Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 2, 158 – 180

Застосування узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій до розв'язування задачі Коші для рівняння адвекції

Аркадій А. Кіндибалюк, Микола М. Притула

(*Представлена А. Є. Шишковим*)

Анотація. Доведено апроксимаційні властивості та умови збіжності обчислювальної схеми узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для розв'язування задачі Коші з одновимірним рівнянням адвекції. Зведення задачі Коші для рівняння адвекції до системи лінійних алгебричних рівнянь забезпечує факторіальну збіжність за усіма змінними, що входять до рівняння.

2010 MSC. 35L03, 35L67, 41A05, 41A10, 41A25, 41A65, 65M06, 65M15, 65M70.

Ключові слова та фрази. Узагальнений метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій, апроксимаційна схема, дискретизація, рівняння адвекції, факторіальна збіжність.

1. Вступ

Багато важливих явищ природознавства, задач техніки та фізики описують диференціальними рівняннями, в тому числі диференціальними рівняннями у частинних похідних (ДРЧП). Незважаючи на потужний математичний апарат, багато з таких рівнянь ми не можемо розв'язати точно. Звідси випливає необхідність застосування наближених методів або аналітично-числових методів. Одним з таких підходів є метод Лі-алгебричних дискретних апроксимацій [2, 5, 6, 9, 11–22].

Цей метод вперше застосував Ф. Калоджеро у 1983 році для обчислення власних значень диференціальних операторів для спектральної задачі [15, 16]. У методі використовуються алгебри Лі та їх квазізображення.

Стаття надійшла в редакцію 22.12.2013

У 1988 році Митропольський Ю. А., Прикарпатський А. К., Самойленко В. Г. запропонували розширення Лі-алгебричного методу [6,9] для розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних, даючи нову назву, а саме *"Лі-алгебрична дискретна апроксимація"*. Ідея методу полягає у редукції ДРЧП до системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) з використанням квазізображень алгебри Лі [6,9]. У [6] представлено метод без доведення збіжності алгоритму. Збіжність обчислювальної схеми для лінійного еволюційного ДРЧП доведена у [9] шляхом дослідження еволюції похибки.

У 1996 році Казас [17] запропонував розв'язування задач Коші для ДРЧП на основі алгебр Лі, проте за допомогою такого методу можна розв'язати лише обмежений клас диференціальних рівнянь.

У праці [20] знайдено оцінку порядку збіжності для диференціального оператора другого порядку при виборі поліномів Лагранжа.

З погляду прикладного чисельного аналізу нас цікавлять два аспекти: побудова обчислювальної схеми та визначення ознак, які гарантують збіжність схеми.

Основною задачею дослідження у роботах [6, 13] є задача Коші для системи еволюційних рівнянь із частинними похідними

$$\begin{cases} u_t = K(t,x,\partial)u + f(t,x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^q,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi \in B, \end{cases} \tag{1.1}$$

де B — деякий простір Банаха.

До розгляду введена алгебра Гайзенберга–Вейля

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{j=1}^{q} \{x_j, \partial/\partial x_j, 1\},$$

яка є алгеброю Лі.

Як і в методі, що використовував Калоджеро, запропоновано розглядати лінійні оператори $X_j^{(n)}, Z_j^{(n)}, I^{(n)} \in \bigotimes_{j=1}^{q} \mathbb{R}^{n_j}$ як "квазізображення" операторів алгебри Гайзенберга–Вейля: $x_j, \partial/\partial x_j, 1$, відповідно.

Шляхом побудови квазізображення диференціального оператора K у просторі лінійних операторів над $\mathbb{R}^N,\ N \in \mathbb{Z}_+$ задачу (1.1) зводять до задачі Коші для системи ЗДР

$$\begin{cases} du_{(n)}/dt = K_{(n)}(t)u_{(n)} + f_{(n)}(t), \\ u_{(n)}|_{t=0} = \varphi_{(n)} \in B_{(n)}, \end{cases} \tag{1.2}$$

де $B_{(n)}$ — скінченновимірний простір, ізоморфний $\mathbb{R}^N,\ N = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_q$. Подібно до методу Калоджеро, редукція (1.2) задачі (1.1) на простір $B_{(n)}$ отримана шляхом q-вимірної алгебричної інтерполяції на q-вимірному кубі $D \supset \Omega$.

При використанні цього методу зроблено важливе припущення, що диференціальний оператор K належить до універсальної огортуючої алгебри $U(\mathcal{G})$ алгебри $\mathcal{G}$ Гайзенберга–Вейля. На практиці це означає, що оператор K можна представити як суму деяких суперпозицій операторів $x_j, \partial/\partial x_j, 1$. Це зокрема означає, що для безпосереднього застосування схеми Лі-алгебричних дискретних апроксимацій необхідно, щоб диференціальний оператор K був лінійним оператором.

У [3] запропоновано узагальнений метод розв'язування задачі Коші для ДРЧП (1.1) та зредукованої задачі для системи ЗДР (1.2) шляхом зведення задач до системи лінійних алгебричних рівнянь.

З цією метою введено додатково тривимірну алгебру Лі $\mathcal{G}_t := \{t, \partial/\partial t, 1\}$, для якої побудовано скінченновимірні квазізображення $X_t^{(n)}, Z_t^{(n)}, I_t^{(n)}$. Оскільки оператор K є лінійним оператором, то розв'язок задач (1.1) та (1.2) можна отримати як розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь. Якщо коефіцієнти диференціального оператора не змінюються при зміні обчислювального експерименту, а змінюються початкові умови чи функція вільного члена, то зберігаючи у пам'яті обернену матрицю, розв'язування задачі Коші зводиться до перемножування оберненої матриці на вектор [3].

Завданням статті є застосування такого підходу для рівняння адвекції, оскільки числові експерименти з використанням методу Лі-алгебричних апроксимацій не були проведені, а також з'ясування питання збіжності обчислювальної схеми і встановлення ознак збіжності.

Зазначимо, що у праці [6] схему Лі-алгебричних апроксимацій запропоновано розглядати у контексті загальної апроксимаційної схеми, викладеної у Треногіна, хоча відповідні умови теореми про збіжність загальної апроксимаційної схеми не були перевірені. У [18] для збіжності припускали, що оператор A_h такий, що

$$\exists\, \alpha > 0 \,:\, \|A_h u_h\|_{C_h} \geq \alpha \|u_h\|_{B_h},$$

де B_h, C_h — деякі скінченновимірні простори, а в [5] умовою збіжності було існування обмеженого оберненого оператора задачі, і оцінка норми похибки залежала від норми оберненого оператора задачі.

Окреслимо мету даної роботи:

1. Узагальнення методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для розв'язування задач Коші для еволюційних рівнянь шляхом

дискретизації як за просторовими змінними, так і за часовою змінною.

2. Дослідження апроксимаційних властивостей узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій та доведення його збіжності.

3. Проведення числових тестів розв'язування задачі Коші узагальненим методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій та порівняння з методом скінченних різниць та методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

Структура роботи відповідає сформульованій меті, а саме у другому пункті сформульовано модельну задачу Коші для рівняння адвекції, у третьому пункті на підставі введеної алгебри Лі та побудованих квазізображень елементів алгебри Лі побудовано схему наближеного відшукання розв'язку задачі. Досліджено ранг скінченновимірного квазізображення задачі, а в четвертому пункті наведено оцінки такого квазізображення. У п'ятому пункті доведено збіжність побудованої схеми. Порівняння чисельних схем наведено у шостому пункті.

2. Формулювання задачі

Введемо область $\Omega = (0, 1)$, часову межу $T < +\infty$, циліндр $Q_T = \Omega \times (0, T]$, простори Банаха у вигляді $V = C^{1,1}_{x,t}(Q_T) \cap C\left(\overline{Q_T}\right)$ та $C = C(Q_T)$, причому $V \subset L^2(Q_T), C \subset L^2(Q_T)$. Формулюємо задачу Коші для одновимірного рівняння адвекції:

$$\begin{cases} \textit{задано коефіцієнт адвекційного переносу } c \in \mathbb{R},\ c > 0, \\ \textit{початковий розподіл шуканої величини } \varphi = \varphi(x) \in C^1_x(\Omega) \\ \textit{знайти функцію } u = u(x,t) \in V \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \forall\,(x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здійснивши підстановку $u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$ у (2.1), отримаємо задачу Коші для функції $v(x,t)$ з однорідною початковою умовою

$$\begin{cases} \textit{задано коефіцієнт адвекційного переносу } c \in \mathbb{R},\ c > 0, \\ \textit{знайти функцію } v = v(x,t) \in V \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + c\dfrac{\partial v}{\partial x} = -c\dfrac{d\varphi}{dx},\ \forall\,(x,t) \in Q_T, \\ v|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Розв'язок задачі (2.2) шукаємо у просторі функцій, які в початковий момент часу набувають нульового значення, тобто у просторі $B = \{v \in V : v|_{t=0} = 0\}$. Ввівши для задачі (2.2) позначення

$$A := \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}, \quad f := -c\frac{d\varphi}{dx} \in C(Q_T), \tag{2.3}$$

отримаємо задачу для операторного рівняння

$$\begin{cases} \textit{задано оператор } A : B \to C \textit{ та елемент } f \in C, \\ \textit{знайти елемент } v \in B \textit{ такий, що } Av = f. \end{cases} \tag{2.4}$$

Задачу Коші зведено до задачі для операторного рівняння, яку розв'яжемо узагальненим методом Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.

3. Побудова обчислювальної схеми

Введемо алгебру Гайзенберга–Вейля $\mathcal{G} := \{x, \partial/\partial x, 1\} \bigoplus \{t, \partial/\partial t, 1\}$, яка є алгеброю Лі. Оскільки оператор A належить до універсальної огортуючої алгебри алгебри $U(\mathcal{G})$, то він є лінійною комбінацією елементів алгебри Гайзенберга–Вейля. Квазізображення A_h оператора A побудуємо як лінійну комбінацію скінченновимірних квазізображень алгебри $\mathcal{G}$. З цією метою зафіксуємо два натуральні числа N_x та N_t, де N_x — кількість вузлів за змінною x, N_t — кількість вузлів за змінною t. Згідно з теоремою Вейєрштрасса [4, 10], множина довільних поліномів з дійсними коефіцієнтами є щільною множиною в просторі $C(Q_T)$, тому розв'язок (2.4) шукатимемо у вигляді інтерполяційного полінома.

Для кожного вузла за змінною x асоційовано поліном Лагранжа $l_j(x)$, який задовольняє умову $l_j(x_i) = \delta_{ij}$, де

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Для кожного вузла за змінною t асоційовано поліном Лагранжа $l_j(t)$ такий, що $l_j(t_i) = \delta_{ij}$,

Нехай $M_j = (x_{jx}, t_{jt})$ — вузли області Q_T, де j_x — номер вузла на осі x, j_t — номер вузла на осі t. Набір таких вузлів позначимо

$$Q_{T,h} = \{x_i\}_{i=1}^{N_x} \times \{t_j\}_{j=1}^{N_t}\,.$$

Вузли занумеруємо у спосіб $j = (j_t - 1)N_x + j_x$, тоді поліном Лагранжа асоційований з вузлом M_j, має вигляд $l_j(x,t) = l_{jx}(x) l_{jt}(t)$. Отже, апроксимація розв'язку (2.4) набуде вигляду

$$v_h(x,t) = \sum_{j_t=1}^{N_t} \sum_{j_x=1}^{N_x} v_j l_{j_x}(x) l_{j_t}(t) = \overline{v}\left(l(t) \otimes l(x)\right), \tag{3.1}$$

де $\overline{v} = \{v_j\}_{j=1}^{N_x N_t}$ — відповідний вектор значень апроксимації, символ $\otimes$ позначає тензорний добуток, $l(x) = \{l_1(x), l_2(x), \ldots, l_{N_x}(x)\}^\top, l(t) = \{l_1(t), l_2(t), \ldots, l_{N_t}(t)\}^\top$ — відповідні набори поліномів Лагранжа за змінними x, t, $\top$ — знак траспонування.

Для побудови обчислювальної схеми розв'язування задачі (2.2), підставимо (3.1) у операторне рівняння (2.4) і отримаємо

$$\overline{v}\left(l'(t) \otimes l(x) + c l(t) \otimes l'(x)\right) = f(x,t),$$

якщо послідовно для кожної змінної вибрати $i_x, j_x = \overline{1, N_x}$, $i_t, j_t = \overline{1, N_t}$, то отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) вигляду $A_{1,h} v_h = F_h$, де

$$A_{1,h} := Z_t \otimes I_x + c I_t \otimes Z_x, \quad F_h = \{f(x_{i_x}, t_{j_t})\}_{i_x=1, j_t=1}^{N_x, N_t},$$

скінченновимірні квазізображення Z_x, Z_t, I_x, I_t побудовані за такими правилами

$$Z_{x,ij} = l'_j(x_i), \quad i,j = \overline{1, N_x}, \qquad Z_{t,ij} = l'_j(t_i), \quad i,j = \overline{1, N_t},$$

$$I_{x,ij} = l_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1, N_x}, \qquad I_{t,ij} = l_j(t_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1, N_t}.$$

На підставі теореми про ранг скінченновимірного зображення [14] ранги відповідних квазізображень мають значення:

$$\operatorname{rank}(Z_t) = N_t - 1, \quad \operatorname{rank}(I_x) = N_x,$$

$$\operatorname{rank}(I_t) = N_t, \quad \operatorname{rank} Z_x = N_x - 1.$$

Ранги матриць $Z_t \otimes I_x, I_t \otimes Z_x$ набудуть значень:

$$\operatorname{rank}\left(Z_t \otimes I_x\right) = (N_t - 1) N_x, \quad \operatorname{rank}\left(I_t \otimes Z_x\right) = (N_x - 1) N_t$$

Так як при побудові матриці ми врахували всі вузли, то кількість рядків матриці становить $N_x N_t$.

Оскільки початкові умови вже є відомими і однорідними, то вважатимемо, що базисом простору апроксимації є множина поліномів Лагранжа, без поліномів асоційованих з початковим моментом часу. Тобто множина поліномів Лагранжа для часової змінної є $\tilde{l}(t) = \{l_2(t), l_3(t), \ldots, l_{N_t}(t)\}$, причому

$$\forall\, l_i \in \tilde{l}(t) : l_i|_{t=0} = 0 \Rightarrow \forall\, l_i \in \tilde{l}(t) : l_i \in B, \quad i = \overline{2, N_t}.$$

Розмірність $\dim \tilde{l}(t) = N_t - 1$. Оскільки система функцій $l_x \otimes \tilde{l}_t \in B$ є лінійно незалежна, то вважатимемо, що саме вона формує базис простору апроксимацій B_h.

Вилучивши вузли, асоційовані з початковим моментом часу, отримаємо нову систему вузлів:

$$\tilde{Q}_{T,h} = \{x_i\}_{i=1}^{N_x} \times \{t_j\}_{j=2}^{N_t}.$$

Отже, скінченновимірні квазізображення в просторі B_h мають вигляд:

$$Z_{x,ij} = l'_j(x_i), \quad i,j = \overline{1, N_x}, \qquad \tilde{Z}_{t,ij} = l'_j(t_i), \quad i,j = \overline{2, N_t},$$

$$I_{x,ij} = l_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1, N_x}, \qquad \tilde{I}_{t,ij} = l_j(t_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{2, N_t}.$$

Ранги скінченновимірних квазізображень $\tilde{Z}_t \otimes I_x, I_t \otimes Z_x$ набули значень:

$$\operatorname{rank}\left(\tilde{Z}_t \otimes I_x\right) = (N_t - 1)N_x, \quad \operatorname{rank}\left(\tilde{I}_t \otimes Z_x\right) = (N_x - 1)(N_t - 1).$$

Скінченновимірне квазізображення оператора задачі (2.4) набуде вигляду

$$A_h = \tilde{Z}_t \otimes I_x + c\tilde{I}_t \otimes Z_x. \tag{3.2}$$

Кількість рядків у матриці (3.2) становить $(N_t - 1)N_x$.

Лема 3.1. *Матриця $\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x$ нільпотентна.*

Доведення. На підставі властивості тензорного добутку матриць A і B:

$$(A \otimes B)(A \otimes B) = A^2 \otimes B^2$$

переконуємося, що справедливе співвідношення

$$\left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x\right)^k = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^k \otimes (Z_x)^k.$$

Зважаючи на те, що $\operatorname{rank}(Z_x) = N_x - 1$, та при $k = N_x$ маємо $(Z_x)^k = 0$, отже

$$\forall\, k \geq N_x : \left(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x\right)^k = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^k \otimes (Z_x)^k = \left(\tilde{Z}_t^{-1}\right)^k \otimes 0 = 0,$$

що доводить лему. □

Позначимо I^N одиничну матрицю $\tilde{I}_t \otimes I_x$.

Лема 3.2. *Матриця $I^N + c\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x$ має обернену матрицю і її ранг є $(N_t - 1)N_x$.*

Доведення. Запишемо обернену матрицю $(I^N + c\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x)^{-1}$ у вигляді формального ряду

$$\big(I^N + c\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x\big)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(-c\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x\big)^k.$$

Оскільки матриця $\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x$ на підставі леми 3.1 є нільпотентна, то

$$\big(I^N + \tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x\big)^{-1} = \sum_{k=0}^{(N_t-1)N_x} \big(-c\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x\big)^k. \tag{3.3}$$

Оскільки ряд (3.3) є скінченний, то матриця $I^N + c\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x$ має обернену матрицю і її ранг дорівнює кількості рядків у матриці, тобто

$$\operatorname{rank}\big(I^N + c\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x\big) = (N_t - 1)N_x,$$

що доводить лему. □

Теорема 3.1. *Про ранг скінченновимірного квазізображення оператора задачі Коші з одновимірним рівнянням адвекції.*

Ранг скінченновимірного квазізображення A_h становить

$$N_x(N_t - 1).$$

Доведення. Запишемо матрицю (3.2) у вигляді

$$\begin{aligned} A_h = \tilde{Z}_t \otimes I_x\big(\tilde{I}_t \otimes I_x + c\big(\tilde{Z}_t^{-1} \otimes I_x^{-1}\big)\big(\tilde{I}_t \otimes Z_x\big)\big) \\ = \tilde{Z}_t \otimes I_x\big(I^N + c\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x\big). \end{aligned}$$

У лемі 3.2 з'ясовано, що

$$\operatorname{rank}\big(I^N + c\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x\big) = N_x(N_t - 1), \quad \operatorname{rank}\big(\tilde{Z}_t \otimes I_x\big) = N_x(N_t - 1).$$

Оскільки для двох матриць A, B виконується властивість

$$\operatorname{rank}(AB) = \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\},$$

то ранг скінченновимірного зображення набув значення

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(A_h) = \operatorname{rank}\big(\tilde{Z}_t \otimes I_x\big(I^N + c\tilde{Z}_t^{-1} \otimes Z_x\big)\big) \\ = \min\{N_x(N_t - 1), N_x(N_t - 1)\} = N_x(N_t - 1), \end{aligned}$$

що доводить теорему. □

Апроксимацію розв'язку (3.1) подамо у вигляді

$$v_h(x,t) = \sum_{j=N_x}^{N_x N_t} v_j l_j(x,t), \quad \forall\,(x,t) \in Q_T,$$

або

$$v_h(M) = \sum_{j=N_x}^{N_x N_t} v_j l_j(M), \quad \forall\, M \in Q_T, \tag{3.4}$$

де l_j — відповідний поліном Лагранжа, асоційований з вузлом $M_j \in \tilde{Q}_{T,h}$.

Зазначимо, що оскільки $v_h|_{t=0} = 0$, то $v_h \in B_h \subset B$.

Підставивши (3.4) в операторне рівняння (2.4), отримаємо рівняння

$$\sum_{j=1}^{N_x N_t} v_j A\left(l_j(M)\right) = f(M), \quad \forall\, M \in Q_T.$$

Вибравши послідновно $M := M_i \in \tilde{Q}_{T,h} \subset Q_T$, отримаємо СЛАР:

$$\sum_{j=N_x}^{N_x N_t} v_j A\left(l_j(M)\right)|_{M=M_i} = f(M_i), \quad i = \overline{1, N_x N_t} \tag{3.5}$$

для визначення невідомих компонент вектора $\overline{v}$. Введемо позначення

$$A_{h,ij} = A\left(l_j(M)\right)|_{M=M_i}, \quad f_{h,i} = f(M_i) \quad i,j = \overline{N_x, N_x N_t}.$$

Зазначимо, що знайдена матриця A_h співпадає зі скінченновимірним квазізображенням (3.2). Отже, ми отримали дискретне формулювання операторного рівняння:

$$\begin{cases} \textit{задано оператор } A_h : B_h \to C_h \textit{ та елемент } f_h \in C_h, \\ \textit{знайти елемент } v_h \in B_h \textit{ такий, що } A_h v_h = f_h, \end{cases} \tag{3.6}$$

4. Апроксимаційні властивості схеми

Нехай N — розмірність просторів B_h, C_h, тоді введемо циліндричну норму [10] у просторах B_h, C_h :

$$\|v\|_{B_h} = \|v\|_{C_h} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v_j^2}, \tag{4.1}$$

причому

$$\lim_{N\to\infty}\|v\|^2_{B_h}=\int\limits_{Q_t} v^2dx\,dt.$$

Нехай $v\in W^{n_xn_t,\infty}=\{v:Q_t\to\mathbb{R}:D^\alpha v\in L^\infty(Q_t),\ \forall\,|\alpha|\le n_xn_t\}$, тобто функція v разом зі своїми всіма можливими похідними до n_xn_t порядку належить до простору $L^\infty(Q_t)$.

Запишемо залишковий член [1] інтерполяційного полінома Лагранжа v_I:

$$v(x,t)-v_I(x,t)=\frac{\omega_{n_x}(x)}{(n_x)!}\frac{\partial^{n_x}v(\xi,t)}{\partial x^{n_x}}+\frac{\omega_{n_t}(t)}{(n_t)!}\frac{\partial^{n_t}v(x,\eta)}{\partial t^{n_t}}\\ -\frac{\omega_{n_x}(x)}{(n_x)!}\frac{\omega_{n_t}(t)}{(n_t)!}\frac{\partial^{n_x+n_t}v(\xi_1,\eta_1)}{\partial x^{n_x}\partial t^{n_t}},\quad (4.2)$$

де $\omega_{n_x}(x)=\prod_{i=1}^{n_x}(x-x_i)\,,\ \omega_{n_t}(t)=\prod_{i=1}^{n_t}(t-t_i)\,,\ \xi\in\Omega,\ \eta\in(0,T]$, $(\xi_1,\eta_1)\in Q_T$.

Теорема 4.1. *Про апроксимаційні властивості обчислювальної схеми узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з одновимірним рівнянням адвекції.*

Скінченновимірне квазізображення A_h апроксимує оператор A на елементі $v\in B\cap W^{n_xn_t,\infty}(Q_t)$, причому похибка апроксимації в нормі простору C_h характеризується оцінкою

$$\|Av-A_hv\|_{C_h}\le\frac{T^{n_t-1}}{(n_t-1)!}\left\|\frac{\partial^{n_t}v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty+c\frac{\operatorname{diam}(\Omega)^{n_x-1}}{(n_x-1)!}\left\|\frac{\partial^{n_x}v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty.\quad (4.3)$$

Доведення. Так як норма простору C_h є векторною нормою, то подамо різницю

$$Av-A_hv,\quad\forall\,v\in B$$

у вигляді вектора.

Для виразу $Av\in C$ отримаємо вектор $\{Av(M_i)\}_{i=1}^N$, де $M_i\in\tilde{Q}_{T,h}$.

Для елемента $v\in B$ знаходимо вектор-стовпець $\{v(M_j)\}_{j=1}^N$, де $M_j\in\tilde{Q}_{T,h}$. Розглянемо i-ту компоненту вектора A_hv:

$$(A_hv)_i=(A(l_1)(M_i),\dots,A(l_N)(M_i))\cdot(v(M_1),\dots,v(M_N))^\top\\ =\sum_{j=1}^N v(M_j)A\,(l_j)\,(M_i)=(Av_I)(M_i).$$

Отже, врахувавши отримане співвідношення $(A_hv)_i=(Av_I)(M_i)$, у підсумку отримаємо:

$$(Av-A_hv)_i=(Av(M)-Av_I(M))\,|_{M=M_i}.$$

Розглянемо $\|Av - A_h v\|_{C_h}$:

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left((Av(M) - Av_I(M))\,|_{M=M_i}\right)^2}$$
$$\leq \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(\sup_{M\in Q_T}|A\,(v(M) - v_I(M))|\Big)^2} \leq \|A\,(v - v_I)\,\|_\infty.$$

Отже, ми знайшли оцінку вигляду

$$\|Av - A_h v\|_{C_h} \leq \|A\,(v - v_I)\,\|_\infty. \tag{4.4}$$

Діючи оператором $A = \partial/\partial t + c\partial/\partial x$ на залишковий член інтерполяційного полінома Лагранжа (4.2), отримаємо таке наближення:

$$A\,(v - v_I) \approx \frac{\omega_{n_x-1}(x)}{(n_x-1)!}\frac{\partial^{n_t} v(\xi, t)}{\partial x^{n_x}} + \frac{\omega_{n_t-1}(t)}{(n_t-1)!}\frac{\partial^{n_t} v(x,\eta)}{\partial t^{n_t}}.$$

Врахувавши, що $v \in W^{n_x n_t,\infty}$, отримаємо оцінку

$$\|A\,(v - v_I)\,\|_\infty \leq \frac{|\omega_{n_t-1}(t)|}{(n_t-1)!}\left\|\frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + c\frac{|\omega_{n_x-1}(x)|}{(n_x-1)!}\left\|\frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty.$$

Оскільки значення полінома $\omega_{n_x-1}(x)$ залежить від положення вузлів, максимальне значення $\max_{x\in\Omega}(x - x_i) = \mathrm{diam}(\Omega)$ і $\deg(\omega_{n_x-1}(x)) = n_x - 1$, то отримаємо, що $|\omega_{n_x-1}(x)| \leq (\mathrm{diam}(\Omega))^{n_x-1}$. Аналогічну оцінку отримуємо для $\omega_{n_t-1}(t)$, тобто $|\omega_{n_t-1}(t)| \leq (T)^{n_t-1}$. Отже,

$$\|A\,(v - v_I)\,\|_\infty \leq \frac{(T)^{n_t-1}}{(n_t-1)!}\left\|\frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + c\frac{(\mathrm{diam}(\Omega))^{n_x-1}}{(n_x-1)!}\left\|\frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty. \tag{4.5}$$

Врахувавши (4.4) та (4.5), приходимо до оцінки (4.3), що доводить теорему. □

5. Збіжність обчислювальної схеми

Нехай B, C — простори Банаха. Розглянемо задачу для абстрактного операторного рівняння:

$$\begin{cases} \textit{задано оператор } A : B \to C \textit{ та елемент } f \in C, \\ \textit{знайти елемент } u \in B \textit{ такий, що } Au = f. \end{cases} \tag{5.1}$$

Нехай побудовано скінченновимірне зображення задачі (5.1)

$$\begin{cases} \textit{задано оператор } A_h : B_h \to C_h \textit{ та елемент } f_h \in C_h, \\ \textit{знайти елемент } u_h \in B_h \textit{ такий, що } A_h u_h = f_h, \end{cases} \tag{5.2}$$

де скінченновимірне зображення оператора A задається матрицею $A_h : B_h \to C_h,\ B_h \subset B,\ C_h \subset C$ — скінченновимірні простори такі, що $\lim_{h\to 0} B_h = B$, $\lim_{h\to 0} C_h = C$, $f_h \in C_h$ — апроксимація елемента $f \in C$, $u_h \in B_h$ — апроксимація розв'язку задачі (5.1).

Припустимо, що оператор A_h апроксимує оператор A на елементі $u \in B$ у сенсі

$$\lim_{h\to 0} \|Au - A_h u\|_C = 0, \quad \forall\, u \in B. \tag{5.3}$$

Для доведення збіжності апроксимаційної схеми, нам потрібно показати, що схема Лі-алгебричних дискретних апроксимацій задовольняє умови *теореми Канторовича* (*про збіжність абстрактної апроксимаційної схеми*) та теореми *про ознаку обмеженого оберненого оператора* [4].

Згідно з теоремою Канторовича [7] про збіжність абстрактної апроксимаційної схеми, співвідношення $\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_B = 0$ справедливе, якщо виконується:

1. $\forall\, f \in C,\ \exists!\, u \in B : Au = f,$

2. $\forall\, A_h,\ \exists\, A_h^{-1} : \|A_h^{-1}\| \le M < +\infty,$

3. $\forall\, u \in D(A) \subset B : \lim_{h\to 0} \|Au - A_h u\|_C = 0.$

Згідно з теоремою про ознаку обмеженого оберненого оператора [4], якщо лінійний оператор $A : B \to C$ такий, що

$$\exists\, \alpha = \mathrm{const} > 0 \textit{ таке, що } \|Au\|_C \ge \alpha \|u\|_B \quad \forall\, u \in D(A), \tag{5.4}$$

тоді існує лінійний обмежений обернений оператор.

У роботі [5] для доведення збіжності припустили, що обернений оператор задачі обмежений, а в роботі [18] припущено, що апроксимація оператора задачі та й сам оператор задачі обмежені знизу.

Зрозуміло, що знаходження константи $\alpha > 0$ є нетривіальною задачею. Крім того, послідовність операторів A_h є нескінченною послідовністю. Проте для практичного застосування методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій потрібно визначити якісь додаткові або еквівалентні ознаки існування оберненого обмеженого оператора. З огляду на важливість сформульованої проблеми доводемо теорему:

Теорема 5.1. *Про існування обмеженого оберненого оператора для квазізображення.*

Якщо ранг скінченновимірного матричного квазізображення A_h оператора A дорівнює розмірності простору апроксимації, тобто

$$\operatorname{rank} A_h = \dim B_h,$$

тоді існує обмежений обернений оператор A_h^{-1}, причому:

$$\forall\, A_h,\ \exists\, M > 0,\ \exists\, A_h^{-1} \,:\, \|A_h^{-1}\| \le M < +\infty. \tag{5.5}$$

Доведення. Оскільки норма задовольняє властивостям невід'ємності та невиродженості, тобто

$$\|A_h u\|_{C_h} \ge 0, \quad \forall\, u \in D(A_h),$$

причому

$$\|A_h u\|_{C_h} = 0 \Leftrightarrow u = 0_{B_h},$$

то

$$\forall\, u \in D(A_h) \backslash \{0_{B_h}\} \,:\, \|A_h u\|_{C_h} > 0.$$

Справді, нехай $\|A_h u\|_{C_h} = 0$. Оскільки норма задовольняє аксіому невиродженості, то такий випадок можливий лише тоді, коли $A_h u = 0_{C_h}$. Для ненульового елемента $u \in B_h$ це можливо лише тоді, коли $\det A_h = 0$, тобто $\operatorname{rank} A_h < \dim B_h$. Оскільки оператор A_h такий, що $\operatorname{rank} A_h = \dim B_h$, $\det A_h \ne 0$, тоді $\|A_h u\|_{C_h} = 0$ можливе тоді і тільки тоді, коли $u = 0_{B_h}$.

Величини $\|A_h u\|_{C_h}$ і $\|u\|_{B_h}$ строго додатні для $\forall\, u \in D(A_h) \backslash \{0_{B_h}\}$. Це означає, що можна знайти сталу $\alpha > 0$, для якої виконується

$$\|A_h u\|_{C_h} \ge \alpha \|u\|_{B_h}.$$

З того, що оператор A_h має обернений оператор, можемо показати, що

$$\|A_h u_h\|_{C_h} \ge \frac{\|u_h\|_{B_h}}{\|A_h^{-1}\|},$$

де $\alpha = \frac{1}{\|A_h^{-1}\|}$, а з другого боку

$$\|A_h^{-1}\| \le \frac{1}{\alpha}.$$

Вибравши сталу $M > 0$ як $M = \frac{1}{\alpha}$ та з того, що $\alpha > 0$, знаходимо, що

$$\|A_h^{-1}\| \le M < +\infty,$$

що завершує доведення теореми. □

Теорема 5.2. *Про збіжність абстрактної схеми Лі-алгебричних дискретних апроксимацій.*

Якщо виконуються такі умови:

1) *послідовність операторів* $\{A_h\}$ *апроксимує оператор* A *задачі* (5.1),

2) *усі оператори з послідовності* $\{A_h\}$ *є невироджені,*

3) *апроксимація елемента* $f \in C$ *задовольняє гіпотезу*

$$\lim_{h\to 0} \|f - f_h\|_{C_h} = 0, \tag{5.6}$$

то послідовність u_h *визначена схемою* (5.2) *відшукання розв'язку задачі* (5.1) *є збіжною до точного розв'язку, тобто*

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{B_h} = 0.$$

Доведення. Розглянемо $\|u - u_h\|_{B_h}$:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{B_h} = \|A_h^{-1} A_h (u - u_h)\|_{B_h} &\le \|A_h^{-1}\| \|A_h (u - u_h)\|_{C_h} \\ &= \|A_h^{-1}\| \|A_h (u - u_h) + Au - Au\|_{C_h} \\ &= \|A_h^{-1}\| \| (A_h u - Au) + (Au - A_h u_h)\|_{B_h} \\ &\le \|A_h^{-1}\| \left(\|Au - A_h u\|_{C_h} + \|f - f_h\|_{C_h}\right). \end{aligned}$$

Так як згідно з умовою теореми виконуються (5.5), тоді

$$\|u - u_h\|_{B_h} \le M \left(\|Au - A_h u\|_{C_h} + \|f - f_h\|_{C_h}\right),$$

а врахувавши умови апроксимаційності оператора (5.3) та елемента $f \in C$ (5.6), то в границі отримаємо

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{B_h} \le M \Big(\lim_{h\to 0} \|Au - A_h u\|_{C_h} + \lim_{h\to 0} \|f - f_h\|_{C_h} \Big) = 0.$$

Оскільки норма задовольняє аксіому невиродженості та невід'ємності, то

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{B_h} = 0,$$

що доводить теорему. □

Теорема 5.3. *Про збіжність схеми методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші з одновимірним рівнянням адвекції*

Послідовність u_h *визначена схемою* (3.6) *відшукання наближеного розв'язку задачі* (2.4) *збігається до точного розв'язку задачі* (2.1), *причому норма похибки характеризується величиною*

$$\|u-u_h\|_{B_h} \leq M\left(\frac{T^{n_t-1}}{(n_t-1)!}\left\|\frac{\partial^{n_t} v}{\partial t^{n_t}}\right\|_\infty + c\frac{\operatorname{diam}(\Omega)^{n_x-1}}{(n_x-1)!}\left\|\frac{\partial^{n_x} v}{\partial x^{n_x}}\right\|_\infty\right),$$

де число $M>0$ *таке, що* $\forall\, A_h : \|A_h^{-1}\| \leq M$.

Доведення. Справедливість теореми випливає з теореми про апроксимаційні властивості та теореми про збіжність абстрактної схеми методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій. □

6. Оцінки швидкості збіжності

Для проведення числових експериментів вважатимемо, що область $Q_T := [0,1]\times(0,1]$, тобто $x\in[0,1],\ t\in(0,1]$. Норму похибки апроксимації точного розв'язку $u-u_h = u(x,t)-u_h(x,t)$ в просторі $L^2(Q_T)$ обчислюємо за формулою

$$\|u-u_h\|^2_{L^2(Q_T)} = \int\limits_{Q_T}(u-u_h)^2\,dx\,dt,$$

в просторі $L^\infty(Q_{T,h})$:

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(Q_{T,h})} = \sup_{(x,t)\in Q_{T,h}}|u(x,t)-u_h(x,t)|,$$

а в просторі Соболєва $W^{1,2}(Q_T)$ [4]:

$$\|u-u_h\|^2_{W^{1,2}(Q_T)} = \int\limits_{Q_T}\left[(u-u_h)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial u_h}{\partial t}\right)^2\right]dx\,dt.$$

Порядок збіжності у нормі простору $L^2(Q_T)$ визначається формулою

$$p_{h,L^2(Q_T)} = \log_2\left(\frac{\|u-u_h\|_{L^2(Q_T)}}{\|u-u_{h/2}\|_{L^2(Q_T)}}\right),$$

порядок збіжності у нормі простору $L^\infty(Q_{T,h})$:

$$p_{h,L^\infty(Q_{T,h})} = \log_2\left(\frac{\|u-u_h\|_{L^\infty(Q_{T,h})}}{\|u-u_{h/2}\|_{L^\infty(Q_{T,h})}}\right).$$

а порядок збіжності у нормі простору $W^{1,2}(Q_T)$:

$$p_{h,W^{1,2}(Q_T)} = \log_2 \left(\frac{\|u - u_h\|_{W^{1,2}(Q_T)}}{\|u - u_{h/2}\|_{W^{1,2}(Q_T)}} \right),$$

Якщо $\|u - u_h\| = 0$ і $\|u - u_{h/2}\| = 0$, то невизначеність $0/0$ подаємо у таблицях як NaN (*not a number*).

Модельні задачі для рівняння адвекції досліджено нами з використанням методу скінченних різниць (МСР), методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій (МЛАДА) та узагальненого методу Лі-алгебричних дискретних апроксимацій (УМЛАДА). Зазначимо, що у випадку застосування методу МЛАДА, розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь здійснено з використанням вбудованих функцій пакету символьного обчислення Mathematica.

Позначимо $\Delta x = \frac{1}{(n_x - 1)}$ — крок дискретизації за просторовою змінною, та $\Delta t = \frac{1}{(n_t - 1)}$ — крок дискретизації за часовою змінною. Якщо крок дискретизації за просторовою та часовою змінними вибрані однаковими, то $h = \Delta x = \Delta t$. У випадку методу МЛАДА h позначає крок дискретизації тільки за просторовою змінною, оскільки розв'язування задачі Коші для системи ЗДР здійснюється з використанням пакету Mathematica, де кількість вузлів за часовою змінною вибирається автоматично.

Приклад 6.1. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \text{\textit{знайти функцію} } u = u(x,t) \text{ \textit{таку, що:}} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \forall\, (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = x^8. \end{cases} \tag{6.1}$$

отримано числові результати, які наведені у таблицях 1–4.

Точний розв'язок задачі (6.1) має вигляд $u(x,t) = (x - t)^8$. Зазначимо, що при розв'язуванні задачі (6.1) узагальненим методом ми розв'язували допоміжну задачу

$$\begin{cases} \text{\textit{знайти функцію} } v = v(x,t) \text{ \textit{таку, що:}} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -8x^7, \ \forall\, (x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Отримавши наближений розв'язок $v_h = v_h(x,t)$ задачі (6.2), побудовано наближений розв'язок $u_h = u_h(x,t)$ задачі (6.1) у спосіб

$$u_h(x,t) = x^8 + v_h(x,t),$$

де x^8 — початкова умова задачі (6.1).

Табл. 1. Значення норми похибок в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.181219	0.60862	1.50749
$h = 1/4$	0.0578845	2.67374	3.48162
$h = 1/8$	0.0156118	$1.16211 \cdot 10^{-6}$	0
$h = 1/16$	0.00398213	$1.54474 \cdot 10^{-6}$	0
$h = 1/32$	0.00100058	$7.48043 \cdot 10^{32}$	0
$h = 1/64$	0.000226284	$1.55729 \cdot 10^{97}$	0

Табл. 2. Значення норми похибок в просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	1.96875	8.8125
$h = 1/4$	0	19.0723	32.8477
$h = 1/8$	0	$6.58327 \cdot 10^{-6}$	0
$h = 1/16$	0	$3.19885 \cdot 10^{-5}$	0
$h = 1/32$	0	$1.21148 \cdot 10^{35}$	0
$h = 1/64$	0	$6.68331 \cdot 10^{99}$	0

Табл. 3. Значення норми похибок в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.00617	2.40898	8.72005
$h = 1/4$	0.590412	14.9363	25.0102
$h = 1/8$	0.299978	0.0000831284	0
$h = 1/16$	0.149898	0.0000554542	0
$h = 1/32$	0.0747075	$8.61647 \cdot 10^{34}$	0
$h = 1/64$	0.03627	$4.72785 \cdot 10^{99}$	0

Табл. 4. Значення порядків збіжності в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.64649	-2.13524	-1.20762
$h = 1/4$	1.89054	21.1337	$+\infty$
$h = 1/8$	1.97103	-0.410624	NaN
$h = 1/16$	1.99271	-128.509	NaN
$h = 1/32$	2.14463	-213.661	NaN

Табл. 5. Значення порядків збіжності в просторі $L^\infty(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	NaN	-3.27612	-1.89817
$h = 1/4$	NaN	21.4662	$+\infty$
$h = 1/8$	NaN	-2.28068	NaN
$h = 1/16$	NaN	-131.476	NaN
$h = 1/32$	NaN	-215.067	NaN

Табл. 6. Значення порядків збіжності в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.76908	-2.63233	-1.52011
$h = 1/4$	0.976865	17.4551	$+\infty$
$h = 1/8$	1.00087	0.584045	NaN
$h = 1/16$	1.00466	-130.191	NaN
$h = 1/32$	1.04247	-215.059	NaN

Зростання похибок у МЛАДА зумовлено тим, що ДРЧП зведене до системи ЗДР, яка є жорсткою і вимагає великої кількості вузлів за часовою змінною для коректного розв'язання задачі.

Приклад 6.2. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \forall\,(x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \sin x. \end{cases} \tag{6.3}$$

отримано числові результати, які наведені у таблицях 5–8.

Точний розв'язкок задачі (6.3) має вигляд $u(x,t) = \sin(x-t)$. Зазначимо, що при розв'язуванні задачі (6.3) узагальненим методом ми розв'язували допоміжну задачу

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } v = v(x,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\cos x, \ \forall\,(x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Отримавши наближений розв'язок $v_h = v_h(x,t)$ задачі (6.4), побудовано наближений розв'язок $u_h = u_h(x,t)$ задачі (6.3) у спосіб

$$u_h(x,t) = \sin x + v_h(x,t),$$

де $\sin(x)$ — початкова умова задачі (6.3).

Табл. 7. Значення норми похибок в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0152981	0.0849962	0.0396427
$h = 1/4$	0.00408866	0.00623154	0.00053962
$h = 1/8$	0.00103819	$5.7579 \cdot 10^{-6}$	$2.87577 \cdot 10^{-7}$
$h = 1/16$	0.000260541	$2.16961 \cdot 10^{-5}$	$2.38063 \cdot 10^{-15}$
$h = 1/32$	0.0000651094	$2.18418 \cdot 10^{35}$	$3.34574 \cdot 10^{-17}$

Табл. 8. Значення норми похибок в просторі $L^{\infty}(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	0.46952	0.0660836
$h = 1/4$	0	0.0514178	0.00372225
$h = 1/8$	0	$7.90058 \cdot 10^{-5}$	$4.24574 \cdot 10^{-6}$
$h = 1/16$	0	$4.70088 \cdot 10^{-4}$	$6.19514 \cdot 10^{-14}$
$h = 1/32$	0	$3.63265 \cdot 10^{37}$	$7.07336 \cdot 10^{-34}$

Табл. 9. Значення норми похибок в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0.0815902	0.383927	0.0903126
$h = 1/4$	0.0394812	0.0390588	0.0027526
$h = 1/8$	0.0195588	0.0000578184	$3.1048 \cdot 10^{-6}$
$h = 1/16$	0.00975607	0.000338286	$4.45453 \cdot 10^{-14}$
$h = 1/32$	0.00487437	$2.58733 \cdot 10^{37}$	$7.13162 \cdot 10^{-17}$

Табл. 10. Значення порядків збіжності в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.90365	3.76974	6.19897
$h = 1/4$	1.97756	10.0798	10.8738
$h = 1/8$	1.99448	-1.91382	26.848
$h = 1/16$	2.00057	-132.887	6.15287

Табл. 11. Значення порядків збіжності в просторі $L^{\infty}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	NaN	3.19085	4.15005
$h = 1/4$	NaN	9.34609	9.77594
$h = 1/8$	NaN	-2.5729	26.0303
$h = 1/16$	NaN	-135.827	66.2473

Табл. 12. Значення порядків збіжності в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	1.04723	3.29711	5.03606
$h = 1/4$	1.01335	9.3999	9.79208
$h = 1/8$	1.00344	-2.54864	26.0547
$h = 1/16$	1.00108	-135.812	9.28683

Розглянемо задачу Коші для рівняння адвекції, коли коефіцієнт швидкості адвекційного переміщення набув значення $c = 10^7$. Особливістю задач з таким коефіцієнтом є те, що для коректного розв'язання методом скінченних різниць необхідно, щоб крок дискретизації за часовою змінною був менший, ніж $10^{-7} \cdot \Delta x$. У прикладі 6.3 наведені розрахунки з однаковими кроками дискретизації.

Приклад 6.3. Для модельної задачі

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } u = u(x,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + 10^7 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \ \forall\,(x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = x^8. \end{cases} \tag{6.5}$$

отримано числові результати, які наведені у таблицях 9–12. Точний розв'язок задачі (6.5) має вигляд $u(x,t) = (x - 10^7 t)^8$. Зазначимо, що при розв'язуванні задачі (6.5) узагальненим методом ми розв'язували допоміжну задачу

$$\begin{cases} \textit{знайти функцію } v = v(x,t) \textit{ таку, що:} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 10^7 \dfrac{\partial v}{\partial x} = -8 \cdot 10^7 x^7, \ \forall\,(x,t) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

Отримавши наближений розв'язок $v_h = v_h(x,t)$ задачі (6.6), побудовано наближений розв'язок $u_h = u_h(x,t)$ задачі (6.5) у спосіб

$$u_h(x,t) = x^8 + v_h(x,t),$$

де x^8 — початкова умова задачі (6.5).

Табл. 13. Значення норми похибок в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$2.42536 \cdot 10^{55}$	$2.42536 \cdot 10^{55}$	$2.42536 \cdot 10^{55}$
$h = 1/4$	$2.42536 \cdot 10^{55}$	$1.07159 \cdot 10^{85}$	$2.42536 \cdot 10^{55}$
$h = 1/8$	$2.42084 \cdot 10^{55}$	$3.70179 \cdot 10^{226}$	0
$h = 1/16$	$3.68808 \cdot 10^{95}$	$1.65210 \cdot 10^{329}$	0

Табл. 14. Значення норми похибок в просторі $L^\infty(Q_{T,h})$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	10^{56}	10^{56}	10^{56}
$h = 1/4$	10^{56}	$2.85146 \cdot 10^{85}$	10^{56}
$h = 1/8$	$9.97597 \cdot 10^{55}$	$1.09473 \cdot 10^{227}$	0
$h = 1/16$	$1.73322 \cdot 10^{97}$	$2.55192 \cdot 10^{330}$	0

Табл. 15. Значення норми похибок в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$2.07978 \cdot 10^{56}$	$2.07978 \cdot 10^{56}$	$2.07978 \cdot 10^{56}$
$h = 1/4$	$2.07978 \cdot 10^{56}$	$3.98028 \cdot 10^{85}$	$2.07978 \cdot 10^{56}$
$h = 1/8$	$2.07366 \cdot 10^{56}$	$1.36823 \cdot 10^{227}$	0
$h = 1/16$	$1.9648 \cdot 10^{97}$	$1.73574 \cdot 10^{331}$	0

Табл. 16. Значення порядків збіжності в просторі $L^2(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$1.36358 \cdot 10^{-10}$	-98.4794	$3.20343 \cdot 10^{-16}$
$h = 1/4$	0.00269021	-470.18	$+\infty$
$h = 1/8$	-133.484	-340.99	NaN

Табл. 17. Значення порядків збіжності в просторі $L^\infty(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	0	-97.8476	0
$h = 1/4$	0.00347135	-470.333	$+\infty$
$h = 1/8$	-136.996	-343.38	NaN

Табл. 18. Значення порядків збіжності в просторі $W^{1,2}(Q_T)$

Крок h	МСР	МЛАДА	УМЛАДА
$h = 1/2$	$8.53519 \cdot 10^{-10}$	-97.2724	$-3.20343 \cdot 10^{-16}$
$h = 1/4$	0.00425044	-470.173	$+\infty$
$h = 1/8$	-136.121	-345.823	NaN

Наведені розрахунки показали, що для УМЛАДА достатньо вибрати крок $h = \Delta x = \Delta = 1/8$, щоб похибка стосовно точного розв'язку дорівнювала нулю. За таких же кроків з використанням схем МСР та МЛАДА неможливо отримати такий результат.

Висновки

Запропонований нами метод УМЛАДА дозволяє розв'язувати задачі з великими числами адвекційного переносу при малих кількостях вузлів. Така перевага зумовлена дискретизацією як за просторовою, так і за часовою змінними. У той час як для коректного розв'язання задачі методом МСР чи МЛАДА потрібно $9 \cdot 10^7$ вузлів, то для методу УМЛАДА достатньо лише дев'яти вузлів за часовою змінною. Це свідчить про те, що в методі УМЛАДА для коректного розв'язання потрібно щонайменше у 10^7 разів менше вузлів, ніж для МСР чи МЛАДА.

Нами визначено ранг скінченновимірного квазізображення диференціального оператора рівняння адвекції, досліджено апроксимаційні властивості та доведено факторіальну збіжність схеми узагальненого методу за двома змінними. Встановлено ознаки існування обмеженого оберненого оператора для абстрактної апроксимаційної схеми. Визначено умови, які гарантують збіжність схеми УМЛАДА. Проведено порівняння обчислювальних схем МСР, МЛАДА, УМЛАДА.

Рекурентні методи (МСР, МЛАДА) розв'язування задачі Коші передбачають перерахунок усіх кроків методу при зміні початкових умов. У методі УМЛАДА вимагається попереднє зведення задачі Коші до задачі з однорідними початковими умовами. Для того, щоб отримати розв'язок задачі Коші з іншими початковими умовами, достатньо перемножити обернену матрицю квазізображення оператора задачі на вектор квазізображення вільного члена.

Література

[1] И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений. Том. 1*, М: Физматгиз, 1962.

[2] О. Бігун, М. Притула, *Метод Лі-алгебричних апроксимацій у теорії динамічних систем* // Мат. вісник НТШ, **1** (2004), 24–31.

[3] А. А. Кіндибалюк, М. М. Притула, *Узагальнення схеми Лі-алгебричних дискретних апроксимацій для задачі Коші* // XIX Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". Тези доп., Львів, (2013), 73–74.

[4] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев *Элементы функционального анализа*, М.: Наука, 1965.

[5] М. Люстик, А. Прикарпатський, М. Притула, М. Вовк, *Функціонально-операторний аналіз проблеми збіжності для методу дискретних апроксимацій Ф. Калоджеро в банахових просторах* // Математичний вісник НТШ, **9** (2012), 168–179

[6] Ю. А. Митропольский, А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко, *Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций линейных и нелинейных динамических систем математической физики* // Укр. мат. журн., **40** (1988), 453–458.

[7] Р. Рихтмайер, *Разностные методы решения краевых задач*, М.: Мир, 1972.

[8] А. А. Самарский, А. В. Гулин, *Численные методы: Учеб. пособие для вузов*, М.: Наука. Гл. ред. физмат. лит., 1989.

[9] В. Г. Самойленко, *Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций динамических систем математической физики и оценки её точности* // Асимптотические методы в задачах мат. физики. К.: Ин-т математики АН УССР, (1988), 144–151.

[10] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, М: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[11] O. H. Bihun, *Approximation properties of the Lie-algebraic scheme* // Matematychni Studii, **20** (2003), No. 1, 85–91.

[12] O. H. Bihun, *Modification of the Lie-algebraic scheme and approximation error estimations* // Matematychni Studii, **20** (2003), No. 2, 179–184.

[13] O. H. Bihun, M. Luśtyk, *Numerical tests and theoretical estimations for a Lie-algebraic scheme of discrete approximations* // Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science, **6** (2003), 3–10.

[14] O. Bihun, M. Prytula, *The rank of projection-algebraic representations of some differential operators* // Matematychni Studii, **35** (2011), No. 1, 9–21.

[15] F. Calogero, *Interpolation, differentiation and solution of eigenvalue problems in more than one dimension* // Lett. Nuovo Cimento, **38** (1983), No. 13, 453–459.

[16] F. Calogero, E. Franko, *Numerical tests of a novel technique to compute the eigen values of differential operators* // Il Nuovo Cins., **89** (1985), No. 2, 161–208.

[17] F. Casas, *Solution of linear partial differential equations by Lie algebraic method* // J. of Comp. and Appl. Math., **76** (1996), 159–170.

[18] M. Luśtyk, *Lie-algebraic discrete approximation for nonlinear evolution equations* // Journal of Mathematical Sciences, **109** (2002), No. 1, 1169–1172.

[19] M. Luśtyk, *The Lie-Algebraic Discrete Approximation Scheme for Evolution Equations with Dirichlet/Neumann Data* // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, **40** (2002), 117–124.

[20] A. K. Prykarpatsky, M. M. Prytula, O. O. Yerchenko, *The Lie-algebraic discrete approximations in computing analysis* // Volyn Mathematical Bulletin, **3** (1996), 113–116.

[21] J. Wei, E. Norman, *On global representations of the solution of linear differential equations as a product of exponentials* // Proc. Amer. Math. Soc., **15** (1964), 327–334.

[22] F. Wolf, *Lie algebraic solutions of linear Foker-Plank equations* // J. math. phys., **29** (1988), 305–307.

Відомості про авторів

Аркадій Анатолійович Кіндибалюк, Микола Миколайович Притула

Львівський національний університет
імені Івана Франка
вул. Університетська 1,
79000, Львів
Україна
E-Mail: a.kindybaluk@mail.ru,
mykola.prytula@gmail.com