Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 4, 596 – 606

Р. М. Тригубу в знак доброй памяти
о днях молодости в ДонГУ

Специальная аппроксимация решений нелинейных уравнений с частными производными

Владимир М. Миклюков

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Вводится и обсуждается понятие почти-решения уравнения в частных производных.

2010 MSC. 34A45.

Ключевые слова и фразы. Обобщенное решение, почти-решение.

Почти-решения

В большинстве приложений дифференциальных уравнений в естествознании на самом деле мы имеем дело не с (идеальными) решениями уравнений, но с функциями, "близкими" к истинным решениям. В процессе приближенного вычисления мы также находим лишь функцию, "близкую" к истинному решению. Ниже приводится описание работ, посвященных почти-решениям уравнений в частных производных с дивергентной главной частью, представляющим собой специальную аппроксимацию решений (краткий обзор см. в [1]).

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — область и пусть $k(x) : D \to \mathbb{R}$ — измеримая по Лебегу функция такая, что для всякой подобласти $D' \subset\subset D$ выполнено

$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_{D'} k(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{D'} k(x) < \infty.$$

Пусть $A : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее следующим предположениям:

Статья поступила в редакцию 30.08.2011

ISSN 1810 – 3200. © Інститут математики НАН України

(i) для почти всех $x \in D$ отображение $\xi \in \mathbb{R}^n \to A(x,\xi)$ определено и непрерывно,

(ii) отображение $x \in D \to A(x,\xi)$ измеримо для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(iii) для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняются следующие структурные ограничения

$$\mu_1\, k(x)\, |\xi|^p \le \langle \xi, A(x,\xi)\rangle, \quad |A(x,\xi)| \le \mu_2\, k(x)\, |\xi|^{p-1},$$

где $\mu_1,\ \mu_2 > 0$ и $p \ge 1$ — некоторые постоянные.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0. \tag{1}$$

Данное уравнение содержит как частный случай уравнение для p-гармонических функций, где предполагается $p > 1$ [2]. Допущение $p = 1$ позволяет включить в рассмотрения уравнение минимальной поверхности, уравнение максимальной поверхности в пространстве Минковского, а также уравнение газовой динамики.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что непрерывная функция h класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ является *почти-решением* уравнения (1), если для всякой непрерывной функции

$$\varphi(x) \in W^{1,q}(D), \quad 0 \le |\varphi(x)| \le 1,$$

с компактным носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset D$ выполнено:

$$\left| \int\limits_D \langle \nabla\varphi, A(x,\nabla h)\rangle\, dx \right| < \varepsilon.$$

Величину $\varepsilon > 0$ будем называть *уклонением* почти-решения h.

Нетрудно видеть, что всякая C^2-функция $h : D \to \mathbb{R}^1$ такая, что $|\operatorname{div} A(x,\nabla h)| \le \varepsilon_1$, является почти-решением (1) с уклонением $\varepsilon_1\ \mathrm{mes}_n\,(D)$.

Понятие почти-решения было введено в нашей работе [3] в связи с изучением решений с особенностями уравнения (1). Показано, что при определенных условиях решение (1), даже имеющее неустранимые особенности, может являться почти-решением. Даны оценки его уклонения.

В работе [4] устанавливаются связи почти-квазиконформных отображений в смысле Каллендера с почти-решениями уравнений вида (1).

В [5, гл. 14] вводится понятие почти-решения системы Бельтрами.

В работе [6] доказывается специальная форма принципа максимума для разности почти-решений.

Теорема 1. *Пусть h_1, h_2 — почти-решения уравнения* (1) *в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, имеющие уклонения $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, соответственно, и удовлетворяющие на границе области предположению*

$$\limsup_{\substack{x\to x_0\\ x\in D,\\ x_0\in\partial D}} (h_1(x) - h_2(x)) \le 0 \quad \forall\, x_0 \in \partial D.$$

Тогда либо $h_1(x) \le h_2(x)$ всюду в D, либо открытое множество

$$\mathcal{O} = \{x \in D : (h_1(x) - h_2(x)) > 0\}$$

не пусто и

$$\int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} k(x)\, |\nabla(h_2 - h_1)|^2 \, d\mathcal{H}^n \le \frac{2M}{\mu_1}\, (\varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

$$M = \sup_D |h_2(x) - h_1(x)|.$$

В работах [7–9] указываются размеры зон стагнации почти-решений уравнений эллиптического и параболического типов.

В работе [10] приводится некоторая специальная версия неравенства Гарнака для почти-решений. Именно, доказана следующая

Теорема 2. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$ и U, V — ее подобласти, $V \subset\subset U \subset\subset D$. Пусть h — положительное почти-решение в D уравнения* (1) *с $k \equiv 1$, $p > n - 1$ и*

$$A(x, \lambda\xi) = \lambda\, |\lambda|^{p-2}\, A(x, \xi) \quad \forall\, x \in D \text{ и } \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^1. \tag{2}$$

Тогда

$$\inf_{\mathcal{O}_C} \max\{h(x) : x \in V \setminus \mathcal{O}_C\}$$
$$\le \exp\{\, \theta_p(V, U, D)\} \sup_{\mathcal{O}_C} \min\{h(x) : x \in V \setminus \mathcal{O}_C\},$$

где точная нижняя и точная верхняя грани берутся по всевозможным непустым открытым подмножествам $\mathcal{O}_C \subset D$, $D \setminus \mathcal{O}_C \ne \emptyset$, таким, что $h|_{\partial\mathcal{O}_C} = C$, $C = \mathrm{const}$, и $\theta_p(V, U, D)$ — некоторая постоянная (*вид которой указывается*).

В случае, когда почти-решение монотонно в смысле Лебега, открытые подмножества $\mathcal{O}_C$ указанного вида отсутствуют и теорема 2 принимает стандартный вид.

В работе [11] устанавливается связь решений уравнений параболического типа с почти-решениями подходящих уравнений эллиптического типа. Именно, доказана

Теорема 3. *Пусть* $h = h(x,t) : D \times (\tau_0, \tau_1) \to \mathbb{R}^1$ — *обобщенное решение уравнения*

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = B(t, h, h'_t),$$

где $A(x,\xi)$ *удовлетворяет условию* (2),

$$B(t,h,h'_t) = b_0(t)\,|h|^{p-2}\,h + b_1(t)\,|h|^{p-2}\,h\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$$

и

$$b_0(t) > 0, \quad b_1(t) : (\tau_0,\tau_1) \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1 \quad —$$

локально липшицевы на (τ_0, τ_1) *функции.*

Тогда $h(x,t)$ *является почти-решением некоторого уравнения вида* (1), *а уклонение* $s(\tau_0,\tau_1)$ *почти-решения определяется выражением*

$$s(\tau_0,\tau_1) = \int\limits_D d\mathcal{H}^n \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \left| b_0\,|h|^{p-2}h + b_1\,|h|^{p-2}h\,h'_t - \frac{d}{dt}\left(b_1\,|h'_t|^{p-2}h'_t\right)\right| dt.$$

Близкие утверждения имеют место и для решений уравнений гиперболического типа.

Некоторые приложения к вопросам устранения особенностей решений уравнения газовой динамики и отображений с ограниченным искажением см. в главе 7 нашей книги [12].

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}(|\nabla h|^{p-2}\nabla h) = 0, \quad p > 1. \tag{3}$$

Почти-решения с уклонением $\varepsilon = 0$ являются *обобщенными решениями.* Обобщенные решения h уравнения (3) называются также *p-гармоническими* функциями, а само уравнение (3) — p-гармоническим (см. [2]).

В работе [13] доказывается аналог теоремы Адамара о трех окружностях для почти p-гармонических функций, определенных в областях типа шарового слоя. Доказательство базируется на принципе максимума для разности почти p-гармонических функций.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — область и пусть $k(x) : D \to \mathbb{R}^1$ — измеримая по Лебегу, неотрицательная и почти всюду конечная функция.

Пусть A, B — непустые, замкнутые относительно D, непересекающиеся подмножества. Обозначим через

$$\operatorname{cap}_k(A,B) = \inf_u \int\limits_D k(x)\,|\nabla u|^2\,d\mathcal{H}^n, \quad u \in C^1(D), \quad u|_A \equiv 0, \quad u|_B \equiv 1,$$

взвешенную k-емкость конденсатора $(A, B; D)$ и через

$$\lambda_k(\mathcal{O}) = \inf_u \frac{\int_{\mathcal{O}} k(x)\, |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^n}{\int_{\mathcal{O}} k(x)\, u^2 d\mathcal{H}^n}, \quad u \in C^1(\mathcal{O}) \cap C^0(\overline{\mathcal{O}}), \quad u|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad —$$

взвешенную основную частоту открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$.

Будем говорить, что неограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ является *k-узкой* в окрестности бесконечно удаленной точки $\mathbb{R}^n$, если при всяком $r > 0$ выполнено

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname{cap}_k (D_r, D \setminus D_R) = 0,$$

где $D_t = \{|x| < t\} \cap D$.

Ниже приводится обобщение теоремы о трех окружностях на случай p-гармонических функций $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^1$, заданных в j-шарах в $\mathbb{R}^n$, определяемых следующим образом. Зафиксируем целое j, $1 \le j \le n$ и вещественное число $t \ge 0$. Множества

$$B_j(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_j(x) < t\} \quad \text{и} \quad \Sigma_j(t) = \partial B_j(t),$$

где

$$d_j(x) = \left(\sum_{i=1}^{j} x_i^2\right)^{1/2},$$

мы будем называть соответственно j-шаром и j-сферой в $\mathbb{R}^n$. При $j = n$ шар $B_j(t)$ совпадает со стандартным евклидовым шаром $B^n(0,t)$ и сфера $\Sigma_j(t)$ есть евклидова сфера $S^{n-1}(0,t)$. В частности, символ $\Sigma_j(0)$ определяет j-сферу радиуса 0, т.е.

$$\Sigma_j(0) = \{x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) : x_1 = \dots = x_j = 0\}.$$

Пусть $0 < \alpha < \beta < \infty$ — фиксированные числа и пусть

$$D^j_{\alpha,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha < d_j(x) < \beta\}.$$

При $j = 1$ множество $D^j_{\alpha,\beta}$ есть слой, расположенный между двумя параллельными гиперплоскостями. При $1 < j < n$ граница области $D^j_{\alpha,\beta}$ состоит из двух цилиндрических поверхностей.

Пусть $v \in C^0(D^j_{r,R})$, и пусть

$$M(r) = \limsup_{x\to\Sigma_j(r)} v(x).$$

Рассмотрим функцию

$$v_{r,R}(x) = \frac{v(x) - M(r)}{M(R) - M(r)}, \quad r < R.$$

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $0 < r < R \leq \infty$. *Пусть* $v(x) \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D^j_{r,R})$ — *неотрицательное почти-решение уравнения* (3) *в области* $D^j_{r,R}$, $1 \leq j \leq n$, *с уклонением* $\varepsilon > 0$ *и пусть* $M(t) = \sup_{\Sigma_i(t)} v(x)$. *Тогда при всех* $t \in (r, R)$ *таких, что*

$$\Sigma_j(t) \cap \mathcal{O} = \emptyset, \quad \mathcal{O} = \{x \in D^j_{r,R} : v_{r,R}(x) - u(x) > 0\},$$

выполнено

$$M(t) \leq \big(M(R) - M(r)\big) u_0^{j,p}(t) + M(r),$$

При этом, если открытое множество $\mathcal{O}$ *не пусто, то*

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\{|x|<r\}\cap\mathcal{O}} k(x)\, |\nabla(v_{r,R}(x) - u(x))|^2 \, d\mathcal{H}^n$$

$$\leq \frac{A}{\mu_1}\, \varepsilon + 2\Big(\frac{\mu_2}{\mu_1}\Big)^2 A^2 \operatorname{cap}_k (\mathcal{O}_r, \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_R),$$

где

$$A = \sup_{D^j_{r,R}} |v_{r,Q}(x) - u(x)|$$

и

$$k(x) = \int\limits_0^1 |\lambda \nabla v(x) + (1-\lambda)(M(R) - M(r))\, \nabla u(x)|^{p-2} \, d\lambda.$$

В случае $j = p = n$ имеем

$$\xi(r,t) = \ln \frac{t}{r} \quad \text{и} \quad u_0^{n,n}(t) = \frac{\ln(t/r)}{\ln(R/r)}$$

и, тем самым, из теоремы 4 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $0 < r < R \leq \infty$ *и пусть* $v(x) \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D^n_{r,R})$ — *неотрицательное почти-решение уравнения* (3) *с* $p = n$ *и уклонением* $\varepsilon > 0$ *в шаровом слое*

$$D^n_{r,R} = \{r < |x| < R\}.$$

Тогда при всех $t \in (r, R)$ *таких, что*

$$\Sigma_n(t) \cap \mathcal{O} = \emptyset, \quad \mathcal{O} = \{x \in D^n_{r,R} : v_{r,R}(x) - u(x) > 0\},$$

выполнено

$$M(t)^{\ln(R/r)} \leq M(r)^{\ln(R/t)}\, M(R)^{\ln(t/r)},$$

При этом, если открытое множество $\mathcal{O}$ *не пусто, то имеет место указанная в теореме 4 оценка его размеров.*

В работе [14] рассматриваются почти-решения сильно нелинейных уравнений эллиптического типа, включая уравнение минимальных поверхностей. Приводится специальная версия теоремы Адамара о трех окружностях. При этом в отличие от случая p-гармонических функций для оценки максимума функции на внутренней окружности достаточно знания максимума только на внешней, что является проявлением эффекта сильной нелинейности уравнения (см., например, главу VI монографии [15]).

Пусть $\sigma(\tau) : [0, q^2) \to (0, \infty)$ — функция, принадлежащая классу C^1 на полуинтервале $[0, q^2)$, $0 < q \le \infty$, и такая, что существует предел

$$q\sigma(q^2) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\tau \to q} \tau\sigma(\tau^2) < \infty,$$

а функция

$$\sigma^*(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\tau) + 2\tau\sigma'(\tau) > 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma(|\nabla f|^2) \, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Функция $h(\tau) = \sqrt{\tau}\sigma(\tau)$ строго монотонна. Обозначим через $H = h^{-1}$ обратную к ней функцию. Предположим, что

$$\int_{r_0} H\Big[\frac{q\sigma\left(q^2\right) r_0^{n-1}}{s^{n-1}} \Big] \, ds < \infty.$$

При выполнении данного условия полагаем

$$\Phi_0(r) = \int_{r_0}^{r} H\Big[\frac{q\sigma\left(q^2\right) r_0^{n-1}}{s^{n-1}} \Big] \, ds.$$

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная в шаровом слое

$$D_{r_0 r_1} = B(r_1) \setminus \overline{B(r_0)}, \quad \text{где } 0 \le r_0 < r_1 \le \infty,$$

и пусть

$$M_f(r_i) = \limsup_{\substack{x \to S(r_i) \\ x \in D_{r_0 r_1}}} f(x) \qquad (i = 0, 1).$$

В описанных предположениях имеет место

Теорема 5. *Пусть $f(x)$ есть неотрицательное $C^{1,1}$-решение уравнения*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma(|\nabla f|^2) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \mu,$$

где $\mu = \mu(x)$ — измеримая в шаровом слое $D_{r_0 r_1}$ функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{D} |\mu(x)|\, d\mathcal{H}^n \le \varepsilon.$$

Пусть

$$\mathcal{O} = \{x \in D_{r_0 r_1} : M_f(r_0) - \Phi_0(|x|) > f(x)\}\,.$$

Тогда, если $S(r_0) \cap \overline{\mathcal{O}} = \emptyset$, то

$$M_f(r_0) \le M_f(r_1) - \Phi_0(r_1).$$

При этом, если множество $\mathcal{O}$ не пусто, то

$$\int\limits_{\mathcal{O}} k(x) |\nabla f(x) - \nabla \Phi_0(|x|)|^2\, d\mathcal{H}^n \le M_f(r_1)\, \varepsilon,$$

где

$$k(x) = \int\limits_{0}^{1} \sigma^* \left(|\lambda \nabla f(x) - (1-\lambda) \nabla \Phi_0(|x|)|^2 \right)\, d\lambda.$$

Отметим одно следствие теоремы 5 для графиков заданной средней кривизны. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} \frac{\nabla f(x)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}} = \mu(x). \tag{4}$$

Данное уравнение описывает графики средней кривизны $\mu(x)/n$.

Здесь

$$\sigma(\tau) = (1+\tau)^{-1/2}\,, \quad 0 \le \tau < q = \infty, \quad q\sigma(q^2) = 1,$$

и

$$\sigma'(\tau) = -\frac{1}{2}\,(1+\tau)^{-3/2} \le 0,$$

откуда находим

$$\sigma^*(\tau) = \sigma(\tau) + 2\tau\, \sigma'(\tau) = \frac{1}{(1+\tau)^{3/2}}.$$

Тем самым, все предположения теоремы 5 выполняются.

Далее имеем

$$\Phi_0(|x|) = r_0^{n-1} \int\limits_{r_0}^{|x|} \frac{ds}{\sqrt{s^{2(n-1)} - r_0^{2(n-1)}}}$$

и

$$k(x) = \int\limits_0^1 \frac{d\lambda}{(1 + |\lambda \nabla f(x) + (1-\lambda)\nabla\Phi_0(x)|^2)^{3/2}} \geq \frac{1}{(1 + \max\{|\nabla f(x)|^2,\, |\nabla\Phi_0(x)|^2\})^{3/2}}.$$

Следствие 2. *Пусть* $f(x)$ *— неотрицательное* C^2*-решение уравнения* (4) *в шаровом слое* $D_{r_0 r_1}$.

Тогда, если $S(r_0) \cap \overline{\mathcal{O}} = \emptyset$, *то*

$$M_f(r_0) + r_0^{n-1} \int\limits_{r_0}^{r_1} \frac{ds}{\sqrt{s^{2(n-1)} - r_0^{2(n-1)}}} \leq M_f(r_1).$$

При этом, если $\mathcal{O}$ *не пусто, то имеет место указанная выше оценка его размеров.*

В случае решений уравнения минимальных поверхностей имеем известные результаты (см. главу VI цитированной выше монографии И. С. С. Ниче).

В работе [16] приводится аналог теоремы Лиувилля для почти-решений A-гармонических уравнений. В работе [17] доказывается аналог теоремы Лиувилля для почти замкнутых дифференциальных форм специального вида.

В [18] рассматривается вопрос о наследовании альтернативы Фрагмена–Линделефа при аппроксимации решений A-гармонических уравнений почти-решениями.

Литература

[1] В. М. Миклюков, *Специальная аппроксимация решений уравнений с частными производными* // International Conference in Modern Analysis, Abstracts, Donetsk National University, Donetsk, Ukraine, June 20–23, 2011, p. 78.

[2] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Clarendon Press, Oxford etc., 1993.

[3] В. М. Миклюков, *A-решения с особенностями как почти-решения* // Матем. сб., **197** (2006), вып. 11, 31–50.

[4] В. М. Миклюков, *Почти квазиконформные отображения как почти-решения*, в сб. Математический и прикладной анализ, вып. 3, изд-во Тюменск. гос. ун-та., 2007, 59–70.

[5] В. М. Миклюков, *Функции весовых классов Соболева, анизотропные метрики и вырождающиеся квазиконформные отображения*, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2010.

[6] В. М. Миклюков, *Принцип максимума для разности почти-решений нелинейных эллиптических уравнений* // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, (2007), No. 1, 33–45.

[7] В. М. Миклюков, *Зоны стагнации решений и почти-решений эллиптических уравнений*, Восьмая Казанск. летняя школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского, т. 35, Казань: Казанское математическое общество, 2007, 174–181.

[8] В. М. Миклюков, *О зонах стагнации в сверхмедленных процессах* // Докл. Акад. Наук, **418** (2008), No. 3, 304–307.

[9] В. М. Миклюков, *Оценки размеров зоны стагнации почти-решений уравнений параболического типа*, Сибирский журнал индустриальной математики, **XI** (2008), No. 3(35), 96–101.

[10] В. М. Миклюков, *К неравенству Гарнака для почти-решений эллиптических уравнений* // Изв. РАН, Серия математическая, **73** (2009), No. 5, 171–180.

[11] В. М. Миклюков, *Решения параболических уравнений как почти-решения эллиптических*, Математический и прикладной анализ. Тюмень: изд-во Тюменск. гос. ун-та, (2010), вып. 4, 96–113.

[12] В. М. Миклюков, *Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения*, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2007.

[13] В. М. Миклюков, *Теорема о трех сферах для почти гармонических функций*, в сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 5, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2010, 15–24.

[14] В. М. Миклюков, *Теорема о двух сферах для почти-решений уравнений типа минимальной поверхности*, в сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 5, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2010, 52–62.

[15] J. C. C. Nitsche, *Vorlesungen über Minimalflächen*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.

[16] В. М. Миклюков, *Теорема Лиувилля для почти-решений A-гармонических уравнений*, в сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 5, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2010, 162–174.

[17] В. М. Миклюков, *Теорема Лиувилля для почти замкнутых дифференциальных форм специальных классов*, в сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы", вып. 5, Волгоград: изд-во ВолГУ, 2010, 181–187.

[18] В. М. Миклюков, *Геометрический анализ*, 2-е изд., 2011, www.uchimsya.co.

Сведения об авторах

Владимир Михайлович Миклюков
Независимая научная лаборатория
"Uchimsya.LLC"
Нью Йорк,
США
E-Mail: miklyuk@mail.ru,
miklyuk@hotmail.com