Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 4, 493 – 512

УМВ

Отношение "лежать между", птолемеевы пространства и изометрические вложения предкасательных пространств в $\mathbb{R}$

Виктория В. Билет, Алексей А. Довгошей

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Мы изучаем свойства предкасательных пространств, описывающих инфинитезимальную геометрию общих метрических пространств. Найдены необходимые и достаточные условия, характеризующие птолемеевы предкасательные пространства и предкасательные пространства, любые три точки которых расположены "на одной прямой". Как следствие мы получаем критерий вложимости предкасательных пространств в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, наделенное естественной метрикой.

2010 MSC. 54E35.

Ключевые слова и фразы. Метрические пространства, предкасательные пространства, изометрические вложения, метрическое отношение "лежать между", птолемеевы пространства.

1. Введение

Недавние достижения в теории метрических пространств тесно связаны с обобщениями дифференцирования. Есть несколько подходов к построению таких обобщений. Вкладывая метрическое пространство в подходящее линейное нормированное пространство, получаем линейную структуру и, таким образом, дифференцирование. На основе такого подхода довольно полная теория спрямляемых множеств и потоков на метрических пространствах развита в [3, 4]. Другим путём построения метрического дифференцирования является введение некоторых инфинитезимальных касательных пространств к метрическому пространству. Сходимость Громова–Хаусдорфа и ультрасходимость являются, на сегодня, наиболее применяемыми способами изучения инфинитезимальной геометрии метрических прост-

Статья поступила в редакцию 14.02.2011

ISSN 1810 – 3200.

ранств [7,16]. Исходное для данной работы понятие “предкасательного” пространства к общему метрическому пространству предложено в [11] (см. также [12]).

Критерий компактности и ограниченности предкасательных пространств найден в [1], а критерий их единственности в [2]. В работе [9] получены необходимые и достаточные условия, при которых предкасательные пространства являются ультраметрическими. Полезный критерий совпадения предкасательных пространств к метрическому пространству и к подпространству этого пространства доказан в [8]. В недавней работе Д. Дордовского [14] доказано, что предкасательные пространства в невырожденных точках гладких параметрических n-мерных поверхностей изометричны евклидову пространству $\mathbb{R}^n$. В данной работе найдены критерии: птолемеевости предкасательных пространств и того, что любые три точки в таких пространствах удовлетворяют метрическому варианту тернарного отношения “лежать между” (точные определения этих понятий приведены ниже). Это дает новые необходимые и достаточные условия изометрической вложимости предкасательных пространств в евклидово пространство $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. К. Менгер в [17] доказал следующий результат: метрическое пространство X с $\operatorname{card} X \geq n+4$ изометрично вкладывается в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, если любое $A \subseteq X$ с $\operatorname{card} A = n+2$ имеет это свойство. Монография Л. М. Блюменталя [6] содержит этот знаменитый результат и продолжает оставаться классическим руководством для изучения изометрических вложений метрических пространств. В настоящей работе мы будем использовать результат Менгера только для $n = 1$. Элементарное доказательство “одномерного” результата вместе с анализом исключительного случая $\operatorname{card} A = n+3 = 4$ можно найти в [10].

Напомним необходимые определения.

Пусть (X, d) — метрическое пространство и пусть p — точка из X. Зафиксируем некоторую последовательность $\tilde{r}$ положительных вещественных чисел r_n, стремящихся к нулю. Назовём $\tilde{r}$ нормирующей (или масштабирующей) последовательностью. Будем обозначать через $\tilde{X}$ множество всех последовательностей точек из X.

Определение 1.1. *Две последовательности $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$, $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, взаимностабильны относительно нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n} := \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}). \tag{1.1}$$

Семейство $\tilde{F} \subseteq \tilde{X}$ самостабильное, если любые две последовательности $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{F}$ взаимностабильны, $\tilde{F} \subseteq \tilde{X}$ — максимальное самостабильное, если $\tilde{F}$ самостабильное и для произвольной $\tilde{z} \in \tilde{X} \setminus \tilde{F}$ существует $\tilde{x} \in \tilde{F}$ такая, что $\tilde{x}$ и $\tilde{z}$ не взаимностабильны. Из леммы Цорна легко следует

Утверждение 1.1. *Пусть (X, d) — метрическое пространство и пусть $p \in X$. Тогда для каждой нормирующей последовательности $\tilde{r} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ существует максимальное самостабильное семейство $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ такое, что постоянная последовательность $\tilde{p} = \{p, p, \dots\} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$.*

Рассмотрим функцию $\tilde{d} : \tilde{X}_{p,\tilde{r}} \times \tilde{X}_{p,\tilde{r}} \to \mathbb{R}$, где $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ определена через (1.1). Очевидно, $\tilde{d}$ симметрична и неотрицательна. Кроме того, из неравенства треугольника для d, имеем

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{z}) + \tilde{d}(\tilde{z}, \tilde{y})$$

для всех $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ из $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$. Следовательно, $(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d})$ – псевдометрическое пространство.

Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ как $\tilde{x} \sim \tilde{y}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. Обозначим через $\Omega_{p,\tilde{r}} = \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ множество всех классов эквивалентности на $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$, порождённых отношением $\sim$. Для $\alpha, \beta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ положим $\rho(\alpha, \beta) = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$, где $\tilde{x} \in \alpha$ и $\tilde{y} \in \beta$, тогда ρ – метрика на $\Omega_{p,\tilde{r}}$. Переход от псевдометрического пространства $(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d})$ к метрическому пространству $(\Omega_{p,\tilde{r}}, \rho)$ будем называть метрической идентификацией $(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d})$. Обозначим через π естественную проекцию $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ на $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$.

Определение 1.2. *Пространство $(\Omega^X_{p,\tilde{r}}, \rho)$ называется предкасательным к X в точке p относительно нормирующей последовательности $\tilde{r}$.*

Будем использовать символ $\mathbf{\Omega^X_p}$ для обозначения множества всех пространств, предкасательных к (X, d) в точке p.

Определение 1.3. *Пусть (X, d) — метрическое пространство, x, y и z — различные точки из X. Точка y лежит между x и z, если*

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z). \tag{1.2}$$

Тернарное отношение “лежать между” в явной форме было определено Д. Гильбертом в его знаменитых “Основаниях геометрии”. В теории метрических пространств понятие “metric betweenness” было введено К. Менгером в приведенной выше форме.

Замечание 1.1. Легко проверить, что для трёх различных точек x, y, z из X равенство

$$2\max\{d(x,y), d(x,z), d(y,z)\} = d(x,y) + d(x,z) + d(y,z) \tag{1.3}$$

выполняется тогда и только тогда, когда одна из этих точек лежит между двумя другими. Другим необходимым и достаточным условием является равенство нулю определителя Кэли–Менгера (см., например, [5, с. 290]),

$$\begin{vmatrix} 0 & d^2(x,y) & d^2(x,z) & 1 \\ d^2(y,x) & 0 & d^2(y,z) & 1 \\ d^2(z,x) & d^2(z,y) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Через $\mathfrak{M}$ обозначим класс всех метрических пространств X таких, что (1.4) справедливо для всех $x, y, z \in X$.

Следуя Шонбергу [19, 20], будем говорить, что метрическое пространство (X, d) является птолемеевым, если неравенство

$$d(x,y)d(z,w) \leq d(x,z)d(y,w) + d(x,w)d(y,z) \tag{1.4}$$

выполняется для любых точек $x, y, z, w \in X$. Некоторые авторы называют (1.4) неравенством Птолемея. Известная со времён античности теорема Птолемея утверждает, что неравенство (1.4) обращается в равенство, если x, z, y, w — вершины выпуклого четырёхугольника, вписанного в окружность. Обозначим через $\mathfrak{P}$ класс всех птолемеевых метрических пространств.

Определим функцию $F : X \times X \to \mathbb{R}$ правилом

$$F(x,y) := \begin{cases} \frac{d(x,y)(d(x,p)\wedge d(y,p))}{(d(x,p)\vee d(y,p))^2}, & \text{если } (x,y) \neq (p,p) \\ 0, & \text{если } (x,y) = (p,p). \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь и далее

$$d(x,p) \wedge d(y,p) := \min\{d(x,p), d(y,p)\},$$

а

$$d(x,p) \vee d(y,p) := \max\{d(x,p), d(y,p)\}.$$

Для $x, y, z \in X$ положим

$$\Phi(x,y,z) := F(x,y) \vee F(x,z) \vee F(y,z). \tag{1.6}$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство с отмеченной точкой* p.

(i) $\mathbf{\Omega^X_p} \subseteq \mathfrak{M}$ *тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$\lim_{x,y,z\to p} \Phi(x,y,z)\left(\frac{d(x,y)+d(y,z)+d(z,x)}{d(x,y)\vee d(y,z)\vee d(z,x)} - 2\right) = 0, \qquad (1.7)$$

где

$$\frac{d(x,y)+d(y,z)+d(z,x)}{d(x,y)\vee d(y,z)\vee d(z,x)} := 2$$

при $d(x,y)\vee d(y,z)\vee d(z,x) = 0$.

(ii) $\mathbf{\Omega^X_p} \subseteq \mathfrak{P}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\liminf_{x,y,z,w\to p} \frac{d(x,z)d(y,w)+d(x,w)d(y,z)-d(x,y)d(z,w)}{(d(x,p)\vee d(y,p)\vee d(z,p)\vee d(w,p))^2} \geq 0, \qquad (1.8)$$

где считаем

$$\frac{d(x,z)d(y,w)+d(x,w)d(y,z)-d(x,y)d(z,w)}{(d(x,p)\vee d(y,p)\vee d(z,p)\vee d(w,p))^2} := 0$$

при $x = y = z = w = p$.

(iii) Любое предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ *изометрично вкладывается в* $\mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда выполнены предельные соотношения* (1.7) *и* (1.8).

В этой теореме и далее под изометрическими вложениями понимаются отображения, сохраняющие расстояния, а множество $\mathbb{R}$ берётся вместе с обычной метрикой $d(x,y) = |x - y|$.

Замечание 1.2. Равенство (1.3) и часть (i) теоремы 1.1 показывают, что класс $\mathfrak{M}$ инвариантен при переходе к предкасательным пространствам, т.е. если $X \in \mathfrak{M}$, то и любое предкасательное $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ принадлежит $\mathfrak{M}$. Аналогично из (1.4) и части (ii) теоремы 1.1 следует, что все предкасательные к птолемееву метрическому пространству будут птолемеевыми. Наконец часть (iii) теоремы 1.1 и лемма 4.1, сформулированная и доказанная в четвёртом разделе настоящей работы, гарантируют изометрическую вложимость в $\mathbb{R}$ всех $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$, если само пространство X изометрично вкладывается в $\mathbb{R}$.

Замечание 1.3. Теорема 1.1 остается верной, если в ней вместо предкасательных пространств $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ рассматривать ультрапроизведения последовательностей раздутий $(X, \frac{1}{r_i}d, p)_{i\in\mathbb{N}}$.

2. Критерий принадлежности предкасательных пространств к $\mathfrak{M}$

Обозначим

$$\rho_1(x,y,z) := d(x,y) + d(y,z) + d(z,x);$$

$$\rho_2(x,y,z) := d(x,y) \vee d(y,z) \vee d(z,x).$$

Тогда предельное соотношение (1.7) перепишется в виде

$$\lim_{x,y,z\to p} \Phi(x,y,z)\left(\frac{\rho_1(x,y,z)}{\rho_2(x,y,z)} - 2\right) = 0, \tag{2.1}$$

где

$$\frac{\rho_1(x,y,z)}{\rho_2(x,y,z)} := 2 \quad \text{при} \quad \rho_2(x,y,z) = 0.$$

Доказательство утверждения (i) *теоремы* 1.1. Покажем необходимость. Пусть $\mathbf{\Omega_p^X} \subseteq \mathfrak{M}$, но предел в (2.1) не существует или не равен нулю. Легко видеть, что $0 \le \Phi(x,y,z) \le 2$ и $\left[\frac{\rho_1(x,y,z)}{\rho_2(x,y,z)}\right] \in [2;3]$, следовательно, существуют $\alpha > 0$ и $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходящиеся к p такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n,y_n,z_n)\left(\frac{\rho_1(x_n,y_n,z_n)}{\rho_2(x_n,y_n,z_n)} - 2\right) = \alpha > 0.$$

Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можем считать

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\rho_1(x_n,y_n,z_n)}{\rho_2(x_n,y_n,z_n)} - 2\right) =: \alpha_1, \quad \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n,y_n,z_n) =: \alpha_2, \tag{2.2}$$

где $\alpha_1\alpha_2 = \alpha$ и $\alpha_1 \ne 0 \ne \alpha_2$. Заметим, что, по крайней мере, одно из равенств $F(x_n,y_n) = \Phi(x_n,y_n,z_n)$, $F(y_n,z_n) = \Phi(x_n,y_n,z_n)$, $F(z_n,x_n) = \Phi(x_n,y_n,z_n)$ имеет место бесконечное число раз. Предположим этим свойством обладает равенство

$$F(x_n,y_n) = \Phi(x_n,y_n,z_n), \tag{2.3}$$

чего всегда можно добиться, переименовав переменные. Ещё раз переходя к подпоследовательности, считаем, что (2.2) выполнено при всех $n \in \mathbb{N}$. Теперь (2.3) и второе равенство в (2.2) дают

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n,y_n)(d(x_n,p)\wedge d(y_n,p))}{(d(x_n,p)\vee d(y_n,p))^2} = \alpha_2 \in (0,2]. \tag{2.4}$$

Выберем из пары x_n, y_n ту переменную (допустим x_n), для которой бесконечное число раз достигается максимум из $d(x_n, p)$ и $d(y_n, p)$

$$d(x_n, p) = d(x_n, p) \vee d(y_n, p). \tag{2.5}$$

Как и раньше считаем, что последнее равенство верно для всех $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что (2.5) и условие $\alpha_2 \in (0, 2]$ приводят к $d(x_n, p) \neq 0$ при достаточно больших n. Положим

$$r_n := d(x_n, p) \vee d(z_n, p) \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Ещё раз переходя к подпоследовательности, считаем $r_n > 0$ для всех n. Рассмотрим величины

$$\frac{d(x_n,p)}{r_n}, \ \frac{d(y_n,p)}{r_n}, \ \frac{d(z_n,p)}{r_n}, \ \frac{d(x_n,y_n)}{r_n}, \ \frac{d(x_n,z_n)}{r_n}, \ \frac{d(y_n,z_n)}{r_n}. \tag{2.7}$$

В силу неравенства треугольника и (2.6) они равномерно ограничены. Из ограниченности величин (2.7) следует ограниченность $\frac{\rho_1(x_n,y_n,z_n)}{r_n}$ и $\frac{\rho_2(x_n,y_n,z_n)}{r_n}$, а значит существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, для которой пределы

$$\lim_{k\to\infty}\frac{d(x_{n_k},p)}{r_{n_k}}, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{d(y_{n_k},p)}{r_{n_k}}, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{d(z_{n_k},p)}{r_{n_k}}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{d(x_{n_k},y_{n_k})}{r_{n_k}}, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{d(x_{n_k},z_{n_k})}{r_{n_k}}, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{d(y_{n_k},z_{n_k})}{r_{n_k}}$$

и

$$\tilde{\rho}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) := \lim_{k\to\infty}\frac{\rho_1(x_{n_k},y_{n_k},z_{n_k})}{r_{n_k}},$$

$$\tilde{\rho}_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) := \lim_{k\to\infty}\frac{\rho_2(x_{n_k},y_{n_k},z_{n_k})}{r_{n_k}}$$

существуют и конечны. Переходя к подпоследовательности можем считать, что $\tilde{r} := = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{r_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Покажем, что $\tilde{\rho}_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \neq 0$. Действительно, если $\tilde{\rho}_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = 0$, то очевидно, что $\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{y},\tilde{z}) = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{z}) = 0$. Пусть в формуле (2.6) $r_n = d(x_n, p)$ на бесконечном подмножестве из $\mathbb{N}$. Тогда из (2.4) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d(x_n,y_n)(d(x_n,p)\wedge d(y_n,p))}{(d(x_n,p)\vee d(y_n,p))^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{d(x_n,y_n)d(y_n,p)}{(d(x_n,p))^2} = \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{y},\tilde{p}) = \alpha_2,$$

где $\alpha_2 \neq 0$. А значит $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) \neq 0$. Теперь рассмотрим случай $r_n = d(z_n, p)$. Так как $d(z_n, p) \leq d(z_n, x_n) + d(x_n, p)$, то либо $\tilde{d}(\tilde{z},\tilde{x}) \neq 0$, либо $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{p}) \neq 0$. В первом случае $\tilde{\rho}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \neq 0$, поэтому считаем $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{p}) \neq 0$.

Из неравенства треугольника $d(x_n, p) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, p)$ следует $\tilde{d}(\tilde{y},\tilde{p}) > 0$ или $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) > 0$. Если верно последнее неравенство, то всё доказано. Поэтому предполагаем $\tilde{d}(\tilde{y},\tilde{p}) > 0$. То есть верно неравенство $0 < \tilde{d}(\tilde{y},\tilde{p}) \leq \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{p}) \leq \tilde{d}(\tilde{z},\tilde{p})$. Далее, так как $\tilde{d}(\tilde{y},\tilde{z}) \geq \tilde{d}(\tilde{z},\tilde{p}) - \tilde{d}(\tilde{y},\tilde{p})$, можем считать $0 < \tilde{d}(\tilde{y},\tilde{p}) = \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{p}) = \tilde{d}(\tilde{z},\tilde{p}) = 1$. Теперь, в силу (2.4) выполняется $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) = \alpha_2 > 0$, а значит $\tilde{\rho}_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) > 0$.

Пусть $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное семейство, содержащее $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ и пусть $\Omega_{p,\tilde{r}}$ — метрическая идентификация пространства $(\tilde{X}_{p,\tilde{r}}, \tilde{d})$. Так как $\Omega_{p,\tilde{r}} \in \mathfrak{M}$, то

$$\frac{\tilde{\rho}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}{\tilde{\rho}_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})} = 2. \tag{2.8}$$

Но в силу (2.2) и определения функций $\rho_1(x, y, z)$ и $\rho_2(x, y, z)$

$$\frac{\tilde{\rho}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})}{\tilde{\rho}_2(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho_1(x_n, y_n, z_n)}{\rho_2(x_n, y_n, z_n)} = 2 + \alpha_1 > 2,$$

что противоречит (2.8).

Нетрудно проверить, что необходимость (2.1) может быть совершенно аналогично установлена и тогда, когда в правой части (2.5) стоит $d(y_n, p)$.

Предположим, что (2.1) выполняется и докажем $\mathbf{\Omega^X_p} \subseteq \mathfrak{M}$.

Доказывать будем от противного. Допустим, что существует предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}} \notin \mathfrak{M}$. Тогда $\operatorname{card} \Omega^X_{p,\tilde{r}} \geq 3$, а значит найдутся последовательности $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что величины

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{p}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, p)}{r_n}, \\ \tilde{d}(\tilde{y},\tilde{p}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{d(y_n, p)}{r_n}, \\ \tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, y_n)}{r_n} \end{aligned} \tag{2.9}$$

конечны и положительны. Действительно, так как $\Omega^X_{p,\tilde{r}} \notin \mathfrak{M}$, то существуют точки β, γ, $\delta \in \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ для которых

$$2(\rho(\beta,\gamma) \vee \rho(\gamma,\delta) \vee \rho(\delta,\beta)) < \rho(\beta,\gamma) + \rho(\gamma,\delta) + \rho(\delta,\beta). \tag{2.10}$$

Заметим, что последнее неравенство возможно только при попарно различных β, γ, δ. Пусть $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное семейство с метрической идентификацией $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ и $\pi : \tilde{X}_{p,\tilde{r}} \to \Omega^X_{p,\tilde{r}}$ — естественная проекция. Положим $\alpha = \pi(\tilde{p})$, то есть α — точка $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$, соответствующая постоянной последовательности $\tilde{p} = (p, p, \dots) \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$. Так как точки β, γ, δ попарно различны, то, по крайней мере, две из них отличны от α. Полагаем

$$\beta \neq \alpha \neq \gamma. \tag{2.11}$$

Пусть $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — точки из $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ такие, что

$$\beta = \pi(\tilde{x}), \quad \gamma = \pi(\tilde{y}), \quad \delta = \pi(\tilde{z}).$$

Тогда

$$\tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) = \rho(\alpha, \gamma) > 0, \quad \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) = \rho(\alpha, \beta) > 0$$

и

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(\beta, \gamma) > 0,$$

что доказывает (2.9). Рассмотрим последовательность $\{F(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, где F определена правилом (1.6). Поскольку

$$\begin{aligned} 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, p) \wedge d(y_n, p)}{r_n} &= \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) \wedge \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n, p) \vee d(y_n, p)}{r_n} = \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) \vee \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}) < \infty, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d(x_n, y_n)}{r_n} \frac{d(x_n,p)\wedge d(y_n,p)}{r_n}}{\left[\frac{d(x_n,p)\vee d(y_n,p)}{r_n}\right]^2} \\ &= \frac{\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})(\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) \wedge \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p}))}{[\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{p}) \vee \tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{p})]^2} \in (0, \infty). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Из определения функции Φ очевидно следует, что

$$F(x, y) + F(y, z) + F(z, x) \geq \Phi(x, y, z) \geq F(x, y).$$

Таким образом,

$$\limsup_{x,y,z\to p} \Phi(x, y, z) \geq \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n) > 0. \tag{2.13}$$

Из (2.10) следует неравенство

$$\frac{\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})+\tilde{d}(\tilde{y},\tilde{z})+\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{z})}{\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})\vee\tilde{d}(\tilde{y},\tilde{z})\vee\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{z})}>2,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{d(x_n,y_n)+d(y_n,z_n)+d(x_n,z_n)}{d(x_n,y_n)\vee d(y_n,z_n)\vee d(x_n,z_n)}-2\right]>0. \tag{2.14}$$

Из соотношений (2.13) и (2.14) получаем:

$$\limsup_{x,y,z\to p}\Phi(x,y,z)\left(\frac{\rho_1(x,y,z)}{\rho_2(x,y,z)}-2\right)>0, \tag{2.15}$$

что противоречит (2.1). Следовательно, наше предположение неверно, т.е. $\mathbf{\Omega^X_p}\subseteq\mathfrak{M}$. □

Замечание 2.1. Равенство (2.1) эквивалентно тому, что функция

$$\Phi(x,y,z)\left(\frac{\rho_1(x,y,z)}{\rho_2(x,y,z)}-2\right)$$

является непрерывной в точке (p,p,p).

Приведём некоторые следствия из утверждения (i) теоремы 1.1.

Следствие 2.1. *Если* $\limsup_{x,y,z\to p}\Phi(x,y,z)=0$, *то* $\mathbf{\Omega^X_p}\subseteq\mathfrak{M}$.

Следующая теорема легко получается из теоремы 2.2 работы [11] и проясняет геометрический смысл следствия 2.1.

Теорема 2.1. *Пусть* (X,d) *— метрическое пространство с отмеченной точкой* p. *Неравенство* card $\Omega^X_{p,\tilde{r}}\leq 2$ *выполняется для каждого предкасательного пространства* $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{x,y,z\to p}\Phi(x,y,z)=0. \tag{2.16}$$

Следствие 2.2. *Если* $\limsup_{x,y,z\to p}\frac{\rho_1(x,y,z)}{\rho_2(x,y,z)}=2$, *то* $\mathbf{\Omega^X_p}\subseteq\mathfrak{M}$.

Из следствия 2.2. вытекает инвариантность класса $\mathfrak{M}$ при переходе от метрического пространства к его предкасательным, что уже отмечалось в замечании 1.2. Следующее утверждение показывает, что включение $\mathbf{\Omega^X_p}\subseteq\mathfrak{M}$ не влечёт даже локальной, в окрестности точки p, принадлежности X к $\mathfrak{M}$.

Утверждение 2.1. *Для любого $k \in (0,1]$ существует метрическое пространство (X,d) с отмеченной точкой $p \in X$ такое, что*

$$\limsup_{x,y,z\to p} \frac{\rho_1(x,y,z)}{\rho_2(x,y,z)} = k+2, \tag{2.17}$$

но $\mathbf{\Omega_p^X} \subseteq \mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть $k \in (0,1]$. Построим метрическое пространство (X,d) так, что (2.17) выполнено.

Пусть $\tilde{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность положительных действительных чисел таких, что $r_{n-1} > r_n + r_{n+1}$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = 0$. Рассмотрим множество

$$X = \{0\} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n, y_n, z_n\} \right) \tag{2.18}$$

на плоскости $\mathbb{C}$, где

$$x_n = r_n, \quad y_n = r_n + r_{n+1}, \quad z_n = r_n + \frac{r_{n+1}}{2} + i\sqrt{\frac{k}{2} + \frac{k^2}{4}}\, r_{n+1}. \tag{2.19}$$

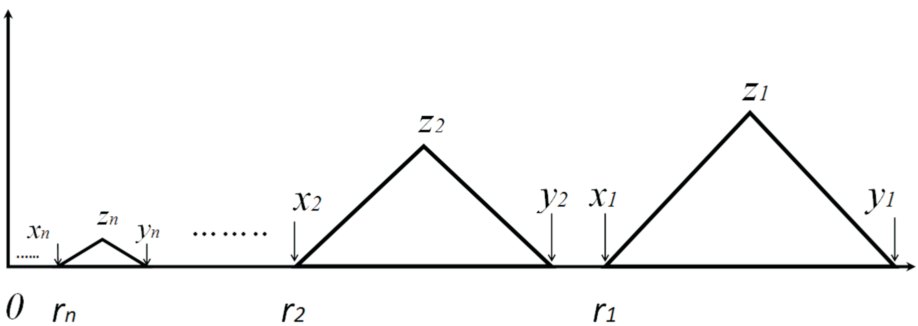

Рис. 1: $X \backslash \{0\}$ представляет собой объединение вершин равнобедренных треугольников, сходящихся к нулю быстрее любой геометрической прогрессии.

Простые вычисления показывают, что

$$|x_n - y_n| = r_{n+1}, \quad |y_n - z_n| = |x_n - z_n| = \frac{r_{n+1}}{2}(k+1). \tag{2.20}$$

Отсюда получим

$$\frac{\rho_1(x_n,y_n,z_n)}{\rho_2(x_n,y_n,z_n)} = k+2, \tag{2.21}$$

а следовательно, $\limsup_{x,y,z\to 0}\frac{\rho_1(x,y,z)}{\rho_2(x,y,z)} \geq k+2$. Осталось показать, что

$$\limsup_{x,y,z\to 0}\frac{\rho_1(x,y,z)}{\rho_2(x,y,z)} \leq k+2. \tag{2.22}$$

Последнее неравенство равносильно тому, что предельное множество функции $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ в точке $(0,0,0)$ является подмножеством сегмента $[0, k+2]$. Здесь под предельным множеством мы понимаем множество всех α таких, что существует последовательность $\{(w_m,t_m,s_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$, $w_m,t_m,s_m\in X$, сходящаяся к $(0,0,0)$ для которой

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\rho_1(w_m,t_m,s_m)}{\rho_2(w_m,t_m,s_m)} = \alpha. \tag{2.23}$$

Мы докажем, что это предельное множество состоит фактически из двух точек $\alpha = 2$ и $\alpha = k+2$, чего достаточно для выполнения (2.22). При доказательстве, не уменьшая общности, будем полагать

$$d(w_m,t_m)\wedge d(t_m,s_m)\wedge d(s_m,w_m) > 0 \tag{2.24}$$

при всех достаточно больших m. Действительно, в противном случае среди трёх точек w_m,t_m,s_m есть, по крайней мере, две совпадающие, а следовательно,

$$\frac{\rho_1(w_m,t_m,s_m)}{\rho_2(w_m,t_m,s_m)} = 2.$$

Отметим, что при $w_m = t_m = s_m$ последнее равенство имеет место в соответствии с соглашением, принятым в теореме1.1.

При вычислении предела (2.23) возможны два случая: или $w_m\cdot t_m\cdot s_m \neq 0$ при всех достаточно больших m, или $w_{m_j}\cdot t_{m_j}\cdot s_{m_j} = 0$ для некоторой последовательности $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Будем рассматривать первый случай, т.к. второй проще и может быть проанализирован аналогично.

Каждой точке $a\in X\setminus\{0\}$ соответствует натуральное число $n = n(a)$ такое, что $a\in\{x_n,y_n,z_n\}$, где точки x_n,y_n,z_n определены в (2.19). Из условия $r_{n-1} > r_n + r_{n+1}$ и (2.19) следует, что

$$\{x_n,y_n,z_n\}\cap\{x_m,y_m,z_m\} = \varnothing$$

при $m\neq n$. Следовательно, отображение

$$X\setminus\{0\}\ni x\longmapsto n(x)\in\mathbb{N}$$

определено корректно.

Пусть $\{(w_m, t_m, s_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ — последовательность, сходящаяся к $(0, 0, 0)$ и такая, что имеет место предельное соотношение (2.23). Предположение $w_m \cdot t_m \cdot s_m \neq 0$ означает, что $w_m \neq 0$, $t_m \neq 0$ и $s_m \neq 0$. Следовательно, при достаточно больших m определены значения $n(w_m)$, $n(t_m)$ и $n(s_m)$. В силу симметрии функций ρ_1 и ρ_2 будем считать, не уменьшая общности,

$$n(w_m) \leq n(t_m) \leq n(s_m) \tag{2.25}$$

при всех m. Если на некотором бесконечном подмножестве из $\mathbb{N}$ имеем

$$n(w_m) = n(t_m) = n(s_m),$$

то в силу (2.21), (2.24) и симметрии ρ_1, ρ_2 получаем равенство $\alpha = k + 2$. Поэтому, с учётом (2.24) и (2.25), имеем

$$n(w_m) < n(s_m), \tag{2.26}$$

начиная с некоторого m_0. Последнее неравенство, определение функции ρ_2, соотношения (2.19) и условие $\lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = 0$ дают равенства

$$\lim_{m\to\infty} \frac{r_{n(w_m)}}{\rho_2(w_m, t_m, s_m)} = 1, \tag{2.27}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{d(w_m, s_m)}{\rho_2(w_m, t_m, s_m)} = 1. \tag{2.28}$$

Используя (2.27), перепишем (2.23) как

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\rho_1(w_m, t_m, s_m)}{r_{n(w_m)}} = \alpha.$$

Отсюда и из (2.28) следует, что равенство $\alpha = 2$ возможно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m\to\infty} \frac{d(w_m, t_m) + d(t_m, s_m)}{r_{n(w_m)}} = 1. \tag{2.29}$$

Докажем последнее соотношение. При доказательстве будем различать два случая: или существует бесконечное $A \subseteq \mathbb{N}$ такое, что $n(w_m) = n(t_m)$ при $m \in A$, или

$$n(w_m) < n(t_m) \leq n(s_m). \tag{2.30}$$

Пусть имеет место первый случай. Тогда, начиная с некоторого m, считаем $r_{n(w_m)} = r_{n(t_m)}$, и значит,

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ m\in A}} \frac{d(t_m, s_m)}{r_{n(t_m)}} = 1$$

аналогично (2.28). Последнее предельное соотношение, $\lim_{n\to\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n}$ $= 0$ и равенство $r_{n(w_m)} = r_{n(t_m)}$ позволяют записать (2.29) в виде

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ m\in A}}\frac{d(w_m,t_m)}{r_{n(w_m)}} = 0. \tag{2.31}$$

Действительно, из $n(w_m) = n(t_m)$ получаем, что

$$w_m, t_m \in \{x_{n'}, y_{n'}, z_{n'}\},$$

где $n' = n(w_m) = n(t_m)$. Отсюда, используя (2.20) и вспоминая, что $k \in (0,1]$, имеем

$$d(w_m,t_m) \le |x_{n'} - y_{n'}| \vee |y_{n'} - z_{n'}| \vee |z_{n'} - x_{n'}| \le r_{n'+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{d(w_m,t_m)}{r_{n(w_m)}} \le \frac{r_{n'+1}}{r_{n'}},$$

что и даёт (2.31). Пусть теперь (2.30) выполнено для всех достаточно больших m. В этом случае аналогично (2.28) имеем

$$\lim_{m\to\infty}\frac{d(w_m,t_m)}{r_{n(w_m)}} = 1,$$

а доказываемое соотношение (2.29) запишется как

$$\lim_{m\to\infty}\frac{d(t_m,s_m)}{r_{n(w_m)}} = 0. \tag{2.32}$$

Для упрощения записи доказательства последнего равенства положим

$$n' := n(w_m),\ n'' := n(t_m),\ n''' := n(s_m).$$

Оценим $d(t_m,s_m)$. Так как $d(t_m,s_m) \le |t_m| + |s_m|$, то из $n' < n'' \le n'''$, условия $r_{n-1} > r_n + r_{n+1}$, принадлежностей $t_m \in \{x_{n''}, y_{n''}, z_{n''}\}$, $s_m \in \{x_{n'''}, y_{n'''}, z_{n'''}\}$ и (2.20) получим

$$\begin{gathered} |t_m| \le r_{n''} + r_{n''+1}, \quad |s_m| \le r_{n'''} + r_{n'''+1}, \\ |t_m + s_m| \le 2(r_{n''} + r_{n''+1}) \le 4r_{n''} \le 4r_{n'+1}. \end{gathered} \tag{2.33}$$

Следовательно,

$$\frac{d(t_m,s_m)}{r_{n(w_m)}} \le \frac{4r_{n'+1}}{r_{n'}},$$

что вместе с $\lim_{n\to\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n} = 0$ даёт (2.32). Равенство (2.17) доказано.

Осталось проверить включение $\mathbf{\Omega_0^X} \subseteq \mathfrak{M}$. Очевидно достаточно установить неравенство $\operatorname{card} \Omega_{0,\tilde{r}}^X \le 2$ для любого предкасательного пространства $\Omega_{0,\tilde{r}}^X$. Известно, что последнее эквивалентно равенству

$$\limsup_{x,y\to 0} F(x,y) = 0, \tag{2.34}$$

см. [11, теорема 2.2]. В нашем случае

$$F(x,y) := \begin{cases} \frac{|x-y|(|x|\wedge|y|)}{(|x|\vee|y|)^2}, & \text{при } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{при } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Очевидно $F(0,y) = F(x,0) = 0$. Оценим $F(x,y)$ при $x \neq 0 \neq y$. Полагая $n' := n(x)$, $n'' := n(y)$ и используя симметрию функции F, считаем $n' \le n''$. Из (2.19) и (2.20) легко получить

$$r_{n'} \le |x| \le r_{n'} + r_{n'+1} \le 2r_{n'}, \quad r_{n''} \le |y| \le r_{n''} + r_{n''+1} \le 2r_{n''}. \tag{2.35}$$

Так как $n'' \ge n'$, то $r_{n'} \ge r_{n''}$. Последнее вместе с (2.35) даёт

$$\frac{|x| \wedge |y|}{(|x| \vee |y|)^2} \le \frac{2r_{n''}}{(r_{n'})^2}. \tag{2.36}$$

Аналогично с учетом (2.33) получаем

$$|x-y| \le \begin{cases} r_{n'+1}, & \text{если } n' = n'' \\ 4r_{n'}, & \text{если } n' < n''. \end{cases}$$

Эта оценка и (2.36) дают

$$F(x,y) \le \begin{cases} \frac{2r_{n'+1}}{r_{n'}}, & \text{если } n' = n'' \\ \frac{8r_{n''}}{r_{n'}}, & \text{если } n' < n''. \end{cases} \tag{2.37}$$

Так как $r_{n''} \le r_{n'+1}$ при $n' < n''$, то из (2.36) и (2.37) следует

$$F(x,y) \le \frac{8r_{n'+1}}{r_{n'}}.$$

Вспоминая, что $\lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = 0$, получаем (2.34). □

3. Птолемеевость предкасательных пространств

Положим

$$\Gamma(x,y,z,w) := \frac{d(x,z)d(y,w) + d(x,w)d(y,z) - d(x,y)d(z,w)}{(d(x,p) \vee d(y,p) \vee d(z,p) \vee d(w,p))^2}$$

и

$$\Gamma(p,p,p,p) := 0.$$

Доказательство утверждения (ii) теоремы 1.1. Предположим, что выполнено
$$\mathbf{\Omega_p^X} \subseteq \mathfrak{P} \tag{3.1}$$
и докажем
$$\liminf_{x,y,z,w\to p} \Gamma(x,y,z,w) \geq 0. \tag{3.2}$$
Выберем $\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{y} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\tilde{z} = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, и $\tilde{w} = \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ так, что
$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(x_n,y_n,z_n,w_n) = \liminf_{x,y,z,w\to p} \Gamma(x,y,z,w) \tag{3.3}$$
и
$$p = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} w_n. \tag{3.4}$$
Из (3.4) следует, что
$$r_n := (d(x_n,p) \vee d(y_n,p) \vee d(z_n,p) \vee d(w_n,p)) \to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$
Если при всех достаточно больших n имеем $r_n = 0$, то предел в (3.3) равен нулю и (3.2) доказано. Поэтому считаем $r_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, чего всегда можно добиться переходя к подпоследовательности. Выберем последовательность $\tilde{r} := \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в качестве нормирующей. Так как
$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{r_n} \max\{&d(x_n,y_n), d(x_n,z_n),\\ &d(x_n,w_n), d(y_n,z_n), d(y_n,w_n), d(z_n,w_n)\}\\ &\leq \frac{2}{r_n} \max\{d(x_n,p), d(y_n,p), d(z_n,p), d(w_n,p)\} = 2, \end{aligned}$$
то ещё раз переходя к подпоследовательности, считаем, что $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{w}$ и $\tilde{p}$ — взаимностабильные последовательности. Используя определение функции $\Gamma(x,y,z,w)$ и (3.3), получим
$$\begin{aligned} &\liminf_{x,y,z,w\to p} \Gamma(x,y,z,w)\\ &= \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{z})\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{y},\tilde{w}) + \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{w})\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{y},\tilde{z}) - \tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{d}_{\tilde{r}}(\tilde{z},\tilde{w}). \end{aligned} \tag{3.5}$$
Если $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное семейство, содержащее $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, $\tilde{w}$, $\tilde{p}$ и $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ — его метрическая идентификация, то в силу (3.1) имеем $\Omega^X_{p,\tilde{r}} \in \mathfrak{P}$. Последнее соотношение и определение птолемеевости дают неотрицательность правой части в (3.5), что равносильно (3.2).

Пусть теперь выполнено (3.2). Нужно доказать, что произвольное предкасательное пространство $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ принадлежит $\mathfrak{P}$.

Легко видеть, что любое метрическое пространство, содержащее не более трёх точек, является птолемеевым. Следовательно, можно считать $\operatorname{card}(\Omega_{p,\tilde{r}}^{X}) \geq 4$. Пусть $\tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — максимальное самостабильное семейство, для которого $\Omega_{p,\tilde{r}}^{X}$ является метрической идентификацией, $\beta, \gamma, \delta, \Delta$ — различные точки из $\Omega_{p,\tilde{r}}^{X}$ и $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, $\tilde{w} \in \tilde{X}_{p,\tilde{r}}$ — последовательности, для которых

$$\pi(\tilde{x}) = \beta, \quad \pi(\tilde{y}) = \gamma, \quad \pi(\tilde{z}) = \delta, \quad \pi(\tilde{w}) = \Delta.$$

Тогда в силу (3.2) имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{x,y,z,w\to p} \Gamma(x,y,z,w) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\frac{d(x_n,z_n)}{r_n}\frac{d(y_n,w_n)}{r_n} + \frac{d(x_n,w_n)}{r_n}\frac{d(y_n,z_n)}{r_n} - \frac{d(x_n,y_n)}{r_n}\frac{d(z_n,w_n)}{r_n}}{\left(\frac{d(x_n,p)}{r_n} \vee \frac{d(y_n,p)}{r_n} \vee \frac{d(z_n,p)}{r_n} \vee \frac{d(w_n,p)}{r_n}\right)^2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

При $n \to \infty$ числитель дроби в последней формуле стремится к

$$\rho(\beta,\delta)\rho(\gamma,\Delta) + \rho(\beta,\Delta)\rho(\gamma,\delta) - \rho(\beta,\gamma)\rho(\delta,\Delta),$$

а знаменатель — к

$$(\rho(\beta,\alpha) \vee \rho(\gamma,\alpha) \vee \rho(\delta,\alpha) \vee \rho(\Delta,\alpha))^2,$$

где $\alpha = \pi(\tilde{p})$. Заметим, что

$$\rho(\beta,\alpha) \vee \rho(\gamma,\alpha) \vee \rho(\delta,\alpha) \vee \rho(\Delta,\alpha) > 0,$$

так как $\beta, \gamma, \delta, \Delta$ — различные точки $\Omega_{p,\tilde{r}}^{X}$. Отсюда и из (3.6) получим

$$\rho(\beta,\delta)\rho(\gamma,\delta) + \rho(\beta,\Delta)\rho(\delta,\gamma) - \rho(\beta,\gamma)\rho(\delta,\Delta) \geq 0,$$

что в соответствии с (1.4) даёт птолемеевость пространства $(\Omega_{p,\tilde{r}}^{X}, \rho)$ и завершает доказательство утверждения. □

Замечание 3.1. Неравенство (3.2) эквивалентно тому, что функция $\Gamma(x,y,z,w)$ полунепрерывна снизу в точке (p,p,p,p).

Замечание 3.2. Известно, что любое предгильбертово пространство над полем действительных чисел является птолемеевым (см., например, [5, 9.7.3.8, 10.9.2]), а любое линейное нормированное или даже полунормированное, птолемеево пространство является предгильбертовым [19]. В [15] было доказано, что метрическое пространство принадлежит классу CAT(0) тогда и только тогда, когда оно птолемеево и выпукло в смысле Буземанна (Busemann convex). Положив

$$d(x,y) = d(x,w) = d(y,z) = d(y,w) = d(z,w) = 1 \quad \text{и} \quad d(x,z) = 2,$$

получаем пример птолемеева метрического пространства, невложимого в гильбертово [20].

4. Критерий вложимости предкасательных пространств в $\mathbb{R}$

В силу утверждений (i) и (ii) теоремы 1.1, соотношения (2.1) и (3.2) выполняются одновременно тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{\Omega}^{\mathbf{X}}_{\mathbf{p}} \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{P}.$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1.1 достаточно установить следующее.

Лемма 4.1. *Пусть* (Y, d) *— метрическое пространство. Тогда* Y *изометрично вкладывается в* $\mathbb{R}$ *в том и только том случае, если* Y *принадлежит классу* $\mathfrak{M}$ *и является птолемеевым.*

Доказательство. Пусть Y изометрично вкладывается в $\mathbb{R}$. Докажем, что $Y \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{P}$. Принадлежность $Y \in \mathfrak{M}$ очевидна, так как она эквивалентна тому, что любое трёхточечное подмножество из Y изометрично вкладывается в $\mathbb{R}$. Принадлежность $Y \in \mathfrak{P}$ хорошо известна для $Y \subseteq \mathbb{R}$. Элементарное доказательство “неравенства Птолемея” (1.4) на плоскости можно, например, найти в [18, с. 227, 246].

Пусть теперь $Y \in \mathfrak{M}$ и является птолемеевым. Докажем, что существует изометрическое вложение Y в $\mathbb{R}$. В соответствии со знаменитым результатом К. Менгера [17], любое Y из $\mathfrak{M}$ изометрично либо некоторому подмножеству из $\mathbb{R}$, либо — “псевдолинейному четырёхполюснику” $A_4(t, s)$, т.е. четырёхточечному метрическому пространству $\{x, y, z, w\}$, расстояния между точками которого удовлетворяют соотношениям

$$d(x, z) = d(y, w) = s, \quad d(z, y) = d(w, x) = t,$$

$$d(x, y) = d(z, w) = s + t,$$

где t, s — положительные действительные числа.

Осталось заметить, что пространство $A_4(t, s)$ не является птолемеевым. Действительно,

$$d(x, y)d(z, w) = (s + t)^2, \quad d(x, z)d(y, w) = s^2, \quad d(x, w)d(z, y) = t^2,$$

значит,

$$d(x, y)d(z, w) - d(x, z)d(y, w) - d(x, w)d(z, y) = 2st > 0,$$

что противоречит предположению $Y \in \mathfrak{P}$, см. (1.4). Следовательно, Y вкладывается в $\mathbb{R}$. □

Замечание 4.1. $A_4(t,s)$ может быть реализовано как пространство, состоящее из четырёх диаметрально противоположных точек окружности с расстоянием, равным длине меньшей из двух дуг, соединяющих точки.

Замечание 4.2. Если X — дискретное метрическое пространство, то все предкасательные к X пространства являются одноточечными, а значит изометрически вкладываются в $\mathbb{R}$. Этот пример показывает, в частности, что вложимость в $\mathbb{R}$ всех $\Omega^X_{p,\tilde{r}}$ не влечёт вложимости в $\mathbb{R}$ самого X. Псевдолинейный четырёхполюсник $A_4(t,s)$ дает пример не птолемеева пространства, предкасательные к которому являются птолемеевыми. На этом пути можно получить для птолемеевых пространств аналог утверждения 2.1, но для этого необходимо ввести подходящую “меру нептолемеевости”. Интересно отметить, что равносторонний псевдолинейный четырёхполюсник $A_4(t,t)$ есть, в определённом смысле, максимально не птолемеево пространство [13].

Литература

[1] F. Abdullayev, O. Dovgoshey, M. Küçüaslan, *Compactness and boundedness of tangent spaces to metric spaces* // Beiträge Algebra Geom., **51** (2010), No. 2, 547–576.

[2] F. Abdullayev, O. Dovgoshey, M. Küçüaslan, *Metric spaces with unique pretangent spaces. Conditions of the uniqueness* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **36** (2011), No. 2, 353–392.

[3] L. Ambrosio, B. Kircheim, *Currents in metric spaces* // Acta Math., **185** (2000), 1–80.

[4] L. Ambrosio, B. Kircheim, *Rectifiable sets in metric and Banach spaces* // Math. Ann., **318** (2000), 527–555.

[5] М. Берже, *Геометрия*, Т. 1. М.: Мир, 1984.

[6] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1953.

[7] M. Bridson, A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[8] O. Dovgoshey, *Tangent spaces to metric spaces and to their subspaces* // Ukr. Mat. Visn., **5** (2008), No. 4, 470–487.

[9] O. Dovgoshey, D. Dordovskyi, *Ultrametricity and metric betweenness in tangent spaces to metric spaces* // P-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl., **2** (2010), No. 2, 100–113.

[10] А. А. Довгошей, Д. В. Дордовский, *Отношение “лежать между” и изометрические вложения метрических пространств* // Укр. Мат. Журнал, **61** (2009), No. 10, 1319–1328.

[11] O. Dovgoshey, O. Martio, *Tangent spaces to metric spaces* // Reports in Math. Helsinki Univ., **480** (2008), 20 p.

[12] O. Dovgoshey, O. Martio, *Tangent spaces to the general metric spaces* // Rev. Roumaine Math. Pures. Appl., **56** (2011), No. 2, 137–155.

[13] А. А. Довгошей, Е. А. Петров, *Птолемеевы пространства* // Сиб. Мат. Журнал, **52** (2011), No. 2, 283–291.

[14] Д. В. Дордовский, *Метрические касательные к евклидовым пространствам* // Укр. Мат. Вісн., **8** (2011), No. 2, 159–181.

[15] T. Foertsch, A. Lytchak, V. Schroeder, *Non-positive curvature and the Ptolemy inequality* // Int. Math. Res. Notice, **2007** (2007), 12 p.

[16] A. Lytchak, *Differentiation in metric spaces* // Алгебра и анализ, **16** (2004), 128–161.

[17] K. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Metrik. I-III* // Math. Ann., **100** (1928), 75–163.

[18] В. В. Прасолов, *Задачи по планиметрии.* Часть I, М.: МЦНМО, 2006.

[19] I. J. Schoenberg, *A Remark on M. M. Day's Characterization of Inner-Product Spaces and a conjecture of L. M. Blumenthal* // Proc. Amer. Soc., **3** (1952), No. 6, 961–964.

[20] I. J. Schoenberg, *On metric arcs of vanishing Menger curvature* // Ann. of Math., **41(2)** (1940), 719–723.

Сведения об авторах

Виктория Викторовна Билет, Алексей Альфредович Довгошей

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург 74
Донецк, 83114
Украина
E-Mail: `biletvictoriya@mail.ru`, `aleksdov@mail.ru`