а также новые локальные теоремы об одном и двух радиусах.

2010 MSC. 26B15, 44A15, 49Q15, 53C65, 53C35.

Ключевые слова и фразы. Сферические средние, функции Лежандра, теоремы о двух радиусах.

1. Введение

Одним из элементарных свойств непостоянной непрерывной 2π-периодической функции на вещественной оси является отсутствие у нее периода, несоизмеримого с π. В терминах интегральных средних это означает, что всякая непрерывная на единичной окружности $\mathbb{S}^1$ функция, имеющая нулевые интегралы по любому интервалу длины $2r$ на $\mathbb{S}^1$, является тождественным нулем, если r/π иррационально. Указанный факт допускает нетривиальные обобщения для многомерной сферы $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$. Г. Минковский обнаружил (см. [1]), что совокупность непрерывных функций на $\mathbb{S}^2$, имеющих нулевые интегралы по всем большим окружностям, совпадает с классом нечетных непрерывных функций. Для случая функций с нулевыми интегралами по "полусферам" подобный результат установлен П. Функом [2].

Следуя Г. Минковскому, в разделе 6 своей знаменитой работы [3] И. Радон рассмотрел и, по существу, решил задачу об описании функций на $\mathbb{S}^2$ с нулевыми интегралами по всем окружностям фиксированного радиуса. Этот результат получил дальнейшее развитие и уточнение в работах П. Унгара, Р. Шнейдера, К. А. Беренстейна, Л. Зальцмана и др. (см. [4–6]). В частности, была доказана следующая, так называемая, “freak theorem” (см. [5, 6]).

Теорема A. Пусть $f \in L^1(\mathbb{S}^n)$ и

$$\int\limits_B f d\omega = 0, \tag{1.1}$$

где B — произвольный геодезический шар фиксированного радиуса r на $\mathbb{S}^n$, $d\omega$ — n-мерная мера Лебега. Тогда, если $P^{-n/2}_{m+n/2-1}(\cos r) \neq 0$ при $m = 1, 2, \ldots$, где $P^{-n/2}_{m+n/2-1}$ — функция Лежандра первого рода на $(-1, 1)$, то $f = 0$. Более того, если (1.1) выполнено для всех геодезических шаров с радиусами $r_1, r_2, \ldots, r_s$ и уравнения

$$P^{-n/2}_{m+n/2-1}(\cos r_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, s \tag{1.2}$$

не имеют общего решения $m \in \mathbb{N}$, то $f = 0$. Если же уравнения (1.2) имеют общее решение, то существует ненулевая сферическая гармоника, удовлетворяющая (1.1).

Множество тех r, для которых $P^{-n/2}_{m+n/2-1}(\cos r) \neq 0$ при $m = 1, 2, \ldots$, а также его дополнение всюду плотны на отрезке $[0; \pi]$ (см. [5]). Аналоги теоремы A для компактных симметрических и локально симметрических пространств содержатся в [7, 8].

Теорема A носит глобальный характер и ее доказательство основано на инвариантности пространства решений уравнения (1.1) относительно ортогональной группы $O(n+1)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. При переходе от глобального случая к локальному, в частности, когда f задана в некотором шаре B_R на $\mathbb{S}^n$ и (1.1) выполнено для любого $B \subset B_R$, трудности существенно возрастают. При этом возникают новые явления. Например, в отличие от теоремы A, функции на $\mathbb{S}^n \setminus \{\xi\}$ (ξ — произвольная точка сферы), имеющие нулевые интегралы по всем шарам из $\mathbb{S}^n \setminus \{\xi\}$ любого фиксированного радиуса, образуют бесконечномерное пространство.

Свойства функций, заданных на подмножествах $\mathbb{S}^n$ и удовлетворяющих условиям вида (1.1), наиболее полно изучены в случае геодезических шаров одного или двух фиксированных радиусов (см. [9]). Обобщения для компактных двухточечно-однородных пространств получены в [10, 11]. Там же разработана подобная теория для некомпактных симметрических пространств, а также для некоторых групп и гиперкомплексных систем.

В настоящее время особое внимание уделяется различным обобщениям сферических средних, в которых рассматривается интегрирование функций с некоторым весом [11–15]. Проблема инъективности для соответствующих интегрально-геометрических преобразований имеет важное значение для приложений в ряде вопросов анализа [9]. Как правило, при ее исследовании возникают дополнительные трудности, преодоление которых требует новых идей и методов. Например, при изучении преобразования Радона с весом потребовалось, в отличие от классической ситуации, привлечение техники микролокального анализа [12, 13]. Аналогичные вопросы для функций на сфере с нулевыми взвешенными средними по большим окружностям требуют изучения инвариантных подпространств ядра обобщенного преобразования Минковского [15].

В данной работе получены различные аналоги теоремы А для взвешенных сферических средних на двумерной сфере. Выбор веса $\mathcal{P}_M$ в интегралах (см. определение (2.1) ниже) мотивирован естественными обобщениями уравнений свертки на $\mathbb{S}^2$ с радиальными (т. е., $O(2)$-инвариантными) распределениями, теория которых активно развивается в последнее время [9–11]. Отметим, что рассматриваемый случай интересен также и тем, что наличие указанного веса препятствует применению общей теории трансмутационных операторов, которая является мощным аппаратом для изучения задач подобного типа на различных однородных пространствах (см. [10, 11]).

2. Формулировки основных результатов

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, целых неотрицательных и комплексных чисел соответственно. Как и выше, обозначим через P_ν^μ $(\mu, \nu \in \mathbb{C})$ функции Лежандра первого рода на $(-1, 1)$, т.е.

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right), \qquad \mu \notin \mathbb{N},$$

$$P_\nu^\mu(x) = (-1)^\mu (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^\mu P_\nu(x), \qquad \mu \in \mathbb{N},$$

где F — гипергеометрическая функция Гаусса, Γ — гамма-функция и $P_\nu = P_\nu^0$ (см. [16, гл. 3, п. 3.4 (6) и п. 3.6.1 (6)]). Известно (см. [9, часть 2, гл. 3]), что при фиксированных $M \in \mathbb{Z}_+$, $r \in (0; \pi)$ функция $h(\nu) = P_\nu^{-M}(\cos r)$ имеет бесконечно много нулей. Все нули h являются вещественными, простыми, расположены симметрично относительно $-\frac{1}{2}$ и лежат вне отрезка $[-M-1, M]$. Для множества нулей этой функции из промежутка $(M;+\infty)$ будет использоваться символ $N_M(r)$. Положим также

$$\mathcal{Z}_M(r)=\left\{l\in\mathbb{N}: l>M, P_l^{-M}(\cos r)=0\right\},$$

$$E_M=\{l\in\mathbb{Z}_+: 0\leq l\leq M-1\}, \quad \Omega_M(r)=E_M\cup\mathcal{Z}_M(r).$$

Перечислим некоторые свойства множеств $\mathcal{Z}_M(r)$ и $N_M(r)$ (см. [16, гл. 3, п. 3.4 (20)], [8], [9, часть 2, гл. 2, доказательство леммы 2.18]):

а) $\mathcal{Z}_M(\pi/2)=N_M(\pi/2)=\{2k+M+1, k\in\mathbb{Z}_+\}$;

б) множество $\{r\in(0,\pi): \mathcal{Z}_M(r)\neq\varnothing\}$ является счетным и всюду плотным на $(0,\pi)$;

в) для любого $r_1\in(0,\pi)$ множество $\{r_2\in(0,\pi): N_M(r_1)\cap N_M(r_2)\neq\varnothing\}$ является счетным и всюду плотным на $(0,\pi)$.

Введем сферические координаты φ, θ на $\mathbb{S}^2$ следующим образом:

$$\xi_1=\sin\theta\sin\varphi,\ \xi_2=\sin\theta\cos\varphi,\ \xi_3=\cos\theta, \quad \varphi\in(0,2\pi),\ \theta\in(0,\pi),$$

где $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ — декартовы координаты точки $\xi\in\mathbb{S}^2$. В координатах φ,θ произвольная функция $f:\mathbb{S}^2\to\mathbb{C}$ записывается в виде $f^\circ(\varphi,\theta)=f(\sin\theta\sin\varphi,\sin\theta\cos\varphi,\cos\theta)$. Расстояние $d(\xi,\eta)$ между точками $\xi,\eta\in\mathbb{S}^2$ вычисляется по формуле

$$d(\xi,\eta)=\arccos(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3).$$

В частности, $d(\xi,o)=\arccos\xi_3=\theta$, где $o=(0,0,1)$.

Пусть

$$B_R=\{\xi\in\mathbb{S}^2: d(\xi,o)<R\}, \quad R>0.$$

Отметим, что при $R>\pi$ шар B_R совпадает с $\mathbb{S}^2$. Всюду в дальнейшем считаем, что r — фиксированное число, принадлежащее интервалу $(0;\min\{R,\pi\})$, $\overline{B}_r$ — замыкание B_r и S_r — граница B_r, т. е. $S_r=\{\xi\in\mathbb{S}^2: d(\xi,o)=r\}$. Определим следующие классы функций:

$$U_{r,M}(B_R)=\left\{f\in C(B_R): \int\limits_{S_r} f(\tau\xi)\mathcal{P}_M(\xi)dl(\xi)=0 \quad \forall\tau\in O(3): \tau\overline{B}_r\subset B_R\right\}, \tag{2.1}$$

$$U_{r,M}^m(B_R)=\left(U_{r,M}\cap C^m\right)(B_R), \quad m\in\mathbb{Z}_+\cup\{\infty\},$$

где $\mathcal{P}_M(\xi)=(\xi_1+i\xi_2)^M$, dl — элемент длины на $\mathbb{S}^2$. При $M=0$ класс $U_{r,M}(B_R)$ можно рассматривать как множество функций $f\in C(B_R)$, удовлетворяющих уравнению свертки $f * \sigma_r = 0$ в шаре B_{R-r}, где σ_r — дельта-функция, сосредоточенная на S_r. Уравнения такого типа изучались многими авторами для различных однородных пространств (см. [9–11]). Основная цель данной работы состоит в изучении структуры классов $\bigcap_{j=1}^s U_{r_j,M}(B_R)$ и $\bigcap_{j=1}^s U_{r,M_j}(B_R)$, где $s \in \mathbb{N}$, $r_1, \dots, r_s \in (0, \min\{R, \pi\})$, $M_1, \dots, M_s \in \mathbb{Z}_+$.

Сначала рассмотрим случай, когда $R > \pi$, т. е. $B_R = \mathbb{S}^2$. Встречающиеся ниже суммы с пустым множеством индексов суммирования считаются равными нулю.

Теорема 2.1. *Пусть $f \in C(\mathbb{S}^2)$. Функция f принадлежит классу $U_{r,M}(\mathbb{S}^2)$, тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде*

$$f(\xi) = \sum_{l\in\Omega} \sum_{k=-l}^{l} c_{k,l} P_l^{-k}(\cos\theta) e^{ik\varphi}, \tag{2.2}$$

где $\Omega = \Omega_M(r)$,

$$c_{k,l} = \frac{(-1)^k(2l+1)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f^\circ(\varphi, \theta) P_l^k(\cos\theta) e^{-ik\varphi} \sin\theta d\theta d\varphi, \tag{2.3}$$

и сходимость в (2.2) понимается в смысле пространства $L^2(\mathbb{S}^2)$.

Обозначим через $\mathcal{H}_l$ пространство сферических гармоник степени l на $\mathbb{S}^2$ (см. [17, гл. 4]). Положим

$$H_M = \sum_{l=0}^{M-1} \mathcal{H}_l.$$

Тогда

$$H_M \subset U_{r,M}(\mathbb{S}^2) \quad \text{для любого } r \in (0, \pi). \tag{2.4}$$

Теорема 2.2. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $r_1, \dots, r_s \in (0, \pi)$, $f \in C(\mathbb{S}^2)$. Тогда для того чтобы $f \in \bigcap_{j=1}^s U_{r_j,M}(\mathbb{S}^2)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение (2.2), в котором $\Omega = E_M \cup \big\{ \bigcap_{j=1}^s \mathcal{Z}_M(r_j) \big\}$. В частности, если $\bigcap_{j=1}^s \mathcal{Z}_M(r_j) = \varnothing$, то*

$$\bigcap_{j=1}^{s} U_{r_j,M}(\mathbb{S}^2) = H_M.$$

Теорема 2.3. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $M_1, \dots, M_s \in \mathbb{Z}_+$, $r \in (0, \pi)$, $f \in C(\mathbb{S}^2)$. Тогда для того чтобы $f \in \bigcap_{j=1}^s U_{r,M_j}(\mathbb{S}^2)$, необходимо и достаточно,* *чтобы имело место разложение* (2.2), *в котором* $\Omega = \bigcap_{j=1}^{s} \Omega_{M_j}(r)$. *В частности, если* $s = 2$, $M_1 > M_2$ *и* $\mathcal{Z}_{M_1}(r) \cap \mathcal{Z}_{M_2}(r) = \varnothing$, *то*

$$\big(U_{r,M_1} \cap U_{r,M_2}\big)(\mathbb{S}^2) = \sum_{l \in \Omega} \mathcal{H}_l,$$

где

$$\Omega = E_{M_2} \cup \big\{l \in \mathbb{N} : M_2 + 1 \leq l \leq M_1 - 1,\ l \in \mathcal{Z}_{M_2}(r)\big\}. \tag{2.5}$$

Теоремы 2.1 и 2.2 обобщают и уточняют известные результаты П. Унгара, Р. Шнейдера, К. А. Беренстейна и Л. Зальцмана (см. [4–6], а также теорему A в § 1). Теорема 2.3 является сферическим аналогом одного из результатов В. В. Волчкова [18].

Перейдем теперь к изучению указанных выше классов при $0 < R \leq \pi$. Всякой функции $f \in C(B_R)$ поставим в соответствие ряд Фурье

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^k, \tag{2.6}$$

где $f^k(\xi) = f_k(\theta) e^{ik\varphi}$,

$$f_k(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^\circ(\alpha, \theta) e^{-ik\alpha} d\alpha.$$

Если $f \in C^\infty(B_R)$, то ряд (2.6) сходится к f в стандартной топологии пространства $C^\infty(B_R)$ (см. [10, гл. 11, п. 11.1]).

Положим

$$p_{\nu,k}(\theta) = P_\nu^{-k}(\cos\theta), \tag{2.7}$$

$$S_{\nu,k}(\xi) = p_{\nu,|k|}(\theta) e^{ik\varphi}, \quad \nu \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Функция $S_{\nu,k}$ является вещественно-аналитической в B_π. Кроме того,

$$\triangle_0 S_{\nu,k} = -\nu(\nu+1) S_{\nu,k}, \tag{2.9}$$

где $\triangle_0$ — оператор Лапласа на $\mathbb{S}^2$ (см. [9, часть 2, гл. 3, формула (3.9)]).

Теорема 2.4. *Пусть* $M \in \mathbb{Z}_+$, $0 < r < R \leq \pi$, $f \in C^\infty(B_R)$. *Тогда для того чтобы* $f \in U_{r,M}(B_R)$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $k \in \mathbb{Z}$ *имело место разложение*

$$f^k(\xi) = \sum_{\nu \in N_M(r)} \alpha_{\nu,k} S_{\nu,k}(\xi) + \sum_{j=0}^{M-|k|-1} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(\xi),$$

где $\psi_{j,k}(\xi) = \xi_3^j(\xi_2 + i\xi_1 \operatorname{sign} k)^{|k|}$, $\alpha_{\nu,k}$, $\beta_{j,k} \in \mathbb{C}$ *и* $\alpha_{\nu,k} = O(\nu^{-a})$ *при* $\nu \to +\infty$ *для любого* $a > 0$.

Этот результат позволяет получить локальные теоремы об одном и двух радиусах для взвешенных сферических средних на $\mathbb{S}^2$. Для упрощения формулировок мы не будем делать различий в обозначениях пространств сферических гармоник на $\mathbb{S}^2$ и их сужений на B_R. Запись $A_1 \subsetneq A_2$ будет означать, что множество A_1 является собственным подмножеством множества A_2.

Теорема 2.5. *Пусть* $M \in \mathbb{Z}_+$, $0 < R \leq \pi$, $r_1, r_2 \in (0, R)$. *Тогда:*

(*i*) *если* $R > r_1 + r_2$ *и* $N_M(r_1) \cap N_M(r_2) = \varnothing$, *то*

$$\big(U_{r_1,M} \cap U_{r_2,M}\big)(B_R) = H_M;$$

(*ii*) *если* $R = r_1 + r_2$ *и* $N_M(r_1) \cap N_M(r_2) = \varnothing$, *то*

$$\big(U^\infty_{r_1,M} \cap U^\infty_{r_2,M}\big)(B_R) = H_M;$$

(*iii*) *если* $R < r_1 + r_2$ *или* $N_M(r_1) \cap N_M(r_2) \neq \varnothing$, *то*

$$H_M \subsetneq \big(U^\infty_{r_1,M} \cap U^\infty_{r_2,M}\big)(B_R).$$

Из [10, теорема 21.5] следует, что в случае (*ii*) равенство $\big(U^m_{r_1,M} \cap U^m_{r_2,M}\big)(B_R) = H_M$ неверно, вообще говоря, для любого $m \in \mathbb{Z}_+$. При этом важную роль играет скорость возможного сближения нулей функций $P_\nu^{-M}(\cos r_1)$ и $P_\nu^{-M}(\cos r_2)$ на бесконечности.

Теорема 2.6. *Пусть* $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_+$, $M_1 > M_2$, $0 < r < R \leq \pi$ *и* $H = \sum_{l\in\Omega} \mathcal{H}_l$, *где* Ω *определено равенством* (2.5). *Тогда:*

(*i*) *если* $R > 2r$ *и* $N_{M_1}(r) \cap N_{M_2}(r) = \varnothing$, *то*

$$\big(U_{r,M_1} \cap U_{r,M_2}\big)(B_R) = H;$$

(*ii*) *если* $R = 2r$ *и* $N_{M_1}(r) \cap N_{M_2}(r) = \varnothing$, *то*

$$\big(U^\infty_{r,M_1} \cap U^\infty_{r,M_2}\big)(B_R) = H;$$

(*iii*) *если* $R < 2r$ *или* $N_{M_1}(r) \cap N_{M_2}(r) \neq \varnothing$, *то*

$$H \subsetneq \big(U^\infty_{r,M_1} \cap U^\infty_{r,M_2}\big)(B_R).$$

Отметим, что в работе [18] получены аналоги теорем 2.4–2.6 для вещественного евклидова пространства. Однако, методы в [18] существенно используют векторную структуру $\mathbb{R}^n$ и требуют значительного развития в сферическом случае.

3. Вспомогательные утверждения

Для $\lambda,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1, -2, \dots$ положим

$$\Phi_{\lambda,\alpha,\beta}(\theta) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1+\lambda}{2}, \frac{\alpha+\beta+1-\lambda}{2}; \alpha+1; \sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{3.1}$$

При $\beta = \pm\alpha$ функции $\Phi_{\lambda,\alpha,\beta}$ выражаются через функции Лежандра по формулам

$$\Phi_{2\lambda+1,\alpha,\alpha}(\theta) = 2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)(\sin\theta)^{-\alpha}P_{\lambda}^{-\alpha}(\cos\theta), \tag{3.2}$$

$$\Phi_{2\lambda+1,\alpha,-\alpha}(\theta) = \Gamma(\alpha+1)\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha}P_{\lambda}^{-\alpha}(\cos\theta) \tag{3.3}$$

(см. [16, гл. 3, п. 3.4 (6), п. 3.5 (8)]). Введем дифференциальный оператор $D_{\alpha,\beta}$, действующий по правилу

$$(D_{\alpha,\beta}f)(\theta) = \frac{df}{d\theta} + \frac{(\beta-\alpha)\cos\theta - \alpha - \beta}{2\sin\theta}f(\theta).$$

Лемма 3.1. *Имеют место равенства*

$$D_{\alpha,\beta}\left(\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta}\Phi_{\lambda,\alpha,\beta}(\theta)\right) = \frac{(\alpha-\beta+1)^2-\lambda^2}{4(\alpha+1)} \times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta-1}\Phi_{\lambda,\alpha+1,\beta-1}(\theta), \tag{3.4}$$

$$D_{\alpha,-\alpha}\big((\sin\theta)^{\alpha}\Phi_{\lambda,\alpha,\alpha}(\theta)\big) = \frac{(2\alpha+1)^2-\lambda^2}{8(\alpha+1)}(\sin\theta)^{\alpha+1}\Phi_{\lambda,\alpha+1,\alpha+1}(\theta). \tag{3.5}$$

Доказательство. Используя формулу

$$\frac{d}{dz}F(a,b;c;z) = \frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;z)$$

(см. [16, гл. 2, п. 2.8 (20)]), получаем

$$\frac{d}{d\theta}\Phi_{\lambda,\alpha,\beta}(\theta) = \frac{(\alpha+\beta+1)^2-\lambda^2}{8(\alpha+1)}\sin\theta\Phi_{\lambda,\alpha+1,\beta+1}(\theta).$$

Теперь (3.4) следует из соотношения

$$(a+b-c)F(a,b;c;z) + \frac{(c-b)(c-a)}{c}F(a,b;c+1;z)$$

$$+\frac{ab}{c}(z-1)F(a+1,b+1;c+1;z)=0$$

(см. [19, гл. 7, §5, п. 2 (14)]). Полагая в (3.4) $\beta=-\alpha$ и учитывая, что

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha}\Phi_{\lambda,\alpha,-\alpha}(\theta)=\frac{(\sin\theta)^{\alpha}}{2^{\alpha}}\Phi_{\lambda,\alpha,\alpha}(\theta)$$

(см. (3.2), (3.3)), приходим к (3.5). □

Лемма 3.2. *Пусть $r\in(0,\pi)$, $M\in\mathbb{Z}_+$, $\mu,\nu\in N_M(r)$ и $\mu\neq\nu$. Тогда*

$$\int_0^r \Phi_{2\nu+1,M,M}(\theta)\Phi_{2\mu+1,M,M}(\theta)(\sin\theta)^{2M+1}d\theta=0.$$

Доказательство. Из [16, гл. 3, п. 3.12 (1)] и (2.7) имеем

$$(\mu-\nu)(\mu+\nu+1)\int_0^r p_{\nu,M}(\theta)p_{\mu,M}(\theta)\sin\theta d\theta$$
$$=(\sin r)\big(p_{\mu,M}(r)p'_{\nu,M}(r)-p_{\nu,M}(r)p'_{\mu,M}(r)\big).$$

Теперь учитывая определение множества $N_M(r)$ и (3.2), получаем требуемое. □

Еще один частный случай определения (3.1) приводит к функциям P^l_{mn}, которые были введены и детально изучены И. М. Гельфандом и З. Я. Шапиро в связи с теорией представлений группы вращений трехмерного пространства (см., например [19, гл. 3]). Нас будет интересовать случай, когда $l\in\mathbb{Z}_+$, а m и n пробегают значения $-l,-l+1,\dots,l-1,l$. В терминах функций (3.1) имеем

$$P^l_{mn}(\cos\theta)=\frac{i^{m-n}}{(m-n)!}\sqrt{\frac{(l+m)!(l-n)!}{(l+n)!(l-m)!}}$$
$$\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{m-n}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{m+n}\Phi_{2l+1,m-n,m+n}(\theta),\quad m\geq n,$$
$$P^l_{mn}=P^l_{nm},\quad m<n. \tag{3.6}$$

Если $m=n=0$, то $P^l_{mn}(\cos\theta)$ совпадают с зональными сферическими функциями $P_l(\cos\theta)$ на $\mathbb{S}^2$. Кроме того,

$$P^l_{m0}=\frac{1}{i^m}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P^m_l. \tag{3.7}$$

При фиксированном l матрица с элементами $P^l_{mn}(\cos\theta)$ унитарна. В частности,

$$|P^l_{mn}(\cos\theta)| \le 1, \quad |P^m_l(\cos\theta)| \le \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}. \tag{3.8}$$

Имеют место соотношения ортогональности

$$\int\limits_0^\pi P^l_{mn}(\cos\theta)\overline{P^s_{mn}(\cos\theta)}\sin\theta d\theta = \begin{cases} 0, & l \ne s \\ \frac{2}{2l+1}, & l = s. \end{cases} \tag{3.9}$$

Далее, для функций $P^l_{mn}(\cos\theta)$ справедлива следующая формула умножения:

$$P^l_{mk}(\cos\theta_1)P^l_{kn}(\cos\theta_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k\alpha - m\varphi - n\psi)}P^l_{mn}(\cos\theta)d\alpha, \tag{3.10}$$

где

$$\cos\theta = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\alpha,$$

$$e^{i\varphi}\sin\theta = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\alpha + i\sin\theta_2\sin\alpha,$$

$$e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{i\alpha}{2}} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{-i\alpha}{2}}.$$

Она позволяет вычислять интегралы по окружностям на $\mathbb{S}^2$ от сферических функций и их обобщений (см. (2.8)).

Лемма 3.3. *Пусть $r \in (0,\pi)$, $|t| < \pi - r$, $\nu \in \mathbb{C}$, $k, M \in \mathbb{Z}_+$ и $k \ge M$. Тогда*

$$\int\limits_{S_r} S_{\nu,k}(a_t\xi)\mathcal{P}_M(\xi)dl(\xi) = \frac{2\pi}{(k-M)!}i^M(\sin r)^{M+1}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k-M}$$
$$\times\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{k+M}\Phi_{2\nu+1,k-M,k+M}(t)p_{\nu,M}(r), \tag{3.11}$$

где

$$a_t\xi = (\xi_1, \xi_2\cos t + \xi_3\sin t, -\xi_2\sin t + \xi_3\cos t). \tag{3.12}$$

Доказательство. При $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \ge k$ равенство (3.11) получается из (3.6)–(3.10). Общий случай следует отсюда с помощью теоремы Карлсона о единственности аналитической функции с заданными значениями в целых точках (см. [20, доказательство леммы 3.3]). $\square$

Нам потребуются также некоторые простейшие свойства классов $U^m_{r,M}(B_R)$. Положим

$$C^{m,k}(B_R) = \{f \in C^m(B_R) : f = f^k\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 3.4. *Пусть $f \in U^m_{r,M}(B_R)$. Тогда:*

(*i*) $\overline{f} \in U^m_{r,M}(B_R)$;

(*ii*) $f^k \in U^m_{r,M}(B_R)$ *для любого* $k \in \mathbb{Z}$;

(*iii*) *если* $m \geq 1$ *и* $f \in C^{m,k}(B_R)$, *то функции* $(D_{k,-k}f_k)(\theta)e^{i(k+1)\varphi}$ *и* $(D_{-k,k}f_k)(\theta)e^{i(k-1)\varphi}$ *принадлежат классу* $U^{m-1}_{r,M}(B_R)$.

Эти утверждения лишь незначительным образом отличаются от лемм 1 и 3, полученных в работе [21].

4. Случай всей сферы

Здесь мы докажем теоремы 2.1–2.3, применяя гармонический анализ на $\mathbb{S}^2$. Напомним (см. [19, гл. 3, § 3, п. 10]), что

$$\mathcal{H}_l = \left\{ \sum_{k=-l}^{l} c_k P_l^{-k}(\cos\theta)e^{-ik\varphi} :\ c_k \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{S}^2) :\ \triangle_0 f = -l(l+1)f \right\}, \quad (4.1)$$

а функции

$$Y_k^{(l)}(\xi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-k)!}{(l+k)!}}\, P_l^k(\cos\theta)e^{-ik\varphi}, \qquad l \in \mathbb{Z}_+,\ -l \leq k \leq l \quad (4.2)$$

образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{S}^2; d\xi)$, где

$$d\xi = \frac{1}{4\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Доказательство теоремы 2.1. Предположим, что $f \in U^\infty_{r,M}(\mathbb{S}^2)$. Разложим f в ряд Фурье

$$f(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-l}^{l} c_{k,l} P_l^{-k}(\cos\theta)e^{ik\varphi}, \quad (4.3)$$

где коэффициенты $c_{k,l}$ определены в (2.3) (см. [19, гл. 3, § 6, п. 5]). Из (4.1) и симметричности оператора $\triangle_0$ следует, что при $p \in \mathbb{Z}_+$, $l \geq 1$

$$c_{k,l} = \frac{(-1)^{k+p}}{(l^2+l)^p}\sqrt{\frac{(2l+1)(l+k)!}{(l-k)!}}\int\limits_{\mathbb{S}^2}(\triangle_0^p f)(\xi)Y_k^{(l)}(\xi)d\xi.$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$|c_{k,l}| \leq \sqrt{\frac{(2l+1)(l+k)!}{(l-k)!}}\frac{\|\triangle_0^p f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}}{(l^2+l)^p}, \tag{4.4}$$

т. е.

$$|c_{k,l}P_l^{-k}(\cos\theta)e^{ik\varphi}| \leq \frac{\sqrt{2l+1}}{(l^2+l)^p}\|\triangle_0^p f\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}$$

(см. (3.8)). Эта оценка показывает, в частности, что ряд (4.3) сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{S}^2$.

Пусть $\alpha \in [0, 2\pi]$, $t \in [0, \pi]$,

$$\tau_\alpha\xi = (\xi_1\cos\alpha - \xi_2\sin\alpha, \xi_1\sin\alpha + \xi_2\cos\alpha, \xi_3),$$

и вращение a_t определяется равенством (3.12). Тогда по условию

$$\int\limits_{S_r} f(\tau_\alpha a_t\xi)\mathcal{P}_M(\xi)dl(\xi)$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-l}^{l}\frac{c_{k,l}}{\sqrt{2l+1}}\sqrt{\frac{(l-k)!}{(l+k)!}}\int\limits_{S_r}Y_{-k}^{(l)}(\tau_\alpha a_t\xi)\mathcal{P}_M(\xi)dl(\xi) = 0.$$

Если $l \leq M-1$, $-l \leq k \leq l$, то

$$\int\limits_{S_r}Y_{-k}^{(l)}(\tau_\alpha a_t\xi)\mathcal{P}_M(\xi)dl(\xi) = 0$$

ввиду ортогональности системы $\{e^{in\varphi}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ в $L^2[0,2\pi]$. Если $l \geq M$, то по формуле (3.10) имеем

$$\int\limits_{S_r}Y_{-k}^{(l)}(\tau_\alpha a_t\xi)\mathcal{P}_M(\xi)dl(\xi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l+k)!}{(l-k)!}}i^M e^{-ik\alpha}(\sin r)^{M+1}$$
$$\times\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{P_l^{-k}(\cos r\cos t - \sin r\sin t\cos\varphi)}{[1-(\cos r\cos t - \sin r\sin t\cos\varphi)^2]^{k/2}}$$

$$\times (\cos r \sin t + \sin r \cos t \cos\varphi - i \sin r \sin\varphi)^k e^{iM\varphi} d\varphi$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{(2l+1)(l+M)!}{(l-M)!}} i^{2M-k} e^{-ik\alpha} (\sin r)^{M+1} p_{l,M}(r) P^l_{kM}(\cos t). \quad (4.5)$$

Поэтому

$$\sum_{l=M}^{\infty} \sum_{k=-l}^{l} \frac{c_{k,l}}{i^k} \sqrt{\frac{(l-k)!(l+M)!}{(l+k)!(l-M)!}} p_{l,M}(r) P^l_{kM}(\cos t) e^{-ik\alpha} = 0.$$

После перемены порядка суммирования (см. (3.8), (4.4)), видим, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=|k|+(M-|k|)_+}^{\infty} \frac{c_{k,l}}{i^k} \sqrt{\frac{(l-k)!(l+M)!}{(l+k)!(l-M)!}} p_{l,M}(r) P^l_{kM}(\cos t) \right) \times e^{-ik\alpha} = 0,$$

где $x_+ = \max\{x, 0\}$. Так как $\alpha \in [0, 2\pi]$ является произвольным,

$$\sum_{l=|k|+(M-|k|)_+}^{\infty} c_{k,l} \sqrt{\frac{(l-k)!(l+M)!}{(l+k)!(l-M)!}} p_{l,M}(r) P^l_{kM}(\cos t) = 0, \quad t \in [0, \pi], k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь соотношения (3.9) влекут равенства

$$c_{k,l} p_{l,M}(r) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},\ l \geq |k| + (M - |k|)_+.$$

Отсюда $c_{k,l} = 0$ при $l \notin \Omega_M(r)$, $-l \leq k \leq l$. Это доказывает (2.2) для $f \in U^\infty_{r,M}(\mathbb{S}^2)$. Пусть теперь $f \in U_{r,M}(\mathbb{S}^2)$. Для $h \in C^\infty(O(3))$ положим

$$F(\xi) = \int_{O(3)} h(g) f(g^{-1}\xi) dg, \quad (4.6)$$

где dg — мера Хаара на $O(3)$. Тогда для любого $\tau \in O(3)$

$$\int_{S_r} F(\tau\xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) = \int_{O(3)} h(g) \int_{S_r} f(g^{-1}\tau\xi) \mathcal{P}_M(\xi) dl(\xi) dg = 0$$

и

$$F(\tau o) = \int_{O(3)} h(g) f(g^{-1}\tau o) dg = \int_{O(3)} h(\tau g^{-1}) f(go) dg.$$

Таким образом, $F \in U^\infty_{r,M}(\mathbb{S}^2)$. Записывая (2.2) для функции F и используя произвольность функции h, получаем необходимость в теореме. Достаточность легко следует из (4.1), (4.2) и (4.5). Тем самым, теорема 2.1 полностью доказана. □

Теоремы 2.2 и 2.3 доказываются непосредственным применением теоремы 2.1.

5. Доказательство теорем 2.4–2.6

Аналог теоремы 2.4 для случая шаровых средних установлен авторами в работе [20]. Утверждение теоремы 2.4 получается теми же рассуждениями с заменой шаровых средних сферическими. Для доказательства теорем 2.5, 2.6 потребуется еще две леммы.

Лемма 5.1. *Пусть* $r_1 + r_2 \le R \le \pi$, $N_M(r_1) \cap N_M(r_2) = \varnothing$ *и* $f \in \big(U_{r_1,M} \cap U_{r_2,M} \cap C^{\infty,M}\big)(B_R)$. *Тогда* $f = 0$ *в* B_R.

Доказательство. Из условия $f \in \big(U_{r_1,M} \cap C^{\infty,M}\big)(B_R)$ и теоремы 2.4 имеем

$$f(\xi) = \sum_{\nu \in N_M(r_1)} c_\nu S_{\nu,M}(\xi), \quad \xi \in B_R, \tag{5.1}$$

где $c_\nu \in \mathbb{C}$ и $c_\nu = O(\nu^{-a})$ при $\nu \to +\infty$ для любого $a > 0$. Поскольку $f \in U_{r_2,M}(B_R)$, то

$$\int\limits_{S_{r_2}} f(\tau\xi)\mathcal{P}_M(\xi)dl(\xi) = 0 \quad \forall \tau \in O(3) : \tau\overline{B}_{r_2} \subset B_R. \tag{5.2}$$

Положим в (5.2) $\tau = a_t$, $|t| < R - r_2$. Тогда используя (5.1) и (3.11), получаем

$$\sum_{\nu \in N_M(r_1)} c_\nu \left(\cos\frac{t}{2}\right)^{2M} \Phi_{2\nu+1,0,2M}(t) p_{\nu,M}(r_2) = 0. \tag{5.3}$$

Применяя к (5.3) дифференциальный оператор $D_{M-1,M+1}D_{M-2,M+2} \cdots D_{1,2M-1}D_{0,2M}$, по лемме 3.1 находим

$$\sum_{\nu \in N_M(r_1)} c_\nu p_{\nu,M}(r_2)\gamma_{\nu,M}\Phi_{2\nu+1,M,M}(t) = 0, \tag{5.4}$$

где

$$\gamma_{\nu,M} = \big((2M-1)^2 - (2\nu+1)^2\big) \\ \times \big((2M-3)^2 - (2\nu+1)^2\big) \cdots \big(1^2 - (2\nu+1)^2\big). \tag{5.5}$$

Ввиду предположения $R \ge r_1 + r_2$, равенство (5.4) выполнено при $|t| \le r_1$. Отсюда следует (см. лемму 3.2), что $c_\nu p_{\nu,M}(r_2) = 0$ при $\nu \in N_M(r_1)$. Учитывая теперь условие $N_M(r_1) \cap N_M(r_2) = \varnothing$, заключаем, что все c_ν равны нулю. Таким образом, $f = 0$ в B_R. □

Лемма 5.2. *Пусть* $M_1 > M_2$, $2r \le R \le \pi$ $N_{M_1}(r) \cap N_{M_2}(r) = \varnothing$ *и* $f \in \big(U_{r,M_1} \cap U_{r,M_2} \cap C^{\infty,M_1}\big)(B_R)$. *Тогда* $f = 0$ *в* B_R.

Доказательство. По теореме 2.4 имеем (5.1) при $M = M_1$, $r_1 = r$. Используя это представление и (5.2) при $r_2 = r$, $M = M_2$, из (3.11) получаем

$$\sum_{\nu \in N_{M_1}(r)} c_\nu p_{\nu,M_2}(r) \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{M_1-M_2} \left(\cos\frac{t}{2}\right)^{M_1+M_2} \times \Phi_{2\nu+1,M_1-M_2,M_1+M_2}(t) = 0, \quad |t| < R - r. \quad (5.6)$$

После применения дифференциального оператора D_{M_1-1,M_1+1} $D_{M_1-2,M_1+2} \cdots D_{M_1-M_2,M_1+M_2}$, равенство (5.6) принимает вид

$$\sum_{\nu \in N_{M_1}(r)} c_\nu p_{\nu,M_2}(r) \gamma_{\nu,M_2} \Phi_{2\nu+1,M_1,M_1}(t) = 0$$

(см. лемму 3.1 и (5.5)). Здесь мы можем считать, что $|t| \le r$, поскольку $R \ge 2r$. Тогда $c_\nu p_{\nu,M_2}(r) = 0$ при $\nu \in N_{M_1}(r)$ по лемме 3.2. На основании предположения $N_{M_1}(r) \cap N_{M_2}(r) = \varnothing$, это равносильно равенству нулю всех c_ν. Поэтому $f = 0$ в B_R. □

Доказательство теоремы 2.5. Первое утверждение теоремы легко получить из ее второго утверждения с помощью сглаживания функции $f \in \big(U_{r_1,M} \cap U_{r_2,M}\big)(B_R)$ функциями вида (4.6), где в качестве h выбирается последовательность Дирака на группе $O(3)$ (см. [22, гл. 1, §1]).

Докажем (*ii*). Пусть $f \in \big(U^\infty_{r_1,M} \cap U^\infty_{r_2,M}\big)(B_R)$. Леммы 3.4 и 5.1 показывают, что $f^k = 0$ при $|k| \ge M$ и

$$f_k(\theta) = (\sin\theta)^{|k|} \sum_{j=0}^{M-|k|-1} c_{j,k} (\cos\theta)^j, \quad c_{j,k} \in \mathbb{C},$$

если $|k| \le M - 1$. Тогда

$$f(\xi) = \sum_{|k| \le M-1} \sum_{j=0}^{M-|k|-1} c_{j,k} \psi_{j,k}(\xi), \quad \xi \in B_R,$$

откуда $f \in H_M$ (см. [17, гл. 4, теорема 2.1]). Таким образом, $\big(U^\infty_{r_1,M} \cap U^\infty_{r_2,M}\big)(B_R) \subset H_M$. Обратное включение следует из (2.4).

В третьем утверждении предположим сначала, что $R < r_1 + r_2$. По теореме о двух радиусах для сферических средних на $\mathbb{S}^{2M+2}$ (см. [10, теорема 21.5]) существует ненулевая функция $h \in C^{\infty}[0, R)$, представимая в виде

$$h(\theta) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_1} c_{\nu} P_{\nu+M}^{-M}(\cos\theta)(\sin\theta)^{-M} = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_2} \gamma_{\nu} P_{\nu+M}^{-M}(\cos\theta)(\sin\theta)^{-M},$$

где $\mathcal{N}_i = \{\nu > 0 : P_{\nu+M}^{-M}(\cos r_i) = 0\}$, $i = 1, 2$, а константы c_ν и γ_ν убывают быстрее любой степени ν при $\nu \to +\infty$. Определим функцию $f : B_R \to \mathbb{C}$ равенством $f(\xi) = h(\theta)(\sin\theta)^M e^{iM\varphi}$. Тогда из теоремы 2.4 и [20, лемма 2] следует, что $f \in \left(U_{r_1,M}^{\infty} \cap U_{r_2,M}^{\infty}\right)(B_R)$. Кроме того, $f \notin H_M$ в силу (4.1). Отсюда получаем утверждение (*iii*) в случае $R < r_1 + r_2$. Если $N_M(r_1) \cap N_M(r_2) \neq \varnothing$, то аналогичным условиям удовлетворяет функция $f(\xi) = P_{\nu}^{-M}(\cos\theta)e^{iM\varphi}$ при $\nu \in N_M(r_1) \cap N_M(r_2)$ (см. теорему 2.4 и (4.1)). Это завершает доказательство теоремы 2.5. □

Доказательство теоремы 2.6. Как и в теореме 2.5, утверждение (*i*) следует из (*ii*) стандартным методом сглаживания. Докажем утверждение (*ii*). Пусть $M_1 > M_2$, $R = 2r$, $N_{M_1}(r) \cap N_{M_2}(r) = \varnothing$ и $f \in \left(U_{r,M_1}^{\infty} \cap U_{r,M_2}^{\infty}\right)(B_R)$. Тогда лемма 5.2 и доказательство теоремы 2.5 показывают, что $f \in H_{M_1}$. Запишем f в виде

$$f(\xi) = \sum_{l=0}^{M_1-1} \sum_{k=-l}^{l} c_{k,l} P_l^{-k}(\cos\theta)e^{ik\varphi}, \quad c_{k,l} \in \mathbb{C}$$

(см. (4.1)). Используя условие $f \in U_{r,M_2}(B_R)$ и повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2.1, получаем

$$\sum_{l=|k|+(M_2-|k|)_+}^{M_1-1} c_{k,l} \sqrt{\frac{(l-k)!(l+M_2)!}{(l+k)!(l-M_2)!}} P_l^{-M_2}(\cos r) P_{kM_2}^{l}(\cos t) = 0,$$

$$t \in [0, r],\ |k| \le M_1 - 1.$$

Это равенство остается справедливым и при $t \in [0, \pi]$ в силу аналитичности функций $P_{kM_2}^{l}$. Теперь из (3.9) делаем вывод, что $c_{k,l} = 0$ при $l \in \{M_2, M_2+1, \ldots, M_1-1\} \setminus \mathcal{Z}_{M_2}(r)$, $-l \le k \le l$. Отсюда $f \in H$, а значит, $\left(U_{r,M_1}^{\infty} \cap U_{r,M_2}^{\infty}\right)(B_R) \subset H$. Обратное включение следует из (2.4) и теоремы 2.1.

Докажем утверждение (*iii*). Если $R < 2r$, то $\overline{B}_{2r-R} \subset \tau B_r$ для любого $\tau \in O(3)$ такого, что $\tau\overline{B}_r \subset B_R$. Отсюда следует существование функции $f \in \left(U_{r,M_1}^{\infty} \cap U_{r,M_2}^{\infty}\right)(B_R) \setminus H$. Если $N_{M_1}(r) \cap N_{M_2}(r) \neq \varnothing$, то таким же свойством обладает функция $f(\xi) = P_{\nu}^{-M_1}(\cos\theta)e^{iM_1\varphi}$ при $\nu \in N_{M_1}(r) \cap N_{M_2}(r)$ (см. теорему 2.4 и (4.1)). Осталось заметить, что $H \subset \left(U_{r,M_1}^{\infty} \cap U_{r,M_2}^{\infty}\right)(B_R)$ в силу (2.4) и теоремы 2.1. □

6. Следствия и обобщения

Свойства нулей ν функции $p_{\nu,M}(r)$ позволяют уточнить утверждения теоремы 2.6 в некоторых случаях.

Теорема 6.1. *Пусть $M \in \mathbb{Z}_+$, $0 < r < R \leq \pi$. Тогда:*

(i) *если $R > 2r$, то $\big(U_{r,M} \cap U_{r,M+1}\big)(B_R) = H_M$;*

(ii) *если $R = 2r$, то $\big(U^\infty_{r,M} \cap U^\infty_{r,M+1}\big)(B_R) = H_M$;*

(iii) *если $R < 2r$, то $H_M \subsetneq \big(U^\infty_{r,M} \cap U^\infty_{r,M+1}\big)(B_R)$.*

Доказательство. Равенства (2.7), (2.9), (3.2) и (3.5) влекут следующие рекуррентные соотношения:

$$p'_{\nu,M}(\theta) - M \operatorname{ctg} \theta p_{\nu,M}(\theta) = (M-\nu)(M+\nu+1)p_{\nu,M+1}(\theta),$$

$$p''_{\nu,M}(\theta) + \operatorname{ctg} \theta p'_{\nu,M}(\theta) + \left(\nu(\nu+1) - \frac{M^2}{\sin^2\theta}\right) p_{\nu,M}(\theta) = 0.$$

Отсюда и из единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка заключаем, что $N_M(r) \cap N_{M+1}(r) = \varnothing$. Используя теперь теорему 2.6 при $M_1 = M+1$, $M_2 = M$, получаем требуемые утверждения. □

Теорема 6.2. *Пусть $M \in \mathbb{Z}_+$, $0 < r < R \leq \pi$,*

$$\Omega = \begin{cases} E_M \cup \{M+1\}, & p_{M+1,M}(r) = 0 \\ E_M, & p_{M+1,M}(r) \neq 0 \end{cases}, \qquad H = \sum_{l \in \Omega} \mathcal{H}_l.$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

(i) *если $R > 2r$, то $\big(U_{r,M} \cap U_{r,M+2}\big)(B_R) = H$;*

(ii) *если $R = 2r$ и $r \neq \pi/2$, то $\big(U^\infty_{r,M} \cap U^\infty_{r,M+2}\big)(B_R) = H$;*

(iii) *если $R < 2r$, то $H \subsetneq \big(U^\infty_{r,M} \cap U^\infty_{r,M+2}\big)(B_R)$.*

(iv) *если $\pi/2 < R \leq \pi$ и $f \in C^\infty(B_R)$, то для того чтобы $f \in \big(U_{\frac{\pi}{2},M} \cap U_{\frac{\pi}{2},M+2}\big)(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $k \in \mathbb{Z}$ имело место разложение*

$$f^k(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,k} S_{M+2n+1,k}(\xi) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq M-|k|}}^{M+1-|k|} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(\xi),$$

где $\alpha_{n,k}, \beta_{j,k} \in \mathbb{C}$ и $\alpha_{n,k} = O(n^{-a})$ при $n \to \infty$ для любого $a > 0$.

Доказательство. Из [16, гл. 3, п. 3.8 (11)] имеем

$$p_{\nu,M}(\theta)-2(M+1)\operatorname{ctg}\theta p_{\nu,M+1}(\theta)+(\nu+M+2)(\nu-M-1)p_{\nu,M+2}(\theta)=0.$$

Поскольку $N_M(r)\cap N_{M+1}(r)=\varnothing$ (см. доказательство теоремы 6.1), это соотношение показывает, что $N_M(r)\cap N_{M+2}(r)=\varnothing$ при $r\neq\pi/2$. Поэтому утверждения (i)–(iii) следуют непосредственно из теоремы 2.6.

Докажем (iv). Пусть $f\in\big(U^\infty_{\frac{\pi}{2},M}\cap U^\infty_{\frac{\pi}{2},M+2}\big)(B_R)$. Используя равенство $N_{M+2}(\pi/2)=\{M+3,M+5,\dots\}$ и теорему 2.4, для любого $k\in\mathbb{Z}$ получаем

$$f^k(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{n,k}S_{M+2n+1,k}(\xi)+\sum_{j=0}^{M+1-|k|}\beta_{j,k}\psi_{j,k}(\xi),$$

где $\alpha_{n,k},\beta_{j,k}\in\mathbb{C}$ и $\alpha_{n,k}$ удовлетворяют требуемому условию убывания. Теперь из описания класса $U^\infty_{\frac{\pi}{2},M}(B_R)$ делаем вывод, что

$$\beta_{M-|k|,k}\psi_{M-|k|,k}(\xi)+\beta_{M-|k|+1,k}\psi_{M-|k|+1,k}(\xi)\in U_{\frac{\pi}{2},M}(B_R).$$

Функция $\psi_{M-|k|+1,k}(\xi)$ принадлежит $U_{\frac{\pi}{2},M}(B_R)$ в силу нечетности функции $\psi_{M-|k|+1,k}(\tau\xi)\mathcal{P}_M(\xi)$ для любого $\tau\in O(3)$. Значит, $\beta_{M-|k|,k}$ $\psi_{M-|k|,k}(\xi)\in U_{\frac{\pi}{2},M}(B_R)$. Учитывая, что гармоническая проекция $\psi_{M-|k|,k}$ на $\mathcal{H}_M$ ненулевая (см. [19, гл. 9, § 2, п. 5 (15)]), с помощью (4.5) и (2.4) приходим к равенству $\beta_{M-|k|,k}=0$. Таким образом, необходимость в утверждении (iv) доказана. Достаточность следует из теоремы 2.4 и соображений четности, приведенных выше. □

Далее, из доказательств теорем 2.1–2.6 видно, что такими же методами можно получить подобные результаты и для случая взвешенных шаровых средних. Рассмотрим некоторые из них.

Положим

$$V_{r,M}(B_R)=\Big\{f\in L^{1,loc}(B_R):\int_{B_r}f(\tau\xi)\mathcal{P}_M(\xi)d\xi=0\quad\forall\tau\in O(3):\ \tau\overline{B}_r\subset B_R\Big\},$$

$$V^\infty_{r,M}(B_R)=(V_{r,M}\cap C^\infty)(B_R).$$

Теорема 6.3. *Пусть* $0 < R \leq \pi$, $r_1, r_2 \in (0, R)$. *Тогда:*

(i) *если* $R > r_1 + r_2$ *и* $N_{M+1}(r_1) \cap N_{M+1}(r_2) = \varnothing$, *то*

$$\big(V_{r_1,M} \cap V_{r_2,M}\big)(B_R) = H_M;$$

(ii) *если* $R = r_1 + r_2$ *и* $N_{M+1}(r_1) \cap N_{M+1}(r_2) = \varnothing$, *то*

$$\big(V^{\infty}_{r_1,M} \cap V^{\infty}_{r_2,M}\big)(B_R) = H_M;$$

(iii) *если* $R < r_1 + r_2$ *или* $N_{M+1}(r_1) \cap N_{M+1}(r_2) \neq \varnothing$, *то*

$$H_M \subsetneq \big(V^{\infty}_{r_1,M} \cap V^{\infty}_{r_2,M}\big)(B_R).$$

Теорема 6.4. *Пусть* $M_1 > M_2$, $0 < r < R \leq \pi$ *и* $H = \sum_{l\in\Omega} \mathcal{H}_l$, *где* $\Omega = E_{M_2} \cup \big\{l \in \mathbb{N} : M_2 + 2 \leq l \leq M_1 - 1,\ l \in \mathcal{Z}_{M_2+1}(r)\big\}$. *Тогда:*

(i) *если* $R > 2r$ *и* $N_{M_1+1}(r) \cap N_{M_2+1}(r) = \varnothing$, *то*

$$\big(V_{r,M_1} \cap V_{r,M_2}\big)(B_R) = H;$$

(ii) *если* $R = 2r$ *и* $N_{M_1+1}(r) \cap N_{M_2+1}(r) = \varnothing$, *то*

$$\big(V^{\infty}_{r,M_1} \cap V^{\infty}_{r,M_2}\big)(B_R) = H;$$

(iii) *если* $R < 2r$ *или* $N_{M_1+1}(r) \cap N_{M_2+1}(r) \neq \varnothing$, *то*

$$H \subsetneq \big(V^{\infty}_{r,M_1} \cap V^{\infty}_{r,M_2}\big)(B_R).$$

Сформулированные утверждения являются аналогами теорем 2.5, 2.6 выше и получаются незначительной модификацией рассуждений, приведенных в § 5.

В заключение отметим, что ряд других теорем об “s” радиусах для уравнений свертки с радиальными распределениями на различных однородных пространствах установлен в [10, часть 4].

Литература

[1] H. Minkowski, *Über die Körper konstanter Breite* // Mat. Sbornik., **25** (1904), 505–508 (Russian); Ges. Abh., **2**, (1904), 277–279.

[2] P. Funk, *Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätishen Linien* // Math. Annal., **74** (1913), 278–300.

[3] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten* // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl., **69** (1917), 262–277.

[4] P. Ungar, *Freak theorem about functions on a sphere* // J. London Math. Soc., **29** (1954), 100–103.

[5] R. Schneider, *Functions on a sphere and vanishing integrals over certain subspheres* // J. Math. Anal. Appl., **26** (1969), 381–384.

[6] C. A. Berenstein, L. Zalcman, *Pompeiu's problem on spaces of constant curvature* // J.Analyse Math., **30** (1976), 113–130.

[7] C. A. Berenstein, L. Zalcman, *Pompeiu's problem on symmetric spaces* // Comment. Math. Helv., **55** (1980), 593–621.

[8] E. Badertscher, *The Pompeiu problem on locally symmetric spaces* // J. Analyse Math., **57** (1991), 250–281.

[9] V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[10] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer, London, 2009.

[11] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Offbeat integral geometry on symmetric spaces*, Birkhäuser, Basel, 2013.

[12] E. T. Quinto *Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds* // J. Math. Anal. Appl., **84** (1993), 353–363.

[13] E. T. Quinto *Radon transforms on curves in the plane* // Tomography, Impedance Imaging, and Integral Geometry, **30** (1994), 231–244.

[14] Y. Zhou *Two radius support theorem for the sphere transform* // J. Math. Anal. Appl., **254** (2001), 120–137.

[15] В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, И. М. Савостьянова, *Описание ядра обобщенного преобразования Минковского на сфере* // Известия Российской Академии Наук. Сер. матем., **79** (2015), N 1, 43–62.

[16] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Т. 1. М.: Наука, 1973.

[17] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, М.: Мир, 1974.

[18] В. В. Волчков, *Теоремы о среднем для одного класса полиномов* // Сибирский мат. жур., **35** (1994), N 4, 737–745.

[19] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп. 2-е изд.*, М.: Наука, 1991.

[20] Вит. В. Волчков, И. М. Савостьянова, *О ядре полусферического преобразования Функа и его локальных аналогах* // Укр. мат. вестник, **10** (2013), N 4, 611–619.

[21] I. M. Savostyanova, Vit. V. Volchkov, *On a theorem of John and its generalizations* // Mat. Studii, **40** (2013), N 1, 16–22.

[22] С. Ленг, $SL_2(R)$, М.: Мир, 1977.

Сведения об авторах

Валерий Владимирович Волчков, Виталий Владимирович Волчков, Ирина Михайловна Савостьянова

Донецкий национальный университет
E-Mail: valeriyvolchkov@gmail.com, v.volchkov@donnu.edu.ua, cavost@mail.ru