Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 2, 147 – 157

Уравнение свертки с ядром, представленным через гамма распределения

Ани Г. Барсегян

(*Представлена Р. М. Тригубом*)

Аннотация. Рассматривается интегральное уравнение свертки на полупрямой и на конечном промежутке, ядерная функция которой является плотностью распределения случайной величины, представленной в виде двусторонней смеси гамма-распределений. Развивается метод численно-аналитического решения этих уравнений, строится решение однородного уравнения на полупрямой в консервативном случае.

2010 MSC. 45E10 47B35.

Ключевые слова и фразы. Оператор свертки, факторизация, гамма-распределение, численно-аналитическое решение, однородное консервативное уравнение.

1. Введение

В математической физике, в теории вероятностей и др. широкие применения имеет интегральное уравнение свертки (см. [1–6]):

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^r K(x-t) f(t)\, dt, \quad r \le +\infty, \tag{1.1}$$

где $0 < \lambda \le 1$, а ядерная функция K удовлетворяет условиям:

$$0 \le K \in L_1(-\infty; \infty), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, dx = 1. \tag{1.2}$$

В случае $r = \infty$ уравнение (1.1) обращается в уравнение Винера–Хопфа второго рода.

Статья поступила в редакцию 7.10.2013

Условия (1.2) означают, что K является плотностью распределения некоторой случайной величины. Случай $\lambda < 1$ называется докритическим или диссипативным (ДС), а случай $\lambda = 1$ критическим или консервативным (КС).

Рассматриваемым уравнением описывается широкий круг граничных задач теории случайных блужданий на полупрямой, на отрезке, в полуплоскости, в полосе и др. (см. [1–3]). Большую роль в вопросе изучения этих задач играют факторизационные тождества (см. [4]), метод нелинейных уравнений факторизации (см. [6]) и другие факторизационные методы.

В теории переноса излучения число λ представляет собой вероятность истинного поглощения частицы при элементарном акте рассеяния. Сходную интерпретацию имеет эта величина в теории случайных блужданий (на отрезке $(0, r)$).

КС является особым случаем уравнения (1.1) на полупрямой, с вырождающимся символом.

Известно сравнительно мало случаев, когда уравнение (1.1) допускает эффективное численно-аналитическое решение. Решение уравнения на конечном промежутке, как правило, существенно сложнее решения соответствующего уравнения Винера–Хопфа. Так, например, в случае применения метода Винера–Хопфа, вместо скалярной факторизации (для задачи на полупрямой) требуется построить факторизацию следующей матрицы-функции (см. [5]):

$$A(s) = \begin{pmatrix} e^{-irs}\lambda\bar{K}(s) & -1-\lambda\bar{K}(s) \\ 1-\lambda\bar{K}(s) & e^{irs}\lambda\bar{K}(s) \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где через $\bar{K}$ обозначено преобразование Фурье от K.

Важный класс распределений неотрицательных случайных величин составляют гамма-распределения (с параметрами $s > 0,\ n > 0$):

$$f_{s,n}(x) = \frac{s^n x^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-s\,x}$$

и смеси таких распределений (см. [1]). Здесь $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ — гамма-функция Эйлера. Гамма-распределения с целым параметром $n > 0$ известны также как распределения Эрланга. Они играют важную роль в теории очередей и др.

В работе [7] предложен метод решения уравнения (1.1) на полупрямой с симметричным ядром, представленным через двустороннюю смесь гамма-распределений. В настоящей работе результаты [7] будут развиты по следующим направлениям:

а) случай несимметричного ядра;

б) случай консервативного однородного уравнения на полупрямой;

в) случай конечного промежутка (когда $r < \infty$).

Предполагается, что ядерная функция K представлена в следующем виде двусторонней смеси гамма-распределений:

$$K_{\pm}(x) \equiv K(\pm x) = \exp\left(-s^{\pm}x\right) P_N^{\pm}(x), x > 0. \tag{1.4}$$

Здесь $s_j^{\pm} > 0$, а $P_N^{\pm}$ суть полиномы порядка $\leq N$, с неотрицательными коэффициентами:

$$P_N^{\pm}(x) = \sum_{m=0}^{N} a_m^{\pm} \frac{(s^{\pm})^{m+1}}{m!} x^m, \quad a_m^{\pm} \geq 0,\ m = 0, 1, \ldots, N.$$

Условие нормировки (1.2) означает выполнение равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = \sum_{m=0}^{N} \left(a_m^{+} + a_m^{-}\right) = 1. \tag{1.5}$$

2. Решение уравнения (1.1), (1.4) на полупрямой

2.1. О факторизации на полупрямой

Пусть $\hat{K}$ интегральный оператор Винера–Хопфа с ядром $K \geq 0$, удовлетворяющим условиям (1.2):

$$\hat{K}f(x) = \int\limits_0^{\infty} K(x-t)\,f(t)\,dt, \quad K \in L_1(-\infty; \infty). \tag{2.1}$$

Пусть E одно из банаховых пространств $L_p(0,\,\infty)$, $p \geq 1$, $M(0,\,\infty) = L_\infty(0,\,\infty)$. В этих пространствах норма оператора $\hat{K}$ равна:

$$\|\hat{K}\|_E = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = 1\,.$$

Оператор $I - \lambda\hat{K}$, где I — единичный оператор, обратим в ДС и необратим в консервативном случае $\lambda = 1$. Приводимые ниже факты по уравнению (1.1) содержатся в [6].

В КС при $g \in L^+ \equiv L_1(0, \infty)$ существует локально интегрируемое на $[0, \infty)$ решение уравнения (1.1), обладающее асимптотикой:

$$\int\limits_0^x |f(t)|\,dt = o(x^2), \quad x \to \infty. \tag{2.2}$$

Существует факторизация:

$$I - \lambda \hat{K} = \big(I - \hat{V}_-\big)\big(I - \hat{V}_+\big), \tag{2.3}$$

где $\hat{V}_\pm$ суть верхний и нижний вольтерровые операторы:

$$\hat{V}_+ f\,(x) = \int\limits_0^x V_+(x-t) f(t)\,dt, \quad \hat{V}_- f(x) = \int\limits_x^\infty V_-(t-x) f(t)\,dt, \;\; V_\pm \in L^+. \tag{2.4}$$

Ядерные функции $V_\pm$ определяются из нелинейного уравнения факторизации (НУФ) Н. Б. Енгибаряна, которое представляет собой следующую систему из двух уравнений:

$$V_\pm\,(x) = \lambda K_\pm\,(x) + \int\limits_0^\infty V_\mp\,(t)\, V_\pm\,(x+t)\,dt. \tag{2.5}$$

В условиях (1.2), при $0 < \lambda \le 1$ НУФ (2.5) обладает основным решением (V_+, V_-), которое является пределом в $L^+ \times L^+$ простых итераций $V_n^\pm$, с нулевым начальным приближением. Функции $V_n^\pm$ и $V_\pm$ обладают свойствами:

$$0 \le V_n^\pm \in L^+, \quad V_n^\pm \uparrow V_\pm \quad \text{при } n \to \infty.$$

$$0 \le V_\pm \in L^+, \quad \gamma^\pm = \int\limits_0^\infty V_\pm(x)\,dx \le \lambda.$$

Если ядро K симметричное, то $V_n^\pm = V_n$ и $V_\pm = V$, а система (2.5) обращается в одно уравнение:

$$V\,(x) = \lambda K(x) + \int\limits_0^\infty V(t) V(x+t)\,dt, \quad x > 0.$$

Скорость сходимости итераций (V_n^+, V_n^-) описывается оценкой

$$\delta_n^+ + \delta_n^- \le 2(1 - \sqrt{1-\lambda})\lambda^n, \quad \text{где } \delta_n^\pm = \|V_\pm - V_n^\pm\|_{L^+}. \tag{2.6}$$

Ядро K вида (1.4) обладает всеми моментами конечного порядка. Для первого момента имеем выражение:

$$m_1 = \int\limits_{-\infty}^\infty x K\,(x)\,dx = \sum_{p=0}^N (p+1)\Big(\frac{a_p^+}{s^+} - \frac{a_p^-}{s^-}\Big).$$

При $\lambda \leq 1$ обратные операторы $(I - \hat{V}_\pm)^{-1}$ имеют вид:

$$\left(I - \hat{V}_\pm\right)^{-1} = I + \hat{\Phi}_\pm, \tag{2.7}$$

$$\hat{\Phi}_+ f(x) = \int_0^x \Phi_+(x-t) f(t)\, dt, \quad \hat{\Phi}_- f(x) = \int_x^\infty \Phi_-(t-x) f(t)\, dt. \tag{2.8}$$

Резольвентные функции $\Phi_\pm$ определяются из следующих уравнений типа Вольтерра:

$$\Phi_\pm(x) = V_\pm(x) + \int_0^x V_\pm(x-t)\, \Phi_\pm(t)\, dt. \tag{2.9}$$

В ДС, в силу $\gamma^\pm < 1$ имеем $\Phi_\pm \in L^+$. В консервативном случае формулы (2.7) сохраняют силу, по крайней мере, как равенство операторов, переводящих пространство L^+ в некоторые пространства локально интегрируемых на $[0, \infty)$ функций (подробности см. в [6]).

2.2. Решение НУФ (2.5) в случае ядра (1.4)

В работе [7] показано, что в случае ядра (1.4) функции $V_\pm$ имеют следующий вид:

$$V_\pm(x) = \exp\left(-s^\pm x\right) Q_N^\pm(x), \tag{2.10}$$

где $Q_N^\pm$ — полиномы с неотрицательными коэффициентами:

$$Q_N^\pm(x) = \sum_{m=0}^N b_m^\pm \frac{(s^\pm)^{m+1}}{m!} x^m, \quad b_m^\pm \geq 0,\ m = 0, 1, \ldots, N. \tag{2.11}$$

Из свойств $V_\pm$ имеем: $\gamma^\pm = \sum_{m=0}^N b_m^\pm \leq \lambda$.

Займемся определением коэффициентов $b_m^\pm$. Тем самым будут получены формулы (2.10) независимо от результатов [7]. Подставляя (1.4) и (2.10) в (2.5), после простых выкладок приходим к следующим соотношениям:

$$b_m^\pm = \lambda a_m^\pm + \sum_{k=m}^N b_k^\pm c_{k-m}^\mp, \quad m = 0,\, 1, \ldots, N, \tag{2.12}$$

где

$$c_k^\pm = \frac{(s^\mp)^k}{k!} \int_0^\infty V^\pm(t)\ t^k \exp\left(-s^\mp t\right) dt.$$

Учитывая (2.10), получаем

$$c_k^{\pm}=\frac{\left(s^{\mp}\right)^k}{k!}\sum_{m=0}^{N}b_m^{\pm}\frac{\left(s^{\pm}\right)^{m+1}}{m!}\frac{(m+k)!}{\left(s^{+}+s^{-}\right)^{m+k+1}},\quad k=0,1,\ldots,N. \qquad (2.13)$$

Нами получена нелинейная система (2.12), (2.13) относительно конечного набора чисел $(b_m^{\pm})$, $(c_k^{\pm})$. Эта система легко решается следующими простыми итерациями:

$$b_{k,n+1}^{\pm}=\lambda a_k^{\pm}+\sum_{m=k}^{N}c_{m-k,n}^{\mp}b_{m,n}^{\pm},\quad k=0,1,\ldots,N,$$

$$c_{k,n}^{\pm}=\frac{\left(s^{\mp}\right)^k}{k!}\sum_{m=0}^{N}b_{m,n}^{\pm}\frac{\left(s^{\pm}\right)^{m+1}}{m!}\frac{(m+k)!}{\left(s^{+}+s^{-}\right)^{m+k+1}},\quad k=0,\,1,\ldots,N, \qquad (2.14)$$

$$b_{k,0}^{\pm}=0,\quad k=0,1,\ldots,N,\ n=0,1,\ldots.$$

Для функций $V_n^{\pm}$, определяемых согласно (2.5), имеют место следующие соотношения:

$$V_n^{\pm}(x)=\exp\left(-s^{\pm}x\right)\sum_{m=0}^{N}b_{m,n}^{\pm}\frac{\left(s^{\pm}\right)^{m+1}}{m!}x^m. \qquad (2.15)$$

Отсюда, в силу (2.15), имеем:

$$\sum_{m=0}^{N}b_{m,n}^{\pm}=\int\limits_0^{\infty}V_n^{\pm}(x)dx. \qquad (2.16)$$

Формулы (2.16) позволяют перенести на $b_m^{\pm}$ некоторые свойства $V_n^{\pm}$, отмеченные в п. 2.1. В частности, из сходимости $V_n^{\pm}$ в L^+ следует (монотонная) сходимость последовательностей векторов $(b_m^{\pm})_n=\left(b_{m,n}^{\pm}\right)$. Скорость сходимости $(b_m^{\pm})_n\to(b_m^{\pm})$ описывается следующей оценкой, которая следует из (2.6):

$$\sum_{m=0}^{N}\left(b_m^{+}-b_{m,n}^{+}\right)+\sum_{m=0}^{N}\left(b_m^{-}-b_{m,n}^{-}\right)\le 2\left(1-\sqrt{1-\lambda}\right)\lambda^n. \qquad (2.17)$$

Лемма 2.1. *Последовательности* $\left(b_{m,n}^{\pm}\right)$, *определяемые из* (2.14), *обладают следующими свойствами:*

$$0\le b_{m,n}^{\pm},\quad b_{m,n}^{\pm}\uparrow b_m^{\pm}\quad \textit{при } n\to\infty. \qquad (2.18)$$

Отмеченные факты о сходимости итераций (2.14) могут быть установлены как непосредственно из соотношений (2.15), а также — как следствие оценок (2.17).

Займемся теперь вопросом построения резольвентных функций $\Phi_\pm$. Ищем решения уравнений (2.9) в виде

$$\Phi_\pm(x) = \exp(-s^\pm x)\Psi^\pm(x), \tag{2.19}$$

где $\Psi^\pm(x) = \sum_{m=0}^\infty \psi_m^\pm \frac{\left(s^\pm\right)^{m+1}}{m!} x^m,\ \psi_m^\pm \geq 0,\ m = 0, 1, \ldots$.

Подстановка (2.19) в (2.9) приводит к следующим рекуррентным соотношениям относительно коэффициентов $\psi_m^\pm$:

$$\begin{gathered} \psi_0^\pm = b_0^\pm; \quad \psi_m^\pm = b_m^\pm + \sum_{p=0}^{m-1} b_p^\pm \psi_{m-p-1}^\pm, \quad m = 1, \ldots, N, \\ \psi_m^\pm = \sum_{p=0}^{N} b_p^\pm \psi_{m-p-1}^\pm, \quad m = N+1,\, N+2, \ldots \end{gathered} \tag{2.20}$$

При $\lambda < 1$ имеют место равенства, вытекающие из (2.9) и (2.19)

$$\int_0^\infty \Phi_\pm(x)\, dx = \sum_{m=0}^\infty \psi_m^\pm = \frac{\gamma^\pm}{1-\gamma^\pm}.$$

Пусть $\lambda = 1$. В зависимости от значения первого момента m_1 ядра K описывается асимптотическое поведение в бесконечности функций $\Phi_\pm$.

Резюмируя вышесказанное можно сформулировать следующую процедуру решения уравнения (1.1) с ядром (1.4):

Теорема 2.1. *Уравнение* (1.1) *с ядром* (1.4) *может быть решено по следующей схеме:*

Шаг1. *Из нелинейной системы* (2.12), (2.13) *простыми итерациями определяются конечные наборы* $(b_m^\pm)$ *и* $(c_k^\pm)$. *Требуемая точность контролируется оценкой* (2.17) *и фактической близостью чисел* $\gamma^\pm$ *к* $\sum_{m=0}^N b_m^\pm$.

Шаг 2. *Из рекуррентных соотношений* (2.20) *определяется достаточное количество чисел из бесконечных последовательностей* $(\psi_m^+)_{m=0}^\infty$, $(\psi_m^-)_{m=0}^\infty$. *Требуемая точность в ДС контролируется фактической близостью чисел* $\sum_{m=0}^\infty \psi_m^\pm$ *к* $\frac{\gamma^\pm}{1-\gamma^\pm}$.

Шаг 3. *Решение уравнения* (1.1) *на полупрямой при произвольном* $g \in E$ *определяется по формуле*

$$f = \big(I + \hat{\Phi}_+\big)\big(I + \hat{\Phi}_-\big) g.$$

2.3. Консервативное однородное уравнение

Рассмотрим уравнение (1.1) в КС при $g(x) = 0$ (однородное консервативное уравнение)

$$f(x) = \int_0^\infty K(x-t) f(t)\, dt. \tag{2.21}$$

Известно (см. [6]), что при $-\infty < m_1 \le 0$ консервативное уравнение (2.21) обладает решением вида:

$$f\,(x) = 1 + \int_0^x \Phi_+\,(t)\, dt, \tag{2.22}$$

где $\Phi_+ \ge 0$ определяется из (2.9). Учитывая выражение из (2.19) для Φ_+ мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2.2. *Пусть* $-\infty < m_1 \le 0$. *Тогда консервативное уравнение* (2.21) *обладает решением вида*

$$f\,(x) = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^+ \Gamma\left(s^+ x, j+1\right),$$

где $\Gamma(x,j) = \frac{1}{\Gamma(j)} \int_0^x \exp(-t) t^{j-1} dt$ *— неполная гамма-функция Эйлера.*

Если $m_1 < 0$, то функция f ограничена. Если же $m_1 = 0$, то f имеет линейный рост в бесконечности.

3. Уравнения (1.1) с ядром K на конечном промежутке

В этом параграфе рассматривается уравнение (1.1) при $r < +\infty$. Применяется факторизационный подход работы автора [8].

Запишем уравнение на конечном отрезке (1.1) в операторной форме

$$f = g + \lambda \hat{K}_r f. \tag{3.1}$$

где $\hat{K}_r$ — следующий интегральный оператор свертки

$$\hat{K}_r f\,(x) = \int_0^r K\,(x-t)\, f\,(t)\, dt, \quad r < \infty,$$

с ядром (1.4).

Обозначим через $h_{\pm}$ характеристические функции интервалов $[0,r]$ и (r,∞), соответственно. Имеем

$$h_+(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le r,\\ 0, & x>r,\end{cases}\qquad h_-(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le r,\\ 1, & x>r.\end{cases}$$

С их помощью можно переписать уравнение (1.1) в следующей (эквивалентной) форме:

$$S(x)=g(x)+\lambda\int\limits_0^\infty K(x-t)h_+(t)S(t)\,dt,\quad r<+\infty. \tag{3.2}$$

Считается, что $g(x)=0$, при $x>r$.

Имеет место следующая факторизация (см. [8]):

$$I-\lambda\hat{K}_r=\bigl(I-\hat{V}_-\bigr)\bigl(I-\hat{V}_+\hat{h}_++\hat{\Phi}_-\hat{h}_-\bigr), \tag{3.3}$$

где $\hat{h}_+$ и $\hat{h}_-$ — суть операторы умножения на характеристические функции h_+ и h_-, соответственно. Применив разложение (3.3) к уравнению (3.2) при условии обратимости оператора $I-\hat{V}_-$, получаем уравнение:

$$\bigl(I-\hat{V}_+\hat{h}_++\hat{\Phi}_-\,\hat{h}_-\bigr)S=g_1, \tag{3.4}$$

где $g_1=(I-\hat{V}_-)^{-1}g=(I+\hat{\Phi}_-)g\in E$.

Из результатов [8] следует эквивалентность уравнения (3.4) следующей системе интегральных уравнений:

$$f(x)=g_1(x)+\int\limits_0^x V_+(x-t)f(t)\,dt-\int\limits_r^\infty \Phi_-(t-x)F(t)\,dt,\quad x\le r, \tag{3.5}$$

$$F(x)=\lambda\int\limits_0^r K_+(x-t)f(t)\,dt,\quad x>r, \tag{3.6}$$

где $F(x)=S(x),\ x>r$.

4. Сведение к алгебраической системе

Рассмотрим систему (3.5), (3.6) в случае ядра (1.4), при $0<\lambda\le 1$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\alpha_m&=\frac{1}{m!}\int\limits_0^r e^{-(r-t)\,s^+}(r-t)^m f(t)\,dt,\\ \beta_m&=\frac{1}{m!}\int\limits_r^\infty e^{-(t-r)\,s^-}(t-r)^m F(t)\,dt.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Подставляя (2.19) в (3.5), при $x \le r$ будем иметь:

$$f(x) = g_1(x) + \int\limits_0^x V_+(x-t) f(t)\,dt$$
$$- \exp(-s^-(r-x)) \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^-(s^-)^{m+1} \sum_{k=0}^{m} \frac{(r-x)^{m-k}}{(m-k)\,!} \beta_k. \quad (4.2)$$

Аналогичным образом учитывая (1.4) из (3.6), получаем при $x > r$:

$$F(x) = \lambda \exp(-s^+ (x-r)) \sum_{m=0}^{N} a_m^+ (s^+)^{m+1} \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-r)^{m-k}}{(m-k)\,!} \alpha_k. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) можно рассматривать как уравнение Вольтерра относительно f, решая которое приходим к формуле:

$$f\,(x) = g_2\,(x) - \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m^-\left(s^-\right)^{m+1} \sum_{k=0}^{m} U_{m-k}\,(x)\,\beta_k, \quad (4.4)$$

где

$$U_k(x) = \exp(-s^{\,-}(r-x)) \Bigg[\frac{(r-x)^k}{k!}$$
$$+ \sum_{i=0}^{k} \frac{(r-x)^{k-i}}{i!\,(k-i)\,!} \int\limits_0^x \Phi_+(t) \exp(-ts^-)\, t^i dt \Bigg]. \quad (4.5)$$

Для получения системы относительно новых искомых чисел α_m, β_m умножим (4.3) на $\frac{1}{m!}\exp(-(x-r)\,s^-)(x-r)^m$ и (4.4) на $\frac{1}{m!}\exp(-(r-x)\,s^+)(r-x)^m$, после чего проинтегрируем по x первое из них в пределах от r до ∞, а второе — от 0 до r. В результате мы приходим к следующим уравнениям относительно чисел α_k и β_k:

$$\beta_m = \lambda \sum_{j=0}^{N} A_{m,j} \alpha_j, \quad \alpha_m = \gamma_m - \sum_{k=0}^{\infty} B_{m,k} \beta_k. \quad (4.6)$$

Здесь $\gamma_m = \frac{1}{m!}\int_0^r g_2(x)\exp(-s^+\,(r-x))(r-x)^m dx$,

$$B_{i,j} = \frac{1}{i!} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n+j}^-(s^-)^{n+j+1} \int\limits_0^r \exp\left(-s^+(r-x)\right)(r-x)^i U_j(x)\,dx,$$

$$A_{m,j} = \frac{1}{m!} \sum_{k=j}^{N} a_k^+ \frac{(s^+)^{k+1}}{(s^+ + s^-)^{m+k-j+1}} \frac{(m+k-j)!}{(k-j)!}.$$
$$(4.7)$$

Интеграл, фигурирующий в (4.5), вычисляется с использованием формул (4.5) и (2.19).

Теорема 4.1. *Решение уравнения* (1.1) *на конечном промежутке с ядром* (1.4) *имеет вид* (4.4)*, где числа* β_k *определяются путем решения системы* (4.6).

Благодарности. Автор выражает благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за внимание к работе.

Литература

[1] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Т. 2, М.: Мир, 1984, 752 с.

[2] J. H. B. Kemperman, *A Wiener–Hopf Type Method for a General Random Walk with a Two-Sided Boundary* // Ann. Math. Statist., **34** (1963), No. 4, 1168–1193.

[3] В. И. Лотов, *О случайных блужданиях в полосе* // ТВП, **36**:1 (1991), 160–165.

[4] А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, Эдиториал УРСС/Изд-во ИМ СО РАН, М.–Новосибирск, 1999, 470 с.

[5] I. Feldman, I. Gohberg, N. Krupnik, *Convolution equations on finite intervals and factorization of matrix functions* // Integr. equ. oper. theory, **36** (2000), 201–211.

[6] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, *Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения* // Итоги науки и техники, Математический анализ, М.: ВИНИТИ АН СССР, **22** (1984), 175–244.

[7] Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян, *Случайные блуждания и смеси гамма-распределений* // ТВП, **55**:3 (2010), 571–577.

[8] А. Г. Барсегян, *Интегральное уравнение с суммарно-разностным ядром на конечном промежутке* // Изв. НАН РА. Матем, **40**:3 (2005), 22–32.

Сведения об авторах

Ани Гарниковна Барсегян

Институт математики
Национальной академии наук
Республики Армения
пр. Маршала Баграмяна 24/5
0019, Ереван,
Республика Армения
E-Mail: anibarseghyan@mail.ru