

О спектральном признаке устойчивости в проблеме малых движений идеальной капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью

Николай Д. Копачевский, Зера З. Ситшаева

Аннотация. В статье изучается проблема статической устойчивости равновесного состояния и устойчивости малых (линейных) движений идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в открытом сосуде, в днище которого имеется несколько отверстий. При этом учитываются поле гравитационных сил и силы поверхностного натяжения. Рассматривается случай, когда равновесная поверхность жидкости является криволинейной, т.е. отвечает произвольному углу смачивания. На основе операторного подхода в работе получены достаточные условия как статической, так и динамической устойчивости, а также предлагается способ нахождения равновесной поверхности жидкости.

2010 MSC. 35Q35, 76B45, 76E99.

Ключевые слова и фразы. Несжимаемая жидкость, поверхностное натяжение, операторный подход, статическая устойчивость, динамическая устойчивость.

Введение

Проблемы, связанные с поведением жидкости в условиях слабого поля гравитационных сил, интенсивно изучаются с 60-х годов прошлого века. Результаты этих исследований приведены в монографиях по гидромеханике невесомости, см. например, [1, 14], а также [5, 12].

В последние годы усилился интерес к задачам статики и динамики гидросистем, находящихся в условиях, близких к невесомости. Появились работы, в которых исследуются как способы нахождения состояния покоя гидросистемы, так и вопросы динамической устойчивости этого состояния. В поле зрения исследователей, кроме ставших традиционными проблем нахождения равновесной поверхности

Статья поступила в редакцию 3.03.2014

жидкости в открытом или закрытом сосудах сложных форм (см., например, [6]), попали также более сложные проблемы, связанные с влиянием внешних сил различной природы (работы [7, 17]) и эволюцией гидросистем в контейнерах с отверстиями (задачи капельного орошения и др.), когда жидкость имеет несвязную свободную поверхность (см. [15, 16]). Актуальными для решения этих проблем является разработка методов их исследования, в частности, вариационных и функционально-операторных методов (например, работы [3, 4, 8, 10, 11, 13]).

Настоящая работа инициирована беседами авторов с Л. А. Слобожаниным, который указал на новый класс проблем, связанных с задачами статики и устойчивости системы капель, свисающих с днища контейнера. Первые результаты авторов по этой тематике отражены в статье [2], где изучен случай горизонтальной верхней свободной поверхности и одной капли, свисающей с днища цилиндрического сосуда с произвольным поперечным сечением. Там же рассмотрены варианты осесимметричной и плоской (двумерной) проблем.

В данной работе изучается более сложная задача, когда верхняя свободная поверхность жидкости не является горизонтальной (и потому угол смачивания на этой границе не равен прямому), а с днища свисают несколько (произвольное число) капель. Для простоты рассмотрена лишь плоская задача, причем с днища свисают две одинаковые капли. Однако подход, развитый здесь, пригоден и для пространственной проблемы с любым числом свисающих капель и негоризонтальной свободной поверхностью, а капли могут быть разного размера.

В работе обоснован спектральный признак устойчивости гидросистемы и доказано, что в изучаемой задаче устойчивость теряется на сдвиговых возмущениях верхней свободной поверхности, отвечающих общим возмущениям лишь одной из подвешенных капель.

1. О статическом состоянии гидросистемы

1.1. Постановка плоской задачи о нахождении равновесной свободной поверхности жидкости

Рассмотрим в плоскости Oxz канал с вертикальными стенками и шириной $2l$. В днище канала имеется ряд отверстий, и если в такой сосуд налить жидкость, то в состоянии равновесия получим жидкостную конфигурацию, имеющую верхнюю свободную поверхность Γ_0 , а также свисающие из отверстий капли $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. При этом предполагаем, что ускорение силы тяжести \vec{g} действует сверху вниз, и будем

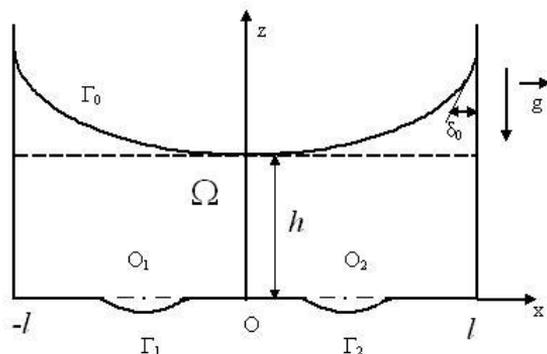


Рис. 1: Конфигурация гидросистемы

учитывать капиллярные (поверхностные) силы. Тогда возникает задача о равновесии, устойчивости и малых колебаниях жидкости в решетке (плоская проблема, см. рис. 1).

Будем считать, что днище канала расположено на оси Ox , причем ось Oz является осью его симметрии. Тогда вертикальные стенки описываются уравнениями $x = \pm l$, где l — полуширина канала. Далее для простоты рассмотрим лишь случай двух отверстий, расположенных на отрезке $[-l, l]$, и, соответственно, двух свисающих капель, хотя общие построения, которые проводятся ниже, можно использовать и для произвольного количества m капель.

Пусть $V_0 = (2l)h_0$ — общая площадь жидкой массы, где h_0 — условная высота жидкости, отвечающая ситуации, когда все дуги Γ_0 , Γ_1 и Γ_2 горизонтальны (т.е. фактически капли не свисают из отверстий). Считаем также, что свисающие капли симметричны, а их центры O_1 и O_2 также симметрично расположены относительно оси Oz , т.е. в точках $(-a, 0)$ и $(a, 0)$. Далее, полуширины капель обозначим через d , $0 < 2d < l$, а угол смачивания, т.е. угол контакта Γ_0 с вертикальной стенкой, обозначим через δ_0 , $0 < \delta_0 < \pi$.

Выведем систему дифференциальных уравнений с соответствующими краевыми условиями для нахождения равновесных дуг Γ_0 , Γ_1 и Γ_2 . Этот вывод аналогичен построениям, описанным в [2, с. 32–33, 84–90]. Будем считать, что уравнение равновесной симметричной дуги Γ_0 задается в параметрической форме $x_0 = x_0(s)$, $z_0 = z_0(s)$, $-s_0 \leq s \leq s_0$, где s — длина дуги вдоль Γ_0 , отсчитываемая от ее середины, т.е.

от точки $s = 0$. Считаем также, что при $s = 0$ выполнены условия

$$x_0(0) = 0, \quad z_0(0) = h \quad (0 < h < h_0), \quad x'_0(0) = 1, \quad z'_0(0) = 0, \quad (1.1)$$

а конечным точкам $\pm s_0$ соответствуют значения

$$x_0(s_0) = l, \quad x_0(-s_0) = -l, \quad x'_0(s_0) = \sin \delta_0, \quad x'_0(-s_0) = -\sin \delta_0.$$

Тогда с учетом симметрии получаем, что площадь V , занятая жидкостью, расположенной в канале, без учета площади двух капель, равна

$$V = (2l)h + 2 \int_0^{s_0} z(s)x'(s) ds. \quad (1.2)$$

Поэтому площадь ΔV одной из двух симметрично расположенных капель будет равна

$$0 < \Delta V = l(h_0 - h) - \int_0^{s_0} z(s)x'(s) ds.$$

Будем считать для простоты, что атмосферное давление внешнего газа равно нулю. Давление в жидкости, находящейся в состоянии покоя в гравитационном поле, как известно, изменяется по закону

$$P_0 = P_0(z) = -\rho g z + c, \quad (1.3)$$

где $\rho > 0$ — плотность жидкости, а c — константа. Известно также, что на границе Γ_0 должно выполняться условие Лапласа для перепада давлений, учитывающее действие капиллярных сил. В данном случае оно имеет вид

$$P_0|_{\Gamma_0} - 0 = -\sigma k_0(s),$$

где $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе Γ_0 , а $k_0(s)$ — кривизна дуги Γ_0 . Поэтому с учетом (1.3) и (1.1) получаем, что

$$c = \rho g h - \sigma k_0(0), \quad P_0(z) = \rho g(h - z) - \sigma k_0(0),$$

а уравнение Γ_0 приобретает вид

$$\rho g(z_0(s) - h) = \sigma(k_0(s) - k_0(0)). \quad (1.4)$$

Перейдем здесь к безразмерным переменным, выбрав в качестве характерного размера полуширину l канала. Тогда в этих новых переменных, которые будем обозначать прежними символами, взамен (1.4) приходим к уравнению

$$b_0(z_0(s) - h) = k_0(s) - k_0(0), \quad b_0 := \rho g l^2 \sigma^{-1},$$

где b_0 — так называемое число Бонда, характеризующее отношение гравитационных сил к капиллярным, а формула для давления приобретает вид

$$P_0(z) = b_0(h - z) - q_0, \quad q_0 := k_0(0).$$

Пользуясь еще соотношениями

$$k_0(s) = (x'_0 z''_0 - z'_0 x''_0)(s), \quad (x'_0(s))^2 + (z'_0(s))^2 \equiv 1, \quad (1.5)$$

получаем, что кривая Γ_0 может быть найдена как решение задачи Коши

$$\begin{aligned} x''_0(s) &= -z'_0(s)[b_0(z_0(s) - h) + q_0] \\ z''_0(s) &= x'_0(s)[b_0(z_0(s) - h) + q_0] \end{aligned} \quad (0 \leq s \leq s_0), \quad (1.6)$$

при следующих начальных условиях (см. (1.1)–(1.2))

$$x_0(0) = 0, \quad z_0(0) = h, \quad x'_0(0) = 1, \quad z'_0(0) = 0, \quad (1.7)$$

и дополнительных условиях

$$\begin{aligned} x_0(s_0) &= 1, \quad x'_0(s_0) = \sin \delta_0, \\ 0 < V &= 2h + 2 \int_0^{s_0} z_0(s)x'_0(s) ds \leq V_0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где V — безразмерная площадь, занятая жидкостью, за вычетом площади капель (см. (1.2)).

Аналогичные построения для правой и соответственно левой капли (с учетом условий закрепления капель на концах) приводят к двум идентичным задачам

$$\begin{aligned} x''_j(s) &= z'_j(s)[b_0(z_j(s) - h) + q_0] \\ z''_j(s) &= -x'_j(s)[b_0(z_j(s) - h) + q_0] \quad (0 \leq s \leq s_j, \quad j = 1, 2), \\ x_1(0) &= a, \quad x'_1(0) = 1, \quad z_1(0) = h_1 < 0, \quad z'_1(0) = 0, \\ x_2(0) &= -a, \quad x'_2(0) = 1, \quad z_2(0) = h_1, \quad z'_2(0) = 0, \\ x_1(s_1) &= a + d, \quad x_2(s_2) = -a + d, \quad z_1(s_1) = z_2(s_2) = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где s — параметр длины дуги Γ_j , $j = 1, 2$, отсчитываемая от ее середины. Кроме того, с учетом (1.8), получаем дополнительное условие на площадь каждой капли, в частности,

$$2 \int_0^{s_1} x_1(s)z'_1(s) ds = \Delta V = V_0 - V > 0. \quad (1.10)$$

1.2. Об алгоритме построения равновесных свободных поверхностей гидросистемы

Решение статической проблемы (1.6)–(1.10) зависит от заданных фиксированных безразмерных параметров

$$b_0, \delta_0, h_0 = V_0/2, a, d, \quad (1.11)$$

от которых, в свою очередь, зависят текущие параметры $h, q_0, h_1, V, \Delta V$, позволяющие методом Рунге-Кутты решить задачи Коши (1.6), (1.7) и (1.9). Для нахождения этих текущих параметров можно использовать итерационные процессы вычислений по следующей схеме, считая, что параметры (1.11) заданы.

1°. *Алгоритм нахождения равновесной дуги Γ_0 .*

Воспользуемся тем обстоятельством, что формы равновесной дуги Γ_0 образуют не двухпараметрическое семейство с параметрами h_0 и q_0 , а лишь однопараметрическое семейство (см. [1, с. 35]), так как система уравнений (1.6) инвариантна относительно замены

$$z_0(s) \mapsto z_0(s) + c/b_0, \quad q_0 \mapsto q_0 - c,$$

где c — произвольная постоянная. Поэтому, если h и q_0 изменять так, чтобы выполнялось условие

$$b_0 h + q_0 = \hat{q}_0 = \text{const},$$

то соответствующая равновесная кривая Γ_0 лишь сдвигается как целое вдоль оси Oz . Значит, для нахождения формы (а не расположения) кривой Γ_0 можно использовать не условия (1.7), а эти же условия при $h = 0$. Это позволяет найти то значение \hat{q}_0 , которое отвечает заданному углу смачивания δ_0 .

Таким образом, решая задачу (1.6), (1.7) при $h = 0$, подбираем методом итераций такое $\hat{q}_0 = \hat{q}_0(\delta_0)$, для которого в конечной точке $s = s_0$ выполнены условия

$$x_0(s_0) = 1, \quad x'_0(s_0) = \sin \delta_0.$$

При этом, очевидно, для угла смачивания $\delta_0 = \pi/2$ имеем значение $\hat{q}_0 = 0$, которому отвечает тривиальное решение

$$z_0(s) \equiv 0, \quad x_0(s) \equiv s, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad s_0 = 1,$$

а в задаче (1.6), (1.7) — решение

$$z_0(s) \equiv h = h_0 = V_0/2, \quad x_0(s) \equiv s, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad s_0 = 1.$$

2°. Алгоритм нахождения равновесной формы свисающей капли.

При $\delta_0 \neq \pi/2$, $0 < \delta_0 < \pi$, и найденном $\hat{q}_0 = \hat{q}_0(\delta_0)$ будем считать, что параметр h является переменной величиной; тогда площадь $v = v(h)$ свисающей капли будет равна (см. (1.8))

$$v(h) = (\Delta V)/2 = (V_0 - V)/2 = - \int_0^{s_0} z_0(s)x'_0(s) ds + (h_0 - h). \quad (1.12)$$

Итак, полагаем, что в задаче (1.9) величина h задана, а параметр $h_1 < 0$ можно изменять. Будем решать эту задачу Коши при некотором $h_1 < 0$ до точки $s = s_1$, в которой выполняется условие

$$z_1(s_1) = 0.$$

При этом, вообще говоря, $x_1(s_1) \neq a + d$. Далее, изменяя h_1 , т.е. итерируя по этому параметру, находим то значение h_1 , для которого выполнено условие

$$|x_1(s_1) - (a + d)| < \varepsilon, \quad (1.13)$$

где ε — заданная точность выхода по этому условию.

Подсчитываем теперь для найденного $h_1 < 0$ правую часть соотношения (1.12) (это осуществляется по ходу нахождения h_1) и сравниваем ее с левой частью. Итерируем затем по параметру h , т.е. повторяем процедуру нахождения h_1 и выход по условию (1.13), до тех пор, пока разность между левой и правой частями (1.12) будет по модулю меньше заданного значения, т.е. с необходимой точностью.

Итогом вычислений по данной схеме будут таблицы значений $\hat{q}_0 = \hat{q}_0(b_0, \delta_0)$, $b_0 > 0$, $0 < \delta_0 < \pi$, а также $h = h(b_0, \delta_0, h_0, d)$ и $h_1 = h_1(b_0, \delta_0, h_0, d)$, $h_0 > 0$, $d > 0$.

Отметим, что аналогичный алгоритм можно реализовать для произвольного конечного числа свисающих симметричных одинаковых капель (плоская задача), а также в соответствующей пространственной проблеме (цилиндрический сосуд, осесимметричные одинаковые капли).

2. Устойчивость равновесного состояния гидросистемы

Исследуемая гидродинамическая система при ее заданных исходных параметрах (1.11) может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Из физических соображений ясно, что если b_0 , h_0 , d достаточно малы, то система должна быть устойчивой. Это соответствует тому, что малы гравитационное поле, масса жидкости, а также отверстия

в днище. (Тогда можно носить воду в решетке.) Если же хотя бы один из этих параметров увеличивается до некоторого критического значения, то достигается граница области устойчивости, и при дальнейшем увеличении этого параметра система становится неустойчивой.

2.1. Общая постановка задачи об устойчивости гидросистемы

Вернемся к рассмотрению п. 1.1 и рис. 1 и будем считать, что равновесное состояние гидросистемы определено, т.е. найдена конфигурация и положение верхней свободной поверхности Γ_0 , а также формы свисающих капель, количество которых для общности будем считать равным m . (В данной работе все рассуждения проводятся для плоской задачи, однако аналогичный подход применим и к пространственной проблеме.)

Переходя к рассмотрению проблемы устойчивости, рассмотрим малые отклонения гидросистемы относительно состояния равновесия. Введем отклонения $\zeta_0(s)$, $s \in \Gamma_0$, поверхности Γ_0 вдоль внешней нормали \vec{n}_0 к ней, а также аналогичные отклонения $\zeta_j(s)$, $s \in \Gamma_j$, для поверхностей Γ_j , $j = \overline{1, m}$. Тогда из условия сохранения общей площади, занимаемой несжимаемой жидкостью (плоская проблема) следует, что должно выполняться условие

$$\int_{\Gamma_0} \zeta_0 d\Gamma_0 + \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} \zeta_j d\Gamma_j = 0. \quad (2.1)$$

Как известно (см. [1, гл. 2]), вопрос об устойчивости гидросистемы в окрестности состояния равновесия жидкости в условиях, близких к невесомости, связан со знаком второй вариации ее потенциальной энергии \mathcal{U} , поскольку первая вариация в состоянии равновесия равна нулю. В рассматриваемом случае вторая вариация $\delta^2\mathcal{U}$ может быть найдена из ее общего представления (см. [1, с. 206, формулы (2.12.1)–(2.12.3)])

$$\delta^2\mathcal{U} = \sum_{j=0}^m \left\{ \int_{\Gamma_j} [a_j |\zeta_j|^2 + |\nabla_j \zeta_j|^2] d\Gamma_j + \oint_{\partial\Gamma_j} \chi_j |\zeta_j|^2 ds \right\}, \quad (2.2)$$

$$a_j = a_j(s) := b_0 \cos(\widehat{\vec{n}_j, \vec{e}_3}) - (k_j(s))^2, \\ k_j(s) = b_0(z_j(s) - h) + q_0, \quad s \in \Gamma_j, \quad j = \overline{0, m}, \quad (2.3)$$

где $|\nabla_j \zeta_j|^2 = |\zeta_j'(s)|^2$ — квадрат градиента функции, заданной на Γ_j , \vec{n}_j — внешняя нормаль к Γ_j , а $k_j(s)$ — кривизны дуг Γ_j , $j = \overline{0, m}$. Кроме того, учитывая специфику задачи, т.е. тот факт, что Γ_0 скользит вдоль вертикальных стенок, а свисающие капли закреплены на $\partial\Gamma_j$, т.е. в конечных точках, $j = \overline{1, m}$, приходим к краевым условиям

$$\begin{aligned} \zeta_0'(s_0) + \chi_0(s_0)\zeta_0(s_0) = 0, \quad -\zeta_0'(-s_0) + \chi_0(-s_0)\zeta_0(-s_0) = 0, \\ \chi_0(s) := \frac{z_0'(s)}{x_0'(s)} \left[b_0(z_0(s) - h) + q_0 \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\zeta_j(s_j) = \zeta_j(-s_j) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.5)$$

Рассмотрим вопрос о минимуме функционала (2.2) при условиях (2.3)–(2.5) и условии нормировки

$$\sum_{j=0}^m \int_{\Gamma_j} |\zeta_j|^2 d\Gamma_j = 1. \quad (2.6)$$

Как хорошо известно из вариационного исчисления, минимум задачи на условный экстремум квадратичного функционала (2.2) (с условиями (2.3)–(2.5) и дополнительными условиями (2.1), (2.6)), а также функция $\hat{\zeta} := (\zeta_0; \zeta_1; \dots; \zeta_m)$, реализующая этот минимум, представляют собой наименьшее собственное значение $\lambda = \lambda_*$ и соответствующую нормированную собственную функцию $\hat{\zeta}$ спектральной задачи

$$\begin{aligned} M_0 \zeta_0 + \mu = \lambda \zeta_0 \quad (\text{на } \Gamma_0), \\ \zeta_0'(s_0) + \chi_0(s_0)\zeta_0(s_0) = 0, \quad -\zeta_0'(-s_0) + \chi_0(-s_0)\zeta_0(-s_0) = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$M_j \zeta_j + \mu = \lambda \zeta_j \quad (\text{на } \Gamma_j), \quad \zeta_j(s_j) = \zeta_j(-s_j) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.8)$$

$$M_j \zeta_j := -\zeta_j'' + a_j(s)\zeta_j, \quad j = \overline{0, m}, \quad (2.9)$$

рассматриваемой при условии (2.1). Здесь λ и μ — не определенные заранее множители Лагранжа.

Таким образом, приходим к следующим выводам (см. [1, с. 123]).

1°. Если минимальное собственное значение $\lambda = \lambda_*$ задачи (2.7)–(2.9), (2.1) положительно, то равновесное состояние гидросистемы статически устойчиво.

2°. Если $\lambda_* < 0$, то равновесное состояние статически неустойчиво.

3°. Границей области устойчивости является такая совокупность заданных параметров (1.11), для которой выполнено условие

$$\lambda_* = 0.$$

Утверждения 1°–3° называют спектральным признаком статической устойчивости гидросистемы.

2.2. Операторный подход к проблеме устойчивости

Рассмотрим спектральную проблему (2.7)–(2.9) как задачу на собственные значения некоторого неограниченного линейного оператора, действующего в гильбертовом пространстве. С этой целью, опираясь на соотношения (2.1) и (2.6), введем комплексное гильбертово пространство

$$L_2(\Gamma) := \bigoplus_{j=0}^m L_2(\Gamma_j)$$

наборов элементов (столбцов) $\widehat{\zeta} := (\zeta_0; \zeta_1; \dots; \zeta_m)^\tau$ (где τ — символ транспонирования) с квадратом нормы

$$\|\widehat{\zeta}\|_{L_2(\Gamma)}^2 := \sum_{j=0}^m \int_{\Gamma_j} |\zeta_j|^2 d\Gamma_j =: \sum_{j=0}^m \|\zeta_j\|_{L_2(\Gamma_j)}^2$$

и соответствующим скалярным произведением. Введем также его подпространство $L_{2,\Gamma}$ тех элементов из $L_2(\Gamma)$, для которых выполнено условие (2.1), т.е. элементов, ортогональных к одномерному подпространству, натянутому на единичную функцию

$$1_\Gamma := (1_{\Gamma_0}; 1_{\Gamma_1}; \dots; 1_{\Gamma_m})^\tau.$$

Введем еще подпространство

$$L_{2,\Gamma_0} := \left\{ \eta_0 \in L_2(\Gamma_0) : \int_{\Gamma_0} \eta_0 d\Gamma_0 = (\eta_0, 1_{\Gamma_0})_{L_2(\Gamma_0)} = 0 \right\}$$

с соответствующим скалярным произведением.

В системе соотношений (2.7)–(2.8) можно исключить параметр μ следующим образом. Введем оператор усреднения по Γ_0 в виде

$$K_0 \zeta_0 := |\Gamma_0|^{-1} \int_{\Gamma_0} \zeta_0 d\Gamma_0, \quad (2.10)$$

и подействуем им на обе части первого соотношения (2.7); имеем

$$K_0 M_0 \zeta_0 + \mu = \lambda K_0 \zeta_0. \quad (2.11)$$

Находя отсюда μ и подставляя его в уравнения (2.7), (2.8), приходим к системе уравнений, которая при $m = 2$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} P_0 M_0 & 0 & 0 \\ -K_0 M_0 & M_1 & 0 \\ -K_0 M_0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ -K_0 & I_1 & 0 \\ -K_0 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

где $P_0 := I_0 - K_0 : L_2(\Gamma_0) \rightarrow L_{2,\Gamma_0}$ — ортопроектор. (Далее для определенности будем рассматривать лишь случай $m = 2$, т.е. двух подвешенных к днищу капель.)

Как уже упоминалось в п. 1.2, поверхность Γ_0 допускает возмущения сдвига, т.е. перемещения ее как целого вдоль вертикальной оси без изменения формы. Для криволинейной поверхности Γ_0 такие возмущения описываются функциями вида $c x'_0(s)$, где c — любая постоянная, а $x_0 = x_0(s)$ — функция, задающая наряду с $z_0(s)$ параметрические уравнения поверхности Γ_0 , см. задачу (1.6), (1.7).

Опираясь на эти факты, представим общее возмущение $\zeta := (\zeta_0; \zeta_1; \dots; \zeta_m)^T$ свободной поверхности $\Gamma = \bigcup_{j=0}^2 \Gamma_j$ гидросистемы в виде суммы возмущений, отвечающих сдвиговому возмущению поверхности Γ_0 и общему возмущению лишь одной поверхности Γ_j , $j = 1, 2$; кроме того, наряду со сдвиговыми на поверхности Γ_0 учтем также возмущения, сохраняющие общую площадь жидкости при неподвижных границах Γ_j , $j = 1, 2$. Иными словами, будем считать, что

$$\zeta_0 = \eta_0 + \sum_{j=1}^2 \zeta_{0j} x'_0(s), \quad \int_{\Gamma_0} \eta_0 d\Gamma_0 = 0, \quad (2.13)$$

где ζ_{0j} — некоторые постоянные, $j = 1, 2$. При этом потребуем (см. (2.1)), чтобы выполнялись условия

$$\int_{\Gamma_0} \zeta_{0j} x'_0(s) d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_j} \zeta_j d\Gamma_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.14)$$

Тогда

$$\zeta_{0j} = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_j} \zeta_j d\Gamma_j =: -K_j \zeta_j, \quad \forall \zeta_j \in L_2(\Gamma_j), \quad j = 1, 2. \quad (2.15)$$

Для проведения дальнейших преобразований понадобится следующий вспомогательный факт.

Лемма 2.1. *Для сдвигового возмущения $x'_0(s)$ имеют место свойства*

$$\begin{aligned} M_0 x'_0(s) &= b_0, \\ x''_0(s_0) + \chi(s_0)x'_0(s_0) &= 0, \quad -x''_0(-s_0) + \chi(-s_0)x'_0(-s_0) = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Доказательство. Оно основано на использовании определений (2.8) и (2.3) при $j = 0$, соотношений (1.5), уравнений (1.6), (1.7), определении $\chi_0(s)$ из (2.4), а также свойствах четности и нечетности функций $x_0(s)$ и $z_0(s)$.

Имеем

$$\begin{aligned} M_0 x'_0(s) &= -x'''_0(s) + [b_0 x'_0(s) - (b_0(z_0(s) - h) + q_0)^2] x'_0(s) \\ &= (z'_0[b_0(z_0(s) - h) + q_0])'_s + b_0(x'_0(s))^2 - [b_0(z_0(s) - h) + q_0]^2 x'_0(s) \\ &= \{x'_0(s)[b_0(z_0(s) - h) + q_0]^2 + b_0(z'_0(s))^2\} + b_0(x'_0(s))^2 \\ &\quad - [b_0(z_0(s) - h) + q_0]^2 x'_0(s) = b_0. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} x''_0(s_0) + \chi(s_0)x'_0(s_0) &= -z'_0(s_0)[b_0(z_0(s_0) - h) + q_0] \\ &\quad + z'_0(s_0)(x'_0(s_0))^{-1}[b_0(z_0(s_0) - h) + q_0]x'_0(s_0) = 0. \end{aligned}$$

При $s = -s_0$ проверка последнего условия (2.16) проводится аналогично. \square

В качестве следствия из этой леммы получаем, что для функции $\eta_0(s)$ из (2.13), а также из граничных условий для $\zeta_0(s)$ (см. (2.5)), должны выполняться условия

$$\eta'_0(s_0) + \chi_0(s_0)\eta_0(s_0) = 0, \quad -\eta'_0(-s_0) + \chi_0(-s_0)\eta_0(-s_0) = 0. \quad (2.17)$$

Опираясь на установленные факты, получим представление для параметра μ в задаче (2.7)–(2.9). Подставляя связь (2.13) в (2.11), приходим к формуле

$$\mu = \left(\sum_{j=1}^2 \zeta_{0j} \right) (2\lambda |\Gamma_0|^{-1} - b_0) - K_0(M_0 \eta_0),$$

где K_0 — оператор вычисления среднего значения (см. (2.10)).

Тогда задача (2.12) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 \\ -K_0 M_0 & B_1 + b_0 K_1 & b_0 K_2 \\ -K_0 M_0 & b_0 K_1 & B_2 + b_0 K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \\
& = \lambda \begin{pmatrix} I_0 & (2|\Gamma_0|^{-1} - x'_0(s))K_1 & (2|\Gamma_0|^{-1} - x'_0(s))K_2 \\ 0 & I_1 + 2|\Gamma_0|^{-1}K_1 & 2|\Gamma_0|^{-1}K_2 \\ 0 & 2|\Gamma_0|^{-1}K_1 & I_2 + 2|\Gamma_0|^{-1}K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \tag{2.18}
\end{aligned}$$

где введены операторы:

$$B_0 := P_0 M_0 P_0,$$

$$\mathcal{D}(B_0) = \{\eta_0 \in L_{2,\Gamma_0} \cap H^2(\Gamma_0) : \text{выполнены граничные условия (2.17)}\},$$

$$B_j := M_j,$$

$$\mathcal{D}(B_j) = \{\zeta_j \in H^2(\Gamma_j) : \text{выполнены граничные условия (2.5)}\}, j = 1, 2.$$

Таким образом, задача об устойчивости исследуемой гидросистемы приведена к задаче на собственные значения (2.18). Здесь слева стоит неограниченный оператор, представленный в виде матрицы с неограниченными операторными коэффициентами. Областью определения этого оператора является множество

$$\mathcal{D}(B_0) \oplus \mathcal{D}(B_1) \oplus \mathcal{D}(B_2) \subset L_{2,\Gamma_0} \oplus L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2).$$

Покажем, что операторная матрица слева в (2.18) представляет собой оператор потенциальной энергии исследуемой гидросистемы. В самом деле, левая часть в (2.18) есть преобразованная матрица из левой части (2.12) с учетом представления (2.13) и соотношений (2.14)–(2.16). Поэтому упомянутое свойство можно проверить по левой части (2.12). Имеем (учитывая свойство (2.1) при $m = 2$)

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} (I_0 - K_0)M_0 & 0 & 0 \\ -K_0 M_0 & M_1 & 0 \\ -K_0 M_0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \\
& = (M_0 \zeta_0, \zeta_0)_{L_2(\Gamma_0)} + (M_1 \zeta_1, \zeta_1)_{L_2(\Gamma_1)} + (M_2 \zeta_2, \zeta_2)_{L_2(\Gamma_2)} \\
& \quad - (K_0 M_0 \zeta_0) \left\{ \int_{\Gamma_0} \zeta_0 d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} \zeta_1 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \zeta_2 d\Gamma_2 \right\} \\
& = (M_0 \zeta_0, \zeta_0)_{L_2(\Gamma_0)} + (M_1 \zeta_1, \zeta_1)_{L_2(\Gamma_1)} + (M_2 \zeta_2, \zeta_2)_{L_2(\Gamma_2)},
\end{aligned}$$

а последнее выражение с учетом свойств (2.4) и (2.5) приводится к квадратичному функционалу $\delta^2\mathcal{U}$ из (2.2), (2.3), т.е. к удвоенной потенциальной энергии малых отклонений гидросистемы от состояния равновесия.

Аналогичным образом можно проверить, проводя выкладки с правой частью (2.12), что правая часть в (2.18) после умножения на $(\zeta_0; \zeta_1; \zeta_2)^T$ дает квадрат нормы искомого элемента $\widehat{\zeta} = (\zeta_0; \zeta_1; \zeta_2)^T$ в пространстве $L_{2,\Gamma}$:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} (I_0 - K_0) & 0 & 0 \\ -K_0 & I_1 & 0 \\ -K_0 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \\ &= (\zeta_0, \zeta_0)_{L_2(\Gamma_0)} + (\zeta_1, \zeta_1)_{L_2(\Gamma_1)} + (\zeta_2, \zeta_2)_{L_2(\Gamma_2)} \\ &\quad - (K_0\zeta_0) \left\{ \int_{\Gamma_0} \zeta_0 d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} \zeta_1 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \zeta_2 d\Gamma_2 \right\} \\ &= (\zeta_0, \zeta_0)_{L_2(\Gamma_0)} + (\zeta_1, \zeta_1)_{L_2(\Gamma_1)} + (\zeta_2, \zeta_2)_{L_2(\Gamma_2)} = \|\widehat{\zeta}\|_{L_{2,\Gamma}}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, задача (2.18) есть задача на собственные значения оператора потенциальной энергии гидросистемы, преобразованная с учетом проведенных выше представлений для решения $\widehat{\zeta} \in L_{2,\Gamma}$. Ее особенность состоит в том, что операторная матрица потенциальной энергии имеет треугольный блочный вид, и это позволяет, как будет видно из дальнейшего, определить тот класс возмущений гидросистемы, на котором теряется ее устойчивость.

Задача (2.18) существенно упрощается, если угол смачивания $\delta_0 = \pi/2$, и потому свободная поверхность Γ_0 горизонтальна. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{n}}_0, \vec{e}_3) &\equiv 1, \quad k_0(s) \equiv 0, \quad |\Gamma_0| = 2, \quad x_0(s) \equiv s, \quad x'_0(s) \equiv 1, \quad s_0 = 1, \\ z_0(s) &\equiv h = h_0, \quad z'_0(s) \equiv 0, \quad a_0(s) \equiv b_0, \quad \chi_0(s_0) = \chi_0(-s_0) = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, в представлении (2.13) $\eta_0 \perp 1_{\Gamma_0}$, и потому элементы $(\sum_{j=1}^2 \zeta_{0j}; \zeta_1; \zeta_2)^T$ и $(\eta_0; 0; 0)^T$ ортогональны в $L_2(\Gamma)$. Далее, выполнено также условие

$$K_0 M_0 \eta_0 = 0, \quad \forall \eta_0 \in L_{2,\Gamma_0};$$

в самом деле, в этом случае

$$\int_{\Gamma_0} M_0 \eta_0 d\Gamma_0 = \int_1^{-1} (-\eta_0'' + b_0 \eta_0) ds = - \int_1^{-1} \eta_0'' ds = -\eta_0'(-1) - (-\eta_0'(1)) = 0,$$

поскольку $\eta'_0(1) = \eta'_0(-1) = 0$.

Таким образом, для горизонтальной Γ_0 имеем из (2.18) проблему

$$\begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 + b_0 K_1 & b_0 K_2 \\ 0 & b_0 K_1 & B_2 + b_0 K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 + K_1 & K_2 \\ 0 & K_1 & I_2 + K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

и потому исследуемая задача об устойчивости гидросистемы расщепляется на две независимые спектральные задачи.

Определим теперь свойства операторных коэффициентов в общей задаче (2.18) и ее частном случае (2.19). Соответствующие утверждения приведем без доказательств, поскольку эти доказательства имеют стандартный характер (см., например, [4]).

Лемма 2.2. *Операторы K_0 , K_1 и K_2 , определяемые формулами (2.10) и (2.15) соответственно, действуют в пространствах L_{2,Γ_0} и $L_2(\Gamma_j)$, $j = 1, 2$, и являются компактными одномерными неотрицательными операторами.*

Лемма 2.3. *В задаче (2.19) оператор B_0 является неограниченным положительно определенным самосопряженным оператором с дискретным спектром $\{\lambda_k(B_0)\}_{k=1}^\infty$,*

$$\lambda_k(B_0) = b_0 + (\pi k/2)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.20)$$

и собственными элементами

$$\eta_{0,k}(s) = \begin{cases} \sin(\pi k s/2), & k = 1, 3, 5, \dots \\ \cos(\pi k s/2), & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases},$$

образующими ортогональный базис как в L_{2,Γ_0} , так и в энергетическом пространстве $H_{B_0} \subset L_{2,\Gamma_0}$ с квадратом нормы

$$\|\eta_0\|_{B_0}^2 = \int_{-1}^1 (|\eta'_0(s)|^2 + b_0 |\eta_0(s)|^2) ds.$$

В задаче (2.18) оператор B_0 является ограниченным снизу самосопряженным оператором с дискретным спектром $\{\lambda_k(B_0)\}_{k=1}^\infty$,

$$-\infty < \lambda_1(B_0) < \lambda_2(B_0) < \dots < \lambda_k(B_0) < \dots, \\ \lambda_k(B_0) \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow \infty). \quad (2.21)$$

Его собственные элементы $\{\eta_{0,k}(B_0)\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям (2.21), образуют ортогональный базис как в $L_2(\Gamma_0)$, так и по форме оператора B_0 :

$$\begin{aligned} (\eta_{0,k}, \eta_{0,l})_{B_0} &:= \int_{-s_0}^{s_0} [\eta'_{0,k}(s)\eta'_{0,l}(s) + a_0(s)\eta_{0,k}(s)\eta_{0,l}(s)] ds \\ &\quad + \chi_0(s_0)[\eta_{0,k}(s_0)\eta_{0,l}(s_0) + \eta_{0,k}(-s_0)\eta_{0,l}(-s_0)] \\ &= \lambda_k(B_0) \int_{\Gamma_0} \eta_{0,k}(s)\eta_{0,l}(s) ds = \lambda_k(B_0)\delta_{kl}. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.4. Операторы B_j , $j = 1, 2$, как в задаче (2.19), так и в задаче (2.18), являются ограниченными снизу операторами с дискретным спектром

$$\begin{aligned} \{\lambda_k(B_j)\}_{k=1}^\infty, \quad j = 1, 2, \quad -\infty < \lambda_1(B_j) < \dots < \lambda_k(B_j) < \dots, \\ \lambda_k(B_j) \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow \infty), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Их собственные элементы $\{\zeta_{jk}\}_{k=1}^\infty$, $j = 1, 2$, отвечающие собственным значениям (2.22), образуют ортогональный базис как в $L_2(\Gamma_j)$, $j = 1, 2$, так и по форме оператора B_j :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} [\zeta'_{jk}(s)\zeta'_{jl}(s) + a_j(s)\zeta_{jk}(s)\zeta_{jl}(s)] ds \\ = \lambda_k(B_j) \int_{\Gamma_j} \zeta_{jk}(s)\zeta_{jl}(s) ds = \lambda_k(B_j)\delta_{kl}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.5. В задачах (2.19) и (2.18) оператор

$$\begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_1 & K_2 \end{pmatrix} : L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2) \rightarrow L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2) =: \tilde{L}_2$$

является неотрицательным.

Доказательство. Оно основано на свойстве

$$2 \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_1 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \left| \int_{\Gamma_1} \zeta_1 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \zeta_2 d\Gamma_2 \right|^2 \geq 0.$$

□

Рассмотрим еще вспомогательную спектральную задачу

$$\begin{pmatrix} B_1 + b_0 K_1 & b_0 K_2 \\ b_0 K_1 & B_2 + b_0 K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} I_1 + K_1 & K_2 \\ K_1 & I_2 + K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix},$$

$$(\zeta_1; \zeta_2)^\tau \in \mathcal{D}(B_1) \oplus \mathcal{D}(B_2) \subset L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2) = \tilde{L}_2. \quad (2.23)$$

Лемма 2.6. *Спектр задачи (2.23) дискретен, он состоит из конечнократных собственных значений*

$$\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty, \quad -\infty < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow \infty), \quad (2.24)$$

а система его собственных элементов $\{\tilde{\zeta}_k\}_{k=1}^\infty$, $\tilde{\zeta}_k := (\zeta_{1,k}; \zeta_{2,k})^\tau$, отвечающая собственным значениям (2.24), образуют ортогональный базис как по форме оператора

$$\tilde{\mathcal{I}} + \tilde{\mathcal{K}} := \begin{pmatrix} I_1 + K_1 & K_2 \\ K_1 & I_2 + K_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{I}} := \text{diag}(I_1; I_2),$$

так и по форме оператора

$$\tilde{\mathcal{B}} + b_0 \tilde{\mathcal{K}} := \begin{pmatrix} B_1 + b_0 K_1 & b_0 K_2 \\ b_0 K_1 & B_2 + b_0 K_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{B}} := \text{diag}(B_1; B_2),$$

т.е.

$$((\tilde{\mathcal{B}} + b_0 \tilde{\mathcal{K}})\tilde{\zeta}_k, \tilde{\zeta}_l)_{\tilde{L}_2} = \lambda_k ((\tilde{\mathcal{I}} + \tilde{\mathcal{K}})\tilde{\zeta}_k, \tilde{\zeta}_l)_{\tilde{L}_2} = \lambda_k \delta_{kl}.$$

□

Опираясь на установленные свойства операторных коэффициентов в задачах (2.18) и (2.19), сформулируем и докажем свойства их решений.

Теорема 2.1. *Спектр задачи (2.19) является дискретным с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Он является объединением спектров оператора B_0 (см. (2.20)) и задачи (2.23) и состоит из двух ветвей собственных значений, каждая из которых имеет предельную точку $\lambda = +\infty$. Ветви $\{\lambda_k(B_0)\}_{k=1}^\infty$ отвечают возмущения нулевого объема (площади) в окрестности Γ_0 при неподвижных границах Γ_1 и Γ_2 , а ветви $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, см. (2.24), — сдвиговые возмущения поверхности Γ_0 , порожденные возмущениями общего вида поверхностей Γ_1 и Γ_2 .*

Теорема 2.2. *Границей области устойчивости исследуемой гидросистемы является такой набор заданных исходных параметров (1.11), при которых минимальное собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{B}} + b_0 \tilde{\mathcal{K}}$ равно нулю:*

$$\lambda_* = \lambda_{\min}(\tilde{\mathcal{B}} + b_0 \tilde{\mathcal{K}}) = 0. \quad (2.25)$$

При переходе через эту границу устойчивость гидросистемы теряется на сдвиговых возмущениях, т.е. таких, когда верхняя (горизонтальная) граница Γ_0 перемещается как единое целое вдоль вертикальной оси.

Доказательство. Как следует из леммы 2.3, при горизонтальной Γ_0 оператор B_0 положительно определен и $\lambda_{\min}(B_0) = \lambda_1(B_0) > 0$. Поэтому условие (2.25), согласно утверждениям теоремы 2.1, может достигаться лишь на сдвиговых возмущениях, т.е. на решениях задачи (2.23), отвечающих собственному значению $\lambda = \lambda_* = 0$. Однако это соответствует тому, что существует нетривиальное решение уравнения

$$(\tilde{B} + b_0\tilde{K})\tilde{\zeta} = 0.$$

□

Рассмотрим теперь задачу (2.18), т.е. проблему устойчивости гидросистемы при криволинейной поверхности Γ_0 . Заметим предварительно, что в этом случае при углах смачивания δ_0 , близких к $\pi/2$, когда поверхность Γ_0 не сильно отличается от горизонтальной, оператор B_0 в задаче (2.18) по-прежнему является положительно определенным. Из физических соображений также ясно, что он должен обладать этим свойством во всем диапазоне $0 < \delta_0 < \pi$. В самом деле, возмущениям вида $\hat{\zeta} := (\eta; 0; 0)^T$ отвечают такие положения гидросистемы, когда Γ_1 и Γ_2 можно считать твердой стенкой, так как на них отклонения ζ_1 и ζ_2 равны нулю. Тогда при действии гравитационного поля сверху вниз при любом числе Бонда $b_0 > 0$ гидросистема должна быть статически устойчивой, и потому оператор потенциальной энергии такой гидросистемы, т.е. оператор B_0 , должен быть положительно определенным. (Формально свойство $\lambda_{\min}(B_0) > 0$ можно подтвердить расчетами при $0 < \delta_0 < \pi$.) Отсюда следует такой вывод.

Теорема 2.3. *Утверждения теоремы 2.2 справедливы и в общей спектральной задаче (2.18), т.е. границе области устойчивости гидросистемы отвечает условие (2.25), причем устойчивость теряется на сдвиговых возмущениях, когда верхняя (криволинейная) граница Γ_0 перемещается как единое целое вдоль вертикальной оси.*

Доказательство. Положим в (2.18) $\lambda = \lambda_* = 0$, отвечающее границе области устойчивости. Тогда возникает задача

$$\begin{aligned} B_0\eta_0 = 0, \quad -K_0M_0\eta_0 + (B_1 + b_0K_1)\zeta_1 + b_0K_2\zeta_2 = 0, \\ -K_0M_0\eta_0 + b_0K_1\zeta_1 + (B_2 + b_0K_2)\zeta_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Так как оператор B_0 положительно определен, то $\eta_0 = 0$, а оставшиеся два уравнения из (2.26) переписываются в виде соотношения

$$(\tilde{B} + b_0 \tilde{K})\tilde{\zeta} = 0, \quad \tilde{\zeta} := (\zeta_1; \zeta_2)^T,$$

и это уравнение должно иметь нетривиальное решение. Значит, должно выполняться условие (2.25). \square

Замечание 2.1. Как уже упоминалось выше (см. начало п. 2), исследуемая гидросистема заведомо устойчива, если параметры (1.11) достаточно малы. В этом случае минимальное собственное значение λ_* задачи (2.18) положительно. Отсюда следует, что при возрастании любого из параметров (1.11) условие (2.25) может быть достигнуто в процессе изменения этого параметра от малых значений к большим.

Замечание 2.2. Построения, проведенные выше, можно осуществить и в задаче об устойчивости такой гидросистемы, когда к дну сосуда подвешено любое количество m капель. При этом возникает спектральная проблема вида (2.18), где операторные матрицы имеют размер $(m + 1) \times (m + 1)$ и такую же общую структуру.

3. О собственных колебаниях гидросистемы

В монографии [1] рассмотрена проблема малых собственных колебаний гидросистемы, состоящей из нескольких несмешивающихся идеальных капиллярных жидкостей, заполняющей некоторый сосуд. Задача, изучаемая в данной работе, близка по физической и математической постановке к упомянутой проблеме и также может быть исследована операторными методами на основе построений, развитых в предыдущих параграфах.

3.1. Постановка задачи о малых колебаниях

Рассмотрим теперь проблему малых собственных колебаний жидкости в канале с вертикальными стенками и двумя свисающими с днища каплями (плоский случай). Можно показать, что эта задача сводится к нахождению потенциала перемещений жидкости $\Phi = \Phi(t, x)$, $x \in \Omega$, связанного с полем скоростей \vec{u} жидкости соотношением

$$\vec{u}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi(t, x)).$$

Собственными колебаниями называют такие решения задачи для потенциала $\Phi(t, x)$, которые зависят от t по закону

$$\Phi(t, x) = \exp(i\omega t)\Phi(x), \quad x \in \Omega,$$

где ω — неизвестная частота колебаний, а $\Phi(x)$ — амплитудная функция, описывающая форму колебаний.

В принятых выше безразмерных переменных (см. п. 1.1) для нахождения функции $\Phi(x)$ возникает следующая спектральная задача математической физики (см. [1, с. 293]):

$$\Delta\Phi = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad (3.1)$$

$$M_0\zeta_0 + \mu = \lambda\Phi \quad (\text{на } \Gamma_0), \quad \zeta_0 := \frac{\partial\Phi}{\partial n_0}\Big|_{\Gamma_0}, \quad \lambda = \rho\omega^2 l^3 \sigma^{-1}, \quad (3.2)$$

$$M_1\zeta_1 + \mu = \lambda\Phi \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \zeta_1 := \frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\Big|_{\Gamma_1}, \quad (3.3)$$

$$M_2\zeta_2 + \mu = \lambda\Phi \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \zeta_2 := \frac{\partial\Phi}{\partial n_2}\Big|_{\Gamma_2}, \quad (3.4)$$

где μ — не известная заранее константа, а λ — квадрат безразмерной частоты собственных колебаний гидросистемы. Остальные обозначения — те же, что и в соотношениях (2.7)–(2.9), (2.3). В частности, для функций $\zeta_0(s)$, $\zeta_1(s)$ и $\zeta_2(s)$ должны выполняться граничные условия (2.7), (2.8) в конечных точках кривых Γ_0 , Γ_1 и Γ_2 .

В динамической проблеме (3.1)–(3.4), как и в задаче (2.7), (2.8), можно исключить параметр μ с помощью тех же преобразований, которые были проделаны выше при рассмотрении проблемы устойчивости. Именно, введем оператор проектирования K_0 (см. (2.10)) и подействуем им на обе части первого соотношения (3.2). Будем иметь

$$K_0 M_0 \zeta_0 + \mu = \lambda K_0(\Phi|_{\Gamma_0}),$$

откуда находим μ . Подставляя его в (3.2)–(3.4), приходим к векторно-матричному соотношению

$$\begin{pmatrix} P_0 M_0 & 0 & 0 \\ -K_0 M_0 & M_1 & 0 \\ -K_0 M_0 & 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \Phi|_{\Gamma_0} - K_0(\Phi|_{\Gamma_0}) \\ \Phi|_{\Gamma_1} - K_0(\Phi|_{\Gamma_0}) \\ \Phi|_{\Gamma_2} - K_0(\Phi|_{\Gamma_0}) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

аналогичному соотношению (2.12). Здесь слева снова появляется операторная матрица потенциальной энергии изучаемой гидросистемы, а справа, как будет выяснено ниже, — операторная матрица кинетической энергии этой системы.

3.2. Вспомогательные краевые задачи и их операторы

Переходя к рассмотрению спектральной задачи (3.1)–(3.4), заметим, что необходимым условием ее разрешимости является условие

$$\int_{\Gamma_0} \zeta_0 d\Gamma_0 + \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_j} \zeta_j d\Gamma_j = 0, \quad (3.6)$$

т.е. условие (2.1) при $m = 2$. Здесь функции $\zeta_j(s)$ — амплитуды смещений вдоль внешних нормалей \vec{n}_j границ Γ_j в процессе малых колебаний, $j = \overline{0, 2}$, определенные в (3.2)–(3.4).

Опираясь на условие (3.6), рассмотрим три вспомогательные задачи Неймана, позволяющие выразить правую часть в (3.5) в виде действия операторной матрицы на искомый столбец $\widehat{\zeta} := (\zeta_0; \zeta_1; \zeta_2)^T$ либо аналогичный столбец $(\eta_0; \zeta_1; \zeta_2)^T$, как это было выше сделано в (2.18).

Именно, представим решение задачи (3.1)–(3.4) в виде суммы функций:

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \Phi_1(x) + \Phi_2(x),$$

где слагаемые являются решениями следующих вспомогательных задач.

1°. *Задача о колебаниях границы Γ_0 при неподвижных границах Γ_1 и Γ_2 :*

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_0 = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = \eta_0 \quad (\text{на } \Gamma_0), \quad \int_{\Gamma_0} \eta_0 d\Gamma_0 = 0, \\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \int_{\Gamma_0} \Phi_0 d\Gamma_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь η_0 — заданная функция, которая появилась в п. 2.2 при рассмотрении проблемы устойчивости (см. (2.13)).

2°. *Задача о сдвиговых колебаниях границы Γ_0 при общем возмущении границы Γ_1 и неподвижной границе Γ_2 :*

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \zeta_{01}x'_0(s) \quad (\text{на } \Gamma_0), \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \int_{\Gamma_0} \Phi_1 d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} \Phi_1 d\Gamma_1 = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\zeta_{01} = -K_1\zeta_1$ (см. (2.14), (2.15)), и потому выполнено необходимое условие разрешимости задачи (3.8).

3°. Задача о сдвиговых колебаниях границы Γ_0 при общем возмущении границы Γ_2 и неподвижной границе Γ_1 :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = \zeta_{02}x'_0(s) \quad (\text{на } \Gamma_0), \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = \zeta_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \int_{\Gamma_0} \Phi_2 d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_2} \Phi_2 d\Gamma_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\zeta_{02} = -K_2\zeta_2$ (и выполнено необходимое условие разрешимости этой задачи).

Каждая из задач (3.7)–(3.9) является краевой задачей Неймана для уравнения Лапласа. Если выполнены условия

$$\eta_0 \in L_{2,\Gamma_0}, \quad \zeta_1 \in L_2(\Gamma_1), \quad \zeta_2 \in L_2(\Gamma_2), \quad (3.10)$$

то в области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$ существуют единственные обобщенные решения этих задач, принадлежащие подпространству гармонических функций из пространства С. Л. Соболева $H^1(\Omega)$, и можно считать, что

$$\Phi_0 = T_0\eta_0, \quad \Phi_1 = T_1\zeta_1, \quad \Phi_2 = T_2\zeta_2,$$

где T_j — соответствующие разрешающие операторы этих задач. Тогда в задаче (3.1)–(3.4) функция Φ допускает представление

$$\Phi = T_0\eta_0 + T_1\zeta_1 + T_2\zeta_2 \in H^1(\Omega),$$

и потому (по теореме Гальярдо, см. [9])

$$\begin{aligned} \Phi|_{\Gamma_0} &= \gamma_0 T_0\eta_0 + \gamma_0 T_1\zeta_1 + \gamma_0 T_2\zeta_2 \in H^{1/2}(\Gamma_0), \\ \Phi|_{\Gamma_1} &= \gamma_1 T_0\eta_0 + \gamma_1 T_1\zeta_1 + \gamma_1 T_2\zeta_2 \in H^{1/2}(\Gamma_1), \\ \Phi|_{\Gamma_2} &= \gamma_2 T_0\eta_0 + \gamma_2 T_1\zeta_1 + \gamma_2 T_2\zeta_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где γ_j , $j = \overline{0, 2}$, — соответствующие операторы следа.

Формулы (3.11) и (2.14), (2.15) позволяют в проблеме (3.5) перейти, как и в п. 2.2, от задачи (2.12) к задаче вида (2.18). В итоге

возникает спектральная задача вида

$$\begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 \\ -K_0 M_0 & B_1 + b_0 K_1 & b_0 K_2 \\ -K_0 M_0 & b_0 K_1 & B_2 + b_0 K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A_{00} &:= P_0 \gamma_0 T_0 P_0, & A_{01} &:= P_0 \gamma_0 T_1, & A_{02} &:= P_0 \gamma_0 T_2, \\ A_{10} &:= \gamma_1 T_0 - K_0 \gamma_0 T_0, & A_{11} &:= \gamma_1 T_1 - K_0 \gamma_0 T_1, & A_{12} &:= \gamma_1 T_2 - K_0 \gamma_0 T_2, \\ A_{20} &:= \gamma_2 T_0 - K_0 \gamma_0 T_0, & A_{21} &:= \gamma_2 T_1 - K_0 \gamma_0 T_1, & A_{22} &:= \gamma_2 T_2 - K_0 \gamma_0 T_2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

а операторы слева в (3.12) — те же, что и в проблеме (2.18).

Лемма 3.1. *Операторная матрица*

$$\mathcal{A} = (A_{jk})_{j,k=0}^2$$

с элементами (3.13) является оператором кинетической энергии исследуемой гидросистемы и представляет собой компактный оператор, действующий в пространстве $L_2(\Gamma_0) \oplus L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2)$. В представлении (3.5) (с учетом соотношений (3.11) и (2.13)) эта операторная матрица обладает следующим свойством положительности:

$$\begin{pmatrix} \Phi|_{\Gamma_0} - K_0(\Phi|_{\Gamma_0}) \\ \Phi|_{\Gamma_1} - K_0(\Phi|_{\Gamma_0}) \\ \Phi|_{\Gamma_2} - K_0(\Phi|_{\Gamma_0}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} > 0 \quad (\nabla \Phi \neq 0). \quad (3.14)$$

Доказательство. Свойство компактности элементов (3.13) матрицы \mathcal{A} является следствием того факта, что операторы T_j , $j = \overline{0, 2}$, вспомогательных задач (3.7)–(3.9) ограниченно действуют из пространств (3.10) в $H^1(\Omega)$, а операторы следа γ_j , $j = \overline{0, 2}$, являются компактными операторами из $H^1(\Omega)$ в пространства (3.10) (теорема Гальярдо, см. [9]).

Убедимся теперь, что выполнено свойство (3.14). В самом деле, левая часть неравенства (3.14) равна (см. (3.6))

$$\begin{aligned} &(\Phi|_{\Gamma_0}, \zeta_0)_{L_2(\Gamma_0)} + (\Phi|_{\Gamma_1}, \zeta_1)_{L_2(\Gamma_1)} + (\Phi|_{\Gamma_2}, \zeta_2)_{L_2(\Gamma_2)} \\ &- K_0(\Phi|_{\Gamma_0}) \{ (1_{\Gamma_0}, \zeta_0)_{L_2(\Gamma_0)} + (1_{\Gamma_1}, \zeta_1)_{L_2(\Gamma_1)} + (1_{\Gamma_2}, \zeta_2)_{L_2(\Gamma_2)} \} \\ &= \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma = \int_{\partial \Omega} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 d\Omega. \end{aligned}$$

Данное выражение для собственных колебаний гидросистемы пропорционально ее кинетической энергии и положительно, если поле скорости, пропорциональное $\nabla\Phi$, ненулевое. \square

Из леммы 3.1 и предыдущих построений следует, что задача о собственных колебаниях гидросистемы приведена к задаче на собственные значения (3.12), т.е. к задаче

$$\mathcal{B}\check{\zeta} = \lambda\mathcal{A}\check{\zeta},$$

$$\check{\zeta} := (\eta_0; \zeta_1; \zeta_2)^T \in \mathcal{D}(B) \subset \check{L}_2 := L_{2,\Gamma_0} \oplus L_2(\Gamma_1) \oplus L_2(\Gamma_2), \quad (3.15)$$

где \mathcal{B} и \mathcal{A} — операторные матрицы (3.12). Здесь оператор \mathcal{B} , как следует из рассмотрений п. 2.2, имеет дискретный вещественный спектр, состоящий из двух ветвей собственных значений с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Далее, оператор \mathcal{A} является компактным и положительным. Эти свойства позволяют установить следующий факт.

Лемма 3.2. *Задача (3.15) о собственных колебаниях гидросистемы имеет дискретный вещественный спектр с предельной точкой $\lambda = \infty$. Если собственные значения оператора \mathcal{B} удовлетворяют неравенствам:*

$$-\infty < \lambda_1(\mathcal{B}) \leq \dots \leq \lambda_\varkappa(\mathcal{B}) < 0 = \lambda_{\varkappa+1}(\mathcal{B}) = \dots = \lambda_{\varkappa+q}(\mathcal{B})$$

$$< \lambda_{\varkappa+q+1}(\mathcal{B}) \leq \dots \leq \lambda_k(\mathcal{B}) \leq \dots, \quad \lambda_k(\mathcal{B}) \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow \infty),$$

то собственные значения $\lambda_k := \lambda_k(\mathcal{B}; \mathcal{A})$ задачи (3.15) удовлетворяют аналогичным неравенствам

$$-\infty < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_\varkappa < 0 = \lambda_{\varkappa+1} = \dots = \lambda_{\varkappa+q} < \lambda_{\varkappa+q+1} \leq \dots$$

$$\leq \lambda_k \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

Доказательство. Для уравнений вида (3.15) с указанными свойствами операторов \mathcal{A} и \mathcal{B} , действующих в произвольном (сепарабельном) гильбертовом пространстве, доказательство можно найти в [10, п. 1.4.2–1.4.5]. \square

Следствием установленных фактов является такое итоговое утверждение.

Теорема 3.1 (о динамической устойчивости и неустойчивости).

1°. *Если минимальное собственное значение $\lambda_1(\mathcal{B})$ оператора потенциальной энергии \mathcal{B} положительно, то исследуемая гидросистема динамически устойчива.*

2°. Если $\lambda_1(\mathcal{B}) < 0$, то гидросистема динамически неустойчива, причем устойчивость теряется на сдвиговых возмущениях поверхности Γ_0 .

3°. Границе области динамической устойчивости соответствует условие (2.25).

Утверждения 1°–3° этой теоремы называют спектральным признаком динамической устойчивости гидросистемы.

Вместо доказательства теоремы 3.1 отметим только, что границе области статической и динамической устойчивости отвечает условие $\lambda_* = \lambda_{\min}(\tilde{\mathcal{B}} + b_0\tilde{K}) = 0$ как в статической задаче (2.18), так и в динамической задаче (3.15), т.е. задаче (3.12). Поэтому справедливы утверждения теорем 2.2 и 2.3, что приводит при горизонтальной либо криволинейной Γ_0 к условию (2.25).

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за замечания и советы, приведшие к улучшению содержания статьи.

Литература

- [1] В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тющов, *Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости*, К.: Наукова думка, 1992, 592 с.
- [2] Н. Д. Копачевский, З. З. Ситшаева, *О равновесии и устойчивости капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью в открытом сосуде // Нелинейные колебания*, **17** (2014), No. 1, 58–71.
- [3] И. А. Луковский, А. В. Михайлюк, А. М. Тимоха, *Об одном вариационном критерии устойчивости псевдоравновесных форм // Украинский математический журнал*, **48** (1996), No. 11, 1688–1695.
- [4] С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*, М.: Наука, 1970, 512 с.
- [5] Р. Финн, *Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория*, М.: Мир, 1989, 310 с.
- [6] М. Ya. Barnyak, *Construction of solutions for the problem of free oscillations of an ideal liquid in cavities of complex geometric form // Ukrainian Mathematical Journal*, **57** (2005), No. 12, 1853–1869.
- [7] I. Gavrilyuk, I. Lukovsky, A. Timokha, *Two-dimensional variational vibroequilibria and Faraday's drops // Z. angew. Math. Phys.*, **55** (2004), 1015–1033.
- [8] I. P. Gavrilyuk, I. A. Lukovsky, V. L. Makarov, A. N. Timokha, *Evolutional problems of the contained fluid*, Kiev: Publishing House of the Institute of Mathematics of NASU, (2006), 233 p.
- [9] E. Gagliardo, *Caratterizzazioni delle tracce sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni in "n" variabili // Rend. d. Semin. Mat. d. Univ. di Padova*, **27** (1957), 284–305.
- [10] N. D. Kopachevsky, S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Basel: Birkhauser Verlag, **128** (2001), 384 p.

- [11] N. D. Kopachevsky, S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids*, Basel: Birkhauser Verlag, **146**, (2003), 444 p.
- [12] D. W. Langbein, *Capillary Surfaces: Shape–Stability–Dynamics, in Particular Under Weightlessness* (Springer Tracts in Modern Physics), Berlin, Heidelberg: Springer, **178**, (2002), 366 p.
- [13] I. A. Lukovsky, A. N. Timokha, *Asymptotic and variational methods in nonlinear problems on interaction of surface waves with acoustic field* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **65** (2001), No. 3, 477–485.
- [14] A. D. Myshkis, V. G. Babckii, N. D. Kopachevskii, L. A. Slobozhanin, A. D. Tyuptsov, *Low-Gravity Fluid Mechanics*, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokio: Springer-Verlag, 1987, 583 p.
- [15] L. A. Slobozhanin, J. I. D. Alexander, *The stability of two connected drops suspended from the edges of circular holes* // Journal of Fluid Mechanics, **563** (2006), 319–355.
- [16] L. A. Slobozhanin, V. M. Shevtsova, J. I. D. Alexander, J. Meseguer, J. M. Montanero, *Stability of Liquid Bridges Between Coaxial Equidimensional Disks to Axisymmetric Finite Perturbations* // Microgravity Science and Technology, **24** (2012), 65–77.
- [17] A. N. Timokha, *Planimetry of vibrocapillary equilibria at small wave numbers* // International Journal of Fluid Mechanics. Research, **32** (2005), No. 4, 454–487.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Николай
Дмитриевич
Копачевский**

Факультет математики и информатики,
Таврический национальный университет
им. В. И. Вернадского,
пр. акад. Вернадского 4,
Симферополь, 95007,
Россия
E-Mail: kopachevsky@list.ru

**Зера Зекерьяевна
Ситшаева**

Факультет информатики,
Крымский инженерно-педагогический
университет,
пер. Учебный 8, ул. Севастопольская,
Симферополь, 95015,
Россия
E-Mail: szz2008@mail.ru