Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 3, 381 – 403

Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею, яка вироджується в початковий момент часу

Микола І. Іванчов, Тетяна Савіцька

(*Представлена А. Є. Шишковим*)

Анотація. Розглянуто обернену задачу для одновимірного параболічного рівняння з невідомим старшим коефіцієнтом, що залежить від часу, в області, невідома межа якої слабко вироджується в початковий момент часу. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку вказаної задачі.

2010 MSC. 35R30, 35R35.

Ключові слова та фрази. Параболічне рівняння, обернена задача, вільна межа з виродженням.

Вступ

При вивченні багатьох практично важливих процесів виникають обернені задачі для рівнянь з частинними похідними в областях з вільними межами. Деякі типи таких задач було розглянуто в працях [1–4]. Дослідження цих задач в окремих випадках ускладнюється виродженням рівняння або вільної межі [5]. Обернені задачі для параболічних рівнянь з виродженням вивчались, зокрема, у працях [6–8]. Аналогічні задачі в областях з вільними межами досліджено в [9]. Крайову задачу для рівняння теплопровідності в області з вільною межею, яка вироджується в початковий момент часу, розглянуто в [10].

У даній роботі досліджується обернена задача для одновимірного параболічного рівняння з невідомим залежним від часу старшим коефіцієнтом в області з вільною межею, що вироджується в початковий момент часу. Показано, що у випадку степеневого виродження межі цю задачу можна звести до рівняння зі степеневим виродженням у

Стаття надійшла в редакцію 15.12.2010

відомій трикутній області. У випадку слабкого виродження встановлено умови існування та єдиності розв'язку.

1. Формулювання задачі

В області $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < t^\beta \tilde{h}(t),\ 0 < t < T\}$ розглянемо обернену задачу для параболічного рівняння

$$u_t = \tilde{a}(t)u_{xx} + \tilde{b}(x,t)u_x + \tilde{c}(x,t)u + \tilde{f}(x,t) \tag{1.1}$$

з умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(t^\beta \tilde{h}(t), t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.2}$$

$$\tilde{a}(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.3}$$

$$\int\limits_0^{t^\beta \tilde{h}(t)} u(x,t)\,dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.4}$$

де $\beta > 0$ — задане число, $(\tilde{h}(t),\ \tilde{a}(t),\ u(x,t))$, $\tilde{a}(t) > 0$, $\tilde{h}(t) > 0$, $t \in [0,T]$ — невідомі.

Заміною $y = \frac{x}{\tilde{h}(t)}$, $\sigma = t^\beta$ зведемо задачу (1.1)–(1.4) до оберненої задачі для параболічного рівняння з виродженням:

$$v_\sigma = \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} a(\sigma)}{\beta h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{\beta y h'(\sigma) + \sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} b(yh(\sigma),\sigma)}{\beta h(\sigma)} v_y$$
$$+ \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\big(c(yh(\sigma),\sigma)v + f(yh(\sigma),\sigma)\big), \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1}, \tag{1.5}$$

$$v(0,\sigma) = \nu_1(\sigma), \quad v(\sigma,\sigma) = \nu_2(\sigma),\ \sigma \in [0,T_1], \tag{1.6}$$

$$a(\sigma)v_y(0,\sigma) = h(\sigma)\nu_3(\sigma),\ \sigma \in [0,T_1], \tag{1.7}$$

$$h(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)\,dy = \nu_4(\sigma),\ \sigma \in [0,T_1], \tag{1.8}$$

де $Q_{T_1} = \{(y,\sigma) : 0 < y < \sigma,\ 0 < \sigma < T_1\}$, $T_1 = T^\beta$, $v(y,\sigma) = u(y\tilde{h}(\sigma^{\frac{1}{\beta}}), \sigma^{\frac{1}{\beta}})$, $a(\sigma) = \tilde{a}(\sigma^{\frac{1}{\beta}})$, $h(\sigma) = \tilde{h}(\sigma^{\frac{1}{\beta}})$, $b(yh(\sigma),\sigma) = \tilde{b}(y\tilde{h}(\sigma^{\frac{1}{\beta}}), \sigma^{\frac{1}{\beta}})$, $c(yh(\sigma),\sigma) = \tilde{c}(y\tilde{h}(\sigma^{\frac{1}{\beta}}), \sigma^{\frac{1}{\beta}})$, $f(yh(\sigma),\sigma) = \tilde{f}(y\tilde{h}(\sigma^{\frac{1}{\beta}}), \sigma^{\frac{1}{\beta}})$, $\nu_i(\sigma) = \mu_i(\sigma^{\frac{1}{\beta}})$, $i = \overline{1,4}$. Очевидно, що задачі (1.1)–(1.4) та (1.5)–(1.8) еквівалентні. Зауважимо, що у випадку $\beta > \frac{1}{2}$ виродження рівняння (1.5) є слабким. Саме цей випадок розглядатимемо надалі.

2. Крайова задача для рівняння теплопровідності в трикутній області

Розглянемо таку допоміжну задачу:

$$u_t = a(t)t^\gamma u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < t, 0 < t < T, \tag{2.1}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(t,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Якщо $0 < \gamma < 1,\ a \in C[0,T],\ a(t) > 0,\ t \in [0,T],\ \mu_i \in C[0,T],\ i = 1,2,$ $\mu_1(0) = \mu_2(0),\ f \in C([0,t] \times [0,T])$, причому функція $f(x,t)$ задовольняє умову Гельдера по x, то розв'язок задачі (2.1), (2.2) з класу $C^{2,1}((0,t) \times (0,T)) \cap C([0,t] \times [0,T])$ можна подати у вигляді [11]

$$u(x,t) = \int_0^t G_\xi(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)\,d\tau - \int_0^t G_\xi(x,t,\tau,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^\tau G(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \tag{2.3}$$

де $G(x,t,\xi,\tau)$ — функція Гріна задачі (2.1), (2.2), яку можна знайти у вигляді

$$G(x,t,\xi,\tau) = G_0(x,t,\xi,\tau) + \int_\tau^t d\sigma \int_0^\sigma G_0(x,t,\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma,\xi,\tau)\,d\eta.$$

Тут

$$G_0(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nt)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nt)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right), \quad \theta(t) = \int_0^t a(\tau)\tau^\gamma\,d\tau,$$

а функція $\Phi(x,t,\xi,\tau)$ є розв'язком рівняння

$$\Phi(x,t,\xi,\tau) = -LG_0(x,t,\xi,\tau) - \int_\tau^t d\sigma \int_0^\sigma LG_0(x,t,\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma,\xi,\tau)\,d\eta,$$

в якому $L = \frac{\partial}{\partial t} - a(t)t^\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

3. Існування розв'язку задачі (1.1)–(1.4)

Дослідження існування розв'язку задачі (1.1)–(1.4) проведемо окремо для випадків $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ та $\beta > 1$.

Теорема 3.1. *Нехай при $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ виконуються наступні припущення:*

(A1) $\mu_i \in C^1[0,T],\ i = 1,2,4,\ \mu_3 \in C[0,T],\ \mu_i'(t) = \lambda_i(t)t^{\beta-1},\ \lambda_i \in C[0,T],\ i = 1,2;$ *функції $\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{f} \in C([0,\infty) \times [0,T])$ задовольняють локально умову Гельдера по x з показником $\alpha \in (0,1)$ рівномірно відносно $t \in [0,T]$;*

(A2) $\mu_i(t) > 0,\ i = 1,2,3,\ \mu_4(t) = \mu_0(t)t^\beta,\ \mu_0(t) > 0,\ t \in [0,T],\ \tilde{f}(x,t) \geq 0,\ \tilde{c}(x,t) \leq 0, (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T],\ \lambda_2(t) > \lambda_1(t),\ t \in [0,T];$

(A3) $\mu_1(0) = \mu_2(0).$

Тоді існує принаймні один розв'язок $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$ задачі (1.1)–(1.4)*, визначений при $0 \leq x \leq \tilde{h}(t),\ 0 \leq t \leq T_0$, який належить до класу $C^1(0,T_0] \cap C[0,T_0] \times C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, де число $T_0,\ 0 < T_0 \leq T$ визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Внаслідок еквівалентності задач (1.1)–(1.4) та (1.5)–(1.8) достатньо довести існування розв'язку останньої задачі. Заміною невідомої функції $v(y,\sigma) = \tilde{v}(y,\sigma) + \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))$ зведемо цю задачу до такої:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_\sigma = {} & \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} a(\sigma)}{\beta h^2(\sigma)} \tilde{v}_{yy} + \frac{\beta y h'(\sigma) + \sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} b(yh(\sigma),\sigma)}{\beta h(\sigma)} \tilde{v}_y \\ & + \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\big(c(yh(\sigma),\sigma)\tilde{v} + f(yh(\sigma),\sigma)\big) - \nu_1'(\sigma) - \frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) \\ & + \frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \frac{(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))(\beta y h'(\sigma) + \sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} b(yh(\sigma),\sigma))}{\beta\sigma h(\sigma)} \\ & + \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta} c(yh(\sigma),\sigma)\big(\nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))\big), \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\tilde{v}(0,\sigma) = \tilde{v}(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{3.2}$$

Використовуючи функцію Гріна задачі

$$v_\sigma = \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} a(\sigma)}{\beta h^2(\sigma)} v_{yy}, \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1}, \tag{3.3}$$

$$v(0,\sigma) = v(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0, T_1], \tag{3.4}$$

зведемо задачу (3.1), (3.2) до інтегро-диференціального рівняння

$$\tilde{v}(y,\sigma) = \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau)\Bigg(\frac{\beta\eta h'(\tau) + \tau^{\frac{1-\beta}{\beta}} b(\eta h(\tau),\tau)}{\beta h(\tau)}\tilde{v}_\eta(\eta,\tau)$$
$$+ \frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\big(c(\eta h(\tau),\tau)\tilde{v}(\eta,\tau) + f(\eta h(\tau),\tau)\big) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau))$$
$$+ \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) + \frac{(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))(\beta\eta h'(\tau) + \tau^{\frac{1-\beta}{\beta}} b(\eta h(\tau),\tau))}{\beta\tau h(\tau)}$$
$$+ \frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta} c(\eta h(\tau),\tau)\Big(\nu_1(\tau) + \frac{\eta}{\tau}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\Big)\Bigg) d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}.$$

Повертаючись до функції $v(y,\sigma)$, отримаємо:

$$v(y,\sigma) = \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))$$
$$+ \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau)\Bigg(v_\eta(\eta,\tau)\frac{\beta\eta h'(\tau) + \tau^{\frac{1-\beta}{\beta}} b(\eta h(\tau),\tau)}{\beta h(\tau)}$$
$$+ \frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau) + f(\eta h(\tau),\tau)\big) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)$$
$$- \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\Bigg) d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{3.5}$$

Встановимо оцінку функції $v(y,\sigma)$ знизу. Позначимо через $v_0(y,\sigma)$ розв'язок задачі

$$v_\sigma = \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} a(\sigma)}{\beta h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{\beta y h'(\sigma) + \sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} b(yh(\sigma),\sigma)}{\beta h(\sigma)} v_y$$
$$+ \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta} c(yh(\sigma),\sigma) v, \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1}, \tag{3.6}$$

$$v(0,\sigma) = \nu_1(\sigma), \quad v(\sigma,\sigma) = \nu_2(\sigma), \quad 0 \le \sigma \le T_1, \tag{3.7}$$

а через $\widehat{v}(y,\sigma)$ — розв'язок задачі

$$v_\sigma = \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} a(\sigma)}{\beta h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{\beta y h'(\sigma) + \sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} b(yh(\sigma),\sigma)}{\beta h(\sigma)} v_y$$

$$+\frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\big(c(yh(\sigma),\sigma)v+f(yh(\sigma),\sigma)\big),\quad (y,\sigma)\in Q_{T_1},\quad (3.8)$$

$$v(0,\sigma)=v(\sigma,\sigma)=0,\quad 0\le\sigma\le T_1. \quad (3.9)$$

Тоді

$$v(y,\sigma)=v_0(y,\sigma)+\widehat{v}(y,\sigma). \quad (3.10)$$

З принципу максимуму [12, розд. 2] отримуємо

$$v_0(y,\sigma)\ge C_1\min\Big\{\min_{[0,T]}\mu_1(t),\min_{[0,T]}\mu_2(t)\Big\}=M_1>0,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}.$$

Оскільки з умов теореми випливає, що $\widehat{v}(y,\sigma)\ge 0$, то

$$v(y,\sigma)\ge M_1>0,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}. \quad (3.11)$$

Зважаючи на це, рівняння (1.8) подамо у вигляді

$$h(\sigma)=\frac{\nu_4(\sigma)}{\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)\,dy},\quad \sigma\in(0,T_1]. \quad (3.12)$$

Позначимо $w(y,\sigma)\equiv v_y(y,\sigma)$, $p(\sigma)\equiv\sigma h'(\sigma)$ і зведемо рівняння (3.5) до системи інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}v(y,\sigma)&=\nu_1(\sigma)+\frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))\\&+\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G(y,\sigma,\eta,\tau)\Bigg(\bigg(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)}+\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}b(\eta h(\tau),\tau)}{\beta h(\tau)}\bigg)w(\eta,\tau)\\&+\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f(\eta h(\tau),\tau)\big)-\nu_1'(\tau)-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)\\&-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Bigg)d\eta,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1},\end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}w(y,\sigma)&=\frac{\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma)}{\sigma}\\&+\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G_y(y,\sigma,\eta,\tau)\Bigg(\bigg(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)}+\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}b(\eta h(\tau),\tau)}{\beta h(\tau)}\bigg)w(\eta,\tau)\\&+\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f(\eta h(\tau),\tau)\big)-\nu_1'(\tau)-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)\\&-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Bigg)d\eta,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}.\end{aligned} \quad (3.14)$$

З умови (1.7) маємо рівняння

$$a(\sigma)w(0,\sigma) = h(\sigma)\nu_3(\sigma), \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{3.15}$$

Диференціюючи умову (1.8) та використовуючи (1.5), отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} p(\sigma) = \frac{1}{\nu_2(\sigma)}\Bigg(&\nu_4'(\sigma) - h(\sigma)\nu_2(\sigma) - \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}a(\sigma)}{\beta h(\sigma)}(w(\sigma,\sigma) - w(0,\sigma)) \\ &- \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\int_0^\sigma \big(b(yh(\sigma),\sigma)w(y,\sigma) + h(\sigma)(c(yh(\sigma),\sigma)v(y,\sigma) \\ &+ f(yh(\sigma),\sigma))\big)dy\Bigg), \quad \sigma \in (0,T_1]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Отже, задачу (1.5)–(1.8) зведено до системи інтегральних рівнянь (3.12)–(3.16) стосовно невідомих $(h(\sigma), a(\sigma), v(y,\sigma), w(y,\sigma), p(\sigma))$. Повторюючи міркування, наведені в [4], легко переконатись у тому, що задача (1.5)–(1.8) еквівалентна задачі знаходження неперервного розв'язку системи інтегральних рівнянь (3.12)–(3.16).

Встановимо існування неперервного розв'язку системи інтегральних рівнянь (3.12)–(3.16), застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього виведемо оцінки розв'язків системи рівнянь (3.12)–(3.16).

З (3.11) та (3.12) випливає нерівність

$$h(\sigma) \le H_1 < \infty, \quad \sigma \in [0,T_1]. \tag{3.17}$$

Використовуючи цю оцінку, за принципом максимуму [12, розд. 2] маємо

$$v(y,\sigma) \le M_2 < \infty, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \tag{3.18}$$

У свою чергу, з (3.12), (3.18) та умови **(A2)** знаходимо

$$h(\sigma) \ge \frac{\sigma\nu_0(\sigma)}{\sigma M_2} \ge H_0 > 0, \quad \sigma \in [0,T_1], \tag{3.19}$$

де $\nu_0(\sigma) = \mu_0(\sigma^{1/\beta})$.

З умов **(A1)**–**(A3)** випливає, що

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} = \nu_2'(0) - \nu_1'(0) = \frac{1}{\beta}(\lambda_2(0) - \lambda_1(0)) > 0, \quad \sigma \in (0,T_1],$$

а тому

$$\frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} \ge M_3 > 0, \quad \sigma \in (0,T_1] \tag{3.20}$$

Встановимо поведінку інтегрального доданка в формулі (3.14). Для цього припустимо, що величини $w(y,\sigma), a(\sigma), p(\sigma)$ є обмеженими. Враховуючи оцінки функції Гріна [13, с. 469], матимемо

$$\Bigg|\int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G_y(y,\sigma,\eta,\tau)\Bigg(\Bigg(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} + \frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}} b(\eta h(\tau),\tau)}{\beta h(\tau)}\Bigg) w(\eta,\tau)$$

$$+ \frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau) + f(\eta h(\tau),\tau)\big) - \nu_1'(\tau)$$

$$- \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau))\Bigg) d\eta\Bigg|$$

$$\le C_8 \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau \big|G_y(y,\sigma,\eta,\tau)\big| d\eta \le C_9 \int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}$$

$$\le C_{10} \int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\sigma^{1/\beta} - \tau^{1/\beta}}}, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \quad (3.21)$$

З використанням заміни $z = \frac{\tau}{\sigma}$ знаходимо

$$\int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\sigma^{1/\beta} - \tau^{1/\beta}}} = \sigma^{1-\frac{1}{2\beta}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{1/\beta}}} \le C_{11}\sigma^{1-\frac{1}{2\beta}}, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \quad (3.22)$$

Оскільки для першого доданка з формули (3.14) правильною є оцінка (3.20), то звідси випливає існування такого числа $\sigma_1,\ 0 < \sigma_1 \le T_1$, що для $y \in [0,\sigma],\ \sigma \in [0,\sigma_1]$ виконується оцінка

$$w(y,\sigma) \ge \frac{1}{2} M_3 > 0. \quad (3.23)$$

Тоді з (3.15), (3.17) отримуємо

$$a(\sigma) \le A_1 < \infty, \quad \sigma \in [0,\sigma_1]. \quad (3.24)$$

Позначимо

$$W(\sigma) \equiv \max_{0\le y\le\sigma} w(y,\sigma), \quad a_{\min}(\sigma) \equiv \min_{0\le\tau\le\sigma} a(\tau).$$

З (3.14), (3.16) отримуємо нерівності

$$W(\sigma) \le C_{12} + C_{13} \int_0^\sigma \frac{(1+|p(\tau)|)(W(\tau)+1)}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}} d\tau, \quad \sigma \in [0,\sigma_1], \quad (3.25)$$

$$|p(\sigma)| \le C_{14} + C_{15}W(\sigma), \quad \sigma \in [0, \sigma_1]. \tag{3.26}$$

Підставимо (3.26) в (3.25):

$$W(\sigma) \le C_{12} + C_{16}\int\limits_0^\sigma \frac{(W(\tau)+1)^2}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}\,d\tau.$$

Заміною $W_1(\sigma) \equiv W(\sigma) + 1$ надамо отриманій нерівності вигляду

$$W_1(\sigma) \le C_{17} + \frac{C_{18}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}}\int\limits_0^\sigma \frac{W_1^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\sigma^{1/\beta}-\tau^{1/\beta}}}. \tag{3.27}$$

Оскільки $\tau \le \sigma$ і $\beta \le 1$, то $\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{1/\beta-1} \le 1$, і нерівність (3.27) зводиться до вигляду

$$W_1(\sigma) \le C_{17} + \frac{C_{18}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)\sigma^{1/\beta-1}}}\int\limits_0^\sigma \frac{W_1^2(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}}. \tag{3.28}$$

Піднесемо цю нерівність до квадрата. Використовуючи нерівності Коші та Коші–Буняковського, отримаємо

$$W_1^2(\sigma) \le C_{19} + \frac{C_{20}}{a_{\min}(\sigma)\sigma^{1/\beta-3/2}}\int\limits_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\sigma-\tau}}.$$

Покладемо в попередній нерівності $\sigma = s$, домножимо на $\frac{1}{\sqrt{\sigma-s}}$ і проінтегруємо від 0 до σ:

$$\int\limits_0^\sigma \frac{W_1^2(s)\,ds}{\sqrt{\sigma-s}} \le C_{21}\sqrt{\sigma} + C_{20}\int\limits_0^\sigma \frac{ds}{a_{\min}(s)s^{1/\beta-3/2}}\int\limits_0^s \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\sqrt{(s-\tau)(\sigma-s)}}$$

$$\le C_{21}\sqrt{\sigma} + \frac{C_{20}}{a_{\min}(\sigma)}\int\limits_0^\sigma W_1^4(\tau)\,d\tau \int\limits_\tau^\sigma \frac{ds}{s^{1/\beta-3/2}\sqrt{(s-\tau)(\sigma-s)}}. \tag{3.29}$$

Нехай $\frac{1}{2} < \beta < \frac{2}{3}$. Тоді, враховуючи рівність

$$\int\limits_\tau^\sigma \frac{ds}{\sqrt{(s-\tau)(\sigma-s)}} = \pi,$$

маємо

$$\int\limits_0^\sigma \frac{W_1^2(s)\,ds}{\sqrt{\sigma-s}} \le C_{21}\sqrt{\sigma} + \frac{C_{22}}{a_{\min}(\sigma)}\int\limits_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\tau^{1/\beta-3/2}}.$$

Підставляючи останню нерівність в (3.28), отримуємо

$$W_1(\sigma) \le C_{17} + \frac{C_{23}\sigma^{\frac{2\beta-1}{2\beta}}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}} + \frac{C_{24}}{a_{\min}^{3/2}(\sigma)\sigma^{\frac{1-\beta}{2\beta}}} \int\limits_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\tau^{1/\beta-3/2}}$$

$$\le C_{17} + \frac{C_{23}\sigma^{\frac{2\beta-1}{2\beta}}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}} + \frac{C_{24}}{a_{\min}^{3/2}(\sigma)} \int\limits_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{3}{2\beta}-2}}. \quad (3.30)$$

Позначимо

$$\Phi(\sigma) = C_{17} + \frac{C_{23}\sigma^{\frac{2\beta-1}{2\beta}}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}}, \quad \Psi(\sigma) = \frac{C_{24}}{a_{\min}^{3/2}(\sigma)}, \quad (3.31)$$

$$H(\sigma) = \frac{\Phi(\sigma)}{\Psi(\sigma)} + \int\limits_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{3}{2\beta}-2}}. \quad (3.32)$$

Тоді з (3.30) отримаємо

$$\frac{W_1(\sigma)}{\Psi(\sigma)} \le H(\sigma). \quad (3.33)$$

Продиференціюємо (3.32) по σ і врахуємо (3.33):

$$H'(\sigma) \le \left(\frac{\Phi(\sigma)}{\Psi(\sigma)}\right)' + \frac{H^4(\sigma)\Psi^4(\sigma)}{\sigma^{\frac{3}{2\beta}-2}}. \quad (3.34)$$

Останню нерівність поділимо на $H^4(\sigma)$ і проінтегруємо її від 0 до σ:

$$\frac{1}{3H^3(0)} - \frac{1}{3H^3(\sigma)} \le \frac{\Phi(\sigma)}{\Psi(\sigma)H^4(\sigma)} - \frac{\Phi(0)}{\Psi(0)H^4(0)} + 4\int\limits_0^\sigma \frac{\Phi(\tau)H'(\tau)}{\Psi(\tau)H^5(\tau)}\,d\tau + \int\limits_0^\sigma \frac{\Psi^4(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{3}{2\beta}-2}}.$$

З (3.32) випливає, що $H(0) = \dfrac{\Phi(0)}{\Psi(0)}$. Отже,

$$\frac{H^4(\sigma)}{3H^3(0)}\left(4 - 3H^3(0)\left(4\int\limits_0^\sigma \frac{\Phi(\tau)H'(\tau)}{\Psi(\tau)H^5(\tau)}\,d\tau + \int\limits_0^\sigma \frac{\Psi^4(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{3}{2\beta}-2}}\right)\right) \le \frac{\Phi(\sigma)}{\Psi(\sigma)} + \frac{H(\sigma)}{3}. \quad (3.35)$$

В інтегралі $\int_0^\sigma \frac{\Phi(\tau)H'(\tau)}{\Psi(\tau)H^5(\tau)}\,d\tau$ зробимо заміну $z = H(\tau)$, внаслідок чого отримаємо

$$\int\limits_0^\sigma \frac{\Phi(\tau)H'(\tau)}{\Psi(\tau)H^5(\tau)}\,d\tau = \int\limits_{H(0)}^{H(\sigma)} \frac{\Phi(H^{-1}(z))\,dz}{\Psi(H^{-1}(z))z^5},$$

де $H^{-1}(z)$ — обернена функція до $H(\sigma)$.

Оскільки

$$4\int\limits_{H(0)}^{H(\sigma)} \frac{\Phi(H^{-1}(z))\,dz}{\Psi(H^{-1}(z))z^5} + \int\limits_0^\sigma \frac{\Psi^4(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{3}{2\beta}-2}} \to 0 \quad \text{при } \sigma \to 0,$$

то існує таке число $\sigma_2 : \ 0 < \sigma_2 \le T_1$, що

$$4-3H^3(0)\left(4\int\limits_0^\sigma \frac{\Phi(\tau)H'(\tau)}{\Psi(\tau)H^5(\tau)}\,d\tau+\int\limits_0^\sigma \frac{\Psi^4(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{3}{2\beta}-2}}\right) \ge 1, \quad \sigma \in [0,\sigma_2]. \tag{3.36}$$

Тоді з (3.35) випливає нерівність

$$\frac{H^4(\sigma)}{3H^3(0)} \le \frac{\Phi(\sigma)}{\Psi(\sigma)} + \frac{H(\sigma)}{3}, \quad \sigma \in [0,\sigma_2],$$

або

$$H^4(\sigma) \le \frac{3\Phi(\sigma)}{\Psi(\sigma)}H^3(0) + H(\sigma)H^3(0), \quad \sigma \in [0,\sigma_2].$$

Використовуючи це в (3.34), знаходимо

$$H'(\sigma) \le \left(\frac{\Phi(\sigma)}{\Psi(\sigma)}\right)' + \frac{3\Phi(\sigma)\Psi^3(\sigma)H^3(0)}{\sigma^{\frac{3}{2\beta}-2}} + \frac{H(\sigma)H^3(0)\Psi^4(\sigma)}{\sigma^{\frac{3}{2\beta}-2}}.$$

Домножимо цю нерівність на $\exp\left(-H^3(0)\int_0^\sigma \frac{\Psi^4(s)\,ds}{s^{\frac{3}{2\beta}-2}}\right)$ і проінтегруємо від 0 до σ:

$$H(\sigma)\exp\left(-H^3(0)\int\limits_0^\sigma \frac{\Psi^4(s)\,ds}{s^{\frac{3}{2\beta}-2}}\right) - H(0)$$
$$\le \frac{\Phi(\sigma)}{\Psi(\sigma)}\exp\left(-H^3(0)\int\limits_0^\sigma \frac{\Psi^4(s)\,ds}{s^{\frac{3}{2\beta}-2}}\right)$$
$$-\frac{\Phi(0)}{\Psi(0)} + 4H^3(0)\int\limits_0^\sigma \frac{\Phi(\tau)\Psi^3(\tau)\exp\left(-H^3(0)\int\limits_0^\tau \frac{\Psi^4(s)\,ds}{s^{\frac{3}{2\beta}-2}}\right)}{\tau^{\frac{3}{2\beta}-2}}\,d\tau.$$

Надамо останній нерівності вигляду

$$H(\sigma) \le \frac{\Phi(\sigma)}{\Psi(\sigma)} + 4H^3(0) \int\limits_0^\sigma \frac{\Phi(\tau)\Psi^3(\tau)\exp\left(H^3(0)\int\limits_\tau^\sigma \frac{\Psi^4(s)\,ds}{s^{\frac{3}{2\beta}-2}}\right)}{\tau^{\frac{3}{2\beta}-2}}\,d\tau.$$

Тоді з (3.33) маємо

$$W_1(\sigma) \le \Phi(\sigma) + 4H^3(0)\Psi(\sigma)\int\limits_0^\sigma \frac{\Phi(\tau)\Psi^3(\tau)\,d\tau}{\tau^{\frac{3}{2\beta}-2}}\exp\left(H^3(0)\int\limits_0^\sigma \frac{\Psi^4(s)\,ds}{s^{\frac{3}{2\beta}-2}}\right).$$

Враховуючи позначення (3.31), отримуємо

$$W(\sigma) \le C_{17} + \frac{C_{23}\sigma^{\frac{2\beta-1}{2\beta}}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}} + \frac{C_{25}}{a_{\min}^{3/2}(\sigma)}\int\limits_0^\sigma \left(C_{17} + \frac{C_{23}\tau^{\frac{2\beta-1}{2\beta}}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}}\right)\frac{d\tau}{a_{\min}^{9/2}(\tau)\tau^{\frac{3}{2\beta}-2}}$$
$$\times \exp\left(C_{26}\int\limits_0^\sigma \frac{ds}{a_{\min}^6(s)s^{\frac{3}{2\beta}-2}}\right).$$

Існує таке число $\sigma_3 \in (0, T_1]$, що

$$\frac{C_{25}}{a_{\min}^{3/2}(\sigma)}\int\limits_0^\sigma \left(C_{17} + \frac{C_{23}\tau^{\frac{2\beta-1}{2\beta}}}{\sqrt{a_{\min}(\tau)}}\right)\frac{d\tau}{a_{\min}^{9/2}(\tau)\tau^{\frac{3}{2\beta}-2}}$$
$$\times \exp\left(C_{26}\int\limits_0^\sigma \frac{ds}{a_{\min}^6(s)s^{\frac{3}{2\beta}-2}}\right) \le C_{17}, \quad (3.37)$$

а тому

$$W(\sigma) \le 2C_{17} + \frac{C_{23}\sigma^{\frac{2\beta-1}{2\beta}}}{\sqrt{a_{\min}(\sigma)}}. \quad (3.38)$$

Звідси та з (3.15) випливає нерівність

$$2C_{17}a_{\min}(\sigma) + C_{23}\sigma^{\frac{2\beta-1}{2\beta}}\sqrt{a_{\min}(\sigma)} - C_{27} \ge 0,$$

тобто

$$\sqrt{a_{\min}(\sigma)} \ge \frac{\sqrt{C_{23}^2\sigma^{\frac{2\beta-1}{\beta}} + 8C_{17}C_{27}} - C_{23}\sigma^{\frac{2\beta-1}{2\beta}}}{4C_{17}}.$$

Отже,

$$a_{\min}(\sigma) \ge \frac{\left(\sqrt{C_{23}^2\sigma^{\frac{2\beta-1}{\beta}} + 8C_{17}C_{27}} - C_{23}\sigma^{\frac{2\beta-1}{2\beta}}\right)^2}{16C_{17}^2}. \quad (3.39)$$

З (3.39), (3.38), (3.16) маємо

$$\begin{gathered} a(\sigma) \geq A_0 > 0, \ |p(\sigma)| \leq M_4, \quad \sigma \in [0, \sigma_*], \\ w(y, \sigma) \leq M_5, \quad (y, \sigma) \in \overline{Q}_{\sigma_*}, \end{gathered} \tag{3.40}$$

де $\sigma_* = \min\{\sigma_2, \sigma_3\}$, а сталі A_0, M_4, M_5 залежать лише від вихідних даних.

Легко бачити, що оцінки (3.40) зберігаються і у випадку $\frac{2}{3} \leq \beta \leq 1$, оскільки нерівність (3.29) можна продовжити, враховуючи те, що $s^{3/2-1/\beta} \leq T_1^{3/2-1/\beta}$. Отже, оцінки розв'язків системи (3.12)–(3.16) отримані.

Подамо систему рівнянь (3.12)–(3.16) у вигляді

$$\omega = P\omega, \tag{3.41}$$

де $\omega = (h, v, w, a, p)$, а оператор P визначений правими частинами рівнянь (3.12)–(3.16), при цьому рівняння (3.15) слід переписати у вигляді

$$a(\sigma) = \frac{h(\sigma)\nu_3(\sigma)}{w(0, \sigma)}, \quad \sigma \in (0, T_1].$$

Використовуючи отримані оцінки розв'язків системи рівнянь (3.12)–(3.16) та застосовуючи процедуру, детально викладену в [4], визначимо множину $\mathcal{N} \equiv \{(h, v, w, a, p) \in C[0, \sigma_0] \times (C(\overline{Q}_{\sigma_0}))^2 \times (C[0, \sigma_0])^2 : H_0 \leq h(\sigma) \leq H_1, \ M_6 \leq v \leq M_7, \ M_8 \leq w \leq M_9, \ |p| \leq M_{10}\}$, де число $\sigma_0, 0 < \sigma_0 \leq T$, визначається вихідними даними так, щоб оператор P переводив множину $\mathcal{N}$ в себе. Компактність оператора P на множині $\mathcal{N}$ встановлено в [14]. Застосовуючи теорему Шаудера, отримуємо існування хоча б однієї нерухомої точки оператора P в $\mathcal{N}$. Це означає, що існує класичний розв'язок задачі (1.1)–(1.4). Теорему доведено. $\square$

Зауважимо, що у випадку $\beta = 1$ рівняння (1.5) не вироджується.

Нехай $\beta > 1$ і виконується умова:

(A4) $\mu_4'(t) \equiv t^{\beta-1}\lambda_4(t), \tilde{f}(x, t) \equiv t^{\beta-1} f_0(x, t), \ \tilde{b}(x, t) \equiv t^{\beta-1} b_0(x, t), \tilde{c}(x, t) \equiv t^{\beta-1} c_0(x, t),$

де функції $f_0, b_0, c_0 \in C([0, +\infty) \times [0, T])$ задовольняють локально умову Гельдера по x з показником $\alpha \in (0, 1)$, а функція $\lambda_4(t)$ неперервна на $[0, T]$.

Теорема 3.2. *Нехай $\beta > 1$ і виконуються припущення* **(A1)–(A4)**. *Тоді існує хоча б один розв'язок $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x, t))$ задачі* (1.1)–(1.4), *який належить до класу $C^1(0, T_0] \cap C[0, T_0] \times C[0, T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, де $T_0, \ 0 < T_0 \leq T$ визначається вихідними даними задачі.*

Доведення. Доведення теорем 3.1 і 3.2 відрізняються тільки оцінками виразів $(w(\sigma,\sigma)-w(0,\sigma))\sigma^{\frac{1}{\beta-1}}$, $\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}b(yh(\sigma),\sigma)w(y,\sigma)$, $\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}(f(yh(\sigma),\sigma)+c(yh(\sigma),\sigma)v(y,\sigma))$. За умовою **(A4)** останні два вирази обмежені. Враховуючи (3.14), розглянемо вираз

$$w(\sigma,\sigma)-w(0,\sigma)=\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau (G_y(\sigma,\sigma,\eta,\tau)$$
$$-G_y(0,\sigma,\eta,\tau))\bigg(\bigg(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)}+\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}b(\eta h(\tau),\tau)}{\beta h(\tau)}\bigg)w(\eta,\tau)$$
$$+\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\big(c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)+f(\eta h(\tau),\tau)\big)-\nu_1'(\tau)-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)$$
$$-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\bigg)d\eta,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}.$$

Оскільки функції $G(\sigma,\sigma,\eta,\tau)$ і $G_0(\sigma,\sigma,\eta,\tau)$ мають однакові особливості, то достатньо оцінити вираз

$$\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau \left|G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)-G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)\right|d\eta,$$

де використано позначення

$$G_0^{(i)}(y,\sigma,\eta,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bigg(\exp\bigg(-\frac{(y-\eta+2n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\bigg)$$
$$+(-1)^i\exp\bigg(-\frac{(y+\eta+2n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\bigg)\bigg),\quad i=1,2,$$

$$\theta(\sigma)=\int_0^\sigma\frac{a(\tau)}{\beta\tau^{\frac{\beta-1}{\beta}}h^2(\tau)}\,d\tau.$$

Беручи до уваги те, що

$$G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)\ge 0,\quad G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau)\le 0,$$

$$G_{0y}^{(1)}(y,\sigma,\eta,\tau)=-G_{0\eta}^{(2)}(y,\sigma,\eta,\tau),$$

маємо

$$\int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau |G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau) - G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)|\,d\eta$$

$$= \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau (G_{0\eta}^{(2)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau) - G_{0\eta}^{(2)}(0,\sigma,\eta,\tau))\,d\eta$$

$$= \int_0^\sigma (G_0^{(2)}(\sigma,\sigma,\tau,\tau) - G_0^{(2)}(0,\sigma,\tau,\tau) - G_0^{(2)}(\sigma,\sigma,0,\tau) + G_0^{(2)}(0,\sigma,0,\tau))\,d\tau$$

$$= \int_0^\sigma \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \biggl(\exp\biggl(-\frac{((2n+1)\sigma-\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)$$
$$+ \exp\biggl(-\frac{((2n+1)\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr) - \exp\biggl(-\frac{(2n\sigma-\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)$$
$$- \exp\biggl(-\frac{(2n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr) - 2\exp\biggl(-\frac{((2n+1)\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)$$
$$+ 2\exp\biggl(-\frac{(2n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)\biggr)\,d\tau$$

$$= \int_0^\sigma \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} \biggl(\exp\biggl(-\frac{(n\sigma-\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)$$
$$+ \exp\biggl(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr) - 2\exp\biggl(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)\biggr)\,d\tau$$

$$= \int_0^\sigma \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n} \biggl(\exp\biggl(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)$$
$$- \exp\biggl(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)\biggr)\,d\tau.$$

Зважаючи на те, що

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n} \biggl(\exp\biggl(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr) - \exp\biggl(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)\biggr)$$
$$\le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \biggl(\exp\biggl(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr) + \exp\biggl(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)\biggr)$$
$$\le 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \biggl(2\exp\biggl(-\frac{(n\sigma)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr) + \exp\biggl(-\frac{(n\sigma+\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)$$
$$+ \exp\biggl(-\frac{(n\sigma-\tau)^2}{4(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}\biggr)\biggr),$$

та застосовуючи лему 2.1.1 [11], отримуємо

$$\int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau \left|G_{0y}^{(1)}(\sigma,\sigma,\eta,\tau) - G_{0y}^{(1)}(0,\sigma,\eta,\tau)\right| d\eta$$
$$\le C_{28} \int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}} + C_{29}\sigma$$

або

$$|(w(\sigma,\sigma) - w(0,\sigma))\sigma^{1/\beta-1}| \le C_{30}\sigma^{\frac{1}{2\beta}}. \tag{3.42}$$

За наявності оцінки (3.42) доведення теореми 3.2 завершується так само, як і доведення теореми 3.1. □

4. Єдиність розв'язку задачі (1.1)–(1.4)

Теорема 4.1. *Нехай* $\frac{1}{2} < \beta \le 1$ *і виконується умова:*

(A5) $\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{f} \in C^{1,0}([0,+\infty)\times[0,T])$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i=1,2$; $\mu_i(t) \ne 0$, $i=2,3$, $\mu_4(t) = \mu_0(t)t^\beta$, $\mu_0(t) \ne 0$, $t \in [0,T]$.

Тоді задача (1.1)–(1.4) *не може мати більше одного розв'язку* $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x,t))$, *який належить до класу* $C^1(0,T] \cap C[0,T] \times C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Оскільки задача (1.1)–(1.4) еквівалентна задачі (1.5)–(1.8), то достатньо довести єдиність розв'язку задачі (1.5)–(1.8). Припустимо, що існує два різних розв'язки $(h_i(\sigma), a_i(\sigma), v_i(y,\sigma))$, $i=1,2$ задачі (1.5)–(1.8). Позначимо $h(\sigma) \equiv h_1(\sigma) - h_2(\sigma)$, $a(\sigma) \equiv a_1(\sigma) - a_2(\sigma)$, $v(y,\sigma) \equiv v_1(y,\sigma) - v_2(y,\sigma)$.

Перетворимо різницю

$$b(yh_1(\sigma),\sigma) - b(yh_2(\sigma),\sigma)$$
$$= y(h_1(\sigma) - h_2(\sigma)) \int\limits_0^1 \left.\frac{\partial b(z,\sigma)}{\partial z}\right|_{z=yh_2(\sigma)+sy(h_1(\sigma)-h_2(\sigma))} ds.$$

Аналогічно можна подати різниці $c(yh_1(\sigma),\sigma) - c(yh_2(\sigma),\sigma)$ і $f(yh_1(\sigma),\sigma) - f(yh_2(\sigma),\sigma)$. Тоді з (1.5)–(1.8) отримаємо таку задачу відносно $(h(\sigma), a(\sigma), v(y,\sigma))$:

$$v_\sigma = \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} a_1(\sigma)}{\beta h_1^2(\sigma)} v_{yy}$$
$$+ \left(\frac{y h_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)} + \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} b(y h_1(\sigma), \sigma)}{\beta h_1(\sigma)}\right) v_y + \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} c(y h_1(\sigma), \sigma)}{\beta} v$$
$$+ \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} (a(\sigma) h_2^2(\sigma) - a_2(\sigma) h(\sigma)(h_1(\sigma) + h_2(\sigma)))}{\beta h_1^2(\sigma) h_2^2(\sigma)} v_{2yy}$$
$$+ \left(\frac{y(h'(\sigma) h_2(\sigma) - h_2'(\sigma) h(\sigma))}{h_1(\sigma) h_2(\sigma)} + \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta h_1(\sigma) h_2(\sigma)}\right.$$
$$\left.\times \left(y h(\sigma) h_2(\sigma) \int\limits_0^1 \frac{\partial b(z,\sigma)}{\partial z}\bigg|_{z = y h_2(\sigma) + s y h(\sigma)} ds - b(y h_2(\sigma), \sigma) h(\sigma)\right)\right) v_{2y}$$
$$+ \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta} \left(h(\sigma) y v_2 \int\limits_0^1 \frac{\partial c(z,\sigma)}{\partial z}\bigg|_{z = y h_2(\sigma) + s y h(\sigma)} ds\right.$$
$$\left. + y h(\sigma) \int\limits_0^1 \frac{\partial f(z,\sigma)}{\partial z}\bigg|_{z = y h_2(\sigma) + s y h(\sigma)} ds\right), \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1}, \quad (4.1)$$

$$v(0,\sigma) = v(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma \in [0, T_1], \quad (4.2)$$

$$a_1(\sigma) v_y(0,\sigma) = \nu_3(\sigma) h(\sigma) - a(\sigma) v_{2y}(0,\sigma), \quad \sigma \in [0, T_1], \quad (4.3)$$

$$h_1(\sigma) \int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)\, dy = -h(\sigma) \int\limits_0^\sigma v_2(y,\sigma)\, dy, \quad \sigma \in [0, T_1]. \quad (4.4)$$

Використовуючи функцію Гріна $G^*(y,\sigma,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_\sigma = \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} a_1(\sigma)}{\beta h_1^2(\sigma)} v_{yy} + \left(\frac{y h_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)} + \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} b(y h_1(\sigma), \sigma)}{\beta h_1(\sigma)}\right) v_y, \quad (y,\sigma) \in Q_{T_1},$$

зведемо задачу (4.1)–(4.4) до наступної системи рівнянь:

$$v(y,\sigma) = \int\limits_0^\sigma d\tau \int\limits_0^\tau G^*(y,\sigma,\eta,\tau) \left(\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}} c(\eta h_1(\tau), \tau)}{\beta} v(\eta,\tau)\right.$$
$$+ \frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}} (a(\tau) h_2^2(\tau) - a_2(\tau) h(\tau)(h_1(\tau) + h_2(\tau)))}{\beta h_1^2(\tau) h_2^2(\tau)} v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)$$
$$+ \left(\frac{\eta(h'(\tau) h_2(\tau) - h_2'(\tau) h(\tau))}{h_1(\tau) h_2(\tau)} + \frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta h_1(\tau) h_2(\tau)} \left(\eta h(\tau) h_2(\tau)\right.\right.$$

$$\times \int\limits_0^1 \frac{\partial b(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\tau)+syh(\tau)} ds - b(\eta h_2(\tau),\tau)h(\tau)\Big) v_{2\eta}(\eta,\tau)$$

$$+ \frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\Big(h(\tau)\eta v_2(\eta,\tau) \int\limits_0^1 \frac{\partial c(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\tau)+syh(\tau)} ds$$

$$+ \eta h(\tau) \int\limits_0^1 \frac{\partial f(z,\tau)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\tau)+syh(\tau)} ds\Big)\Big) d\eta, \quad (y,\sigma) \in \overline{Q}_{T_1}, \quad (4.5)$$

$$h(\sigma) = -\frac{h_1(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)dy}{\int\limits_0^\sigma v_2(y,\sigma)dy}, \quad \sigma \in [0,T_1], \quad (4.6)$$

$$a(\sigma) = \frac{\nu_3(\sigma)h(\sigma) - a_1(\sigma)v_y(0,\sigma)}{v_{2y}(0,\sigma)}, \quad \sigma \in [0,T_1], \quad (4.7)$$

$$p(\sigma) = \frac{1}{\nu_2(\sigma)}\Bigg(-h(\sigma)\nu_2(\sigma) - \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\Bigg(\frac{a_1(\sigma)}{h_1(\sigma)}(v_y(\sigma,\sigma) - v_y(0,\sigma))$$

$$+ \int\limits_0^\sigma \Big(b(yh_1(\sigma),\sigma)v_y(y,\sigma) + h_1(\sigma)c(yh_1(\sigma),\sigma)v(y,\sigma)\Big) dy$$

$$+ \frac{a(\sigma)h_2(\sigma) - a_2(\sigma)h(\sigma)}{h_1(\sigma)h_2(\sigma)}(v_{2y}(\sigma,\sigma) - v_{2y}(0,\sigma))$$

$$+ \int\limits_0^\sigma \Big(yh(\sigma)v_{2y}(y,\sigma) \int\limits_0^1 \frac{\partial b(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)} ds$$

$$+ (h_1(\sigma)yh(\sigma) \int\limits_0^1 \frac{\partial c(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)} ds + h(\sigma)c(yh_2(\sigma),\sigma))v_2(y,\sigma)$$

$$+ yh(\sigma) \int\limits_0^1 \frac{\partial f(z,\sigma)}{\partial z}\Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)} ds\Big) dy\Bigg)\Bigg), \quad \sigma \in [0,T_1]. \quad (4.8)$$

Якщо підставити (4.5) у формулу (4.6) і отриману формулу разом із (4.5) у (4.7) та (4.8), то легко переконатись у тому, що (4.5)–(4.8) є системою інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Встановимо інтегровність ядер системи (4.5)–(4.8). З умови **(A5)** та з того, що $v_2(y,\sigma)$ задовольняє (1.7) та (1.8) випливає, що знаменники в (4.7), (4.8) відмінні від нуля. Оскільки $v_2(y,\sigma)$ задовольняє (1.8), то з (4.6) та умови **(A5)** маємо

$$h(\sigma) = -\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)\,dy}{\nu_4(\sigma)}$$
$$= -\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\int\limits_0^\sigma v(y,\sigma)\,dy}{\sigma\nu_0(\sigma)} = -\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)\sigma v(\tilde{y},\sigma)}{\sigma\nu_0(\sigma)}$$
$$= -\frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma)v(\tilde{y},\sigma)}{\nu_0(\sigma)}, \quad \tilde{y}\in[0,\sigma],\ \sigma\in[0,T_1].$$

Отже, ядро в (4.6) є інтегровним.

Дослідимо поведінку $v_{2yy}(y,\sigma)$ при $\sigma\to 0$. Зробимо заміну $v_2(y,\sigma) = \tilde{v}_2(y,\sigma)+\nu_1(\sigma)+\frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))$. Тоді з (1.5)–(1.8) отримаємо задачу відносно функції $\tilde{v}_2(y,\sigma)$:

$$\tilde{v}_{2\sigma} = \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}a_2(\sigma)}{\beta h_2^2(\sigma)}\tilde{v}_{2yy} + \left(\frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)} + \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}b(yh_2(\sigma),\sigma)}{\beta h_2(\sigma)}\right)\tilde{v}_{2y}$$
$$+\frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}\big(c(yh_2(\sigma),\sigma)\tilde{v}_2 + f(yh_2(\sigma),\sigma)\big) - \nu_1'(\sigma) - \frac{y}{\sigma}(\nu_2'(\sigma)-\nu_1'(\sigma))$$
$$+\frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma)) + \left(\frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)} + \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}b(yh_2(\sigma),\sigma)}{\beta h_2(\sigma)}\right)\frac{\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma)}{\sigma}$$
$$+\frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}c(yh_2(\sigma),\sigma)\left(\nu_1(\sigma)+\frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))\right), \quad (y,\sigma)\in Q_{T_1}, \quad (4.9)$$

$$\tilde{v}_2(0,\sigma) = \tilde{v}_2(\sigma,\sigma) = 0, \quad \sigma\in[0,T_1]. \quad (4.10)$$

Використовуючи функцію Гріна $G^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\tilde{v}_{2\sigma} = \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}a_2(\sigma)}{\beta h_2^2(\sigma)}\tilde{v}_{2yy} + \left(\frac{yh_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)} + \frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}b(yh_2(\sigma),\sigma)}{\beta h_2(\sigma)}\right)\tilde{v}_{2y}$$
$$+\frac{\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}c(yh_2(\sigma),\sigma)\tilde{v}_2,$$

знаходимо розв'язок задачі (4.9), (4.10), звідки отримуємо

$$v_2(y,\sigma) = \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma)-\nu_1(\sigma))$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau G^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}f(\eta h_2(\tau),\tau)-\nu_1'(\tau)\\
&\quad-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))+\\
&\quad+\left(\frac{\eta h_2'(\tau)}{h_2(\tau)}+\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}b(\eta h_2(\tau),\tau)}{\beta h_2(\tau)}\right)\frac{\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau)}{\tau}\\
&+\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}c(\eta h_2(\tau),\tau)\Big(\nu_1(\tau)+\frac{\eta}{\tau}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)\Big)d\eta,\quad (y,\sigma)\in\overline{Q}_{T_1}.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Продиференціюємо вираз (4.11) двічі по y:

$$
\begin{aligned}
v_{2_{yy}}(y,\sigma)=&\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau G^{**}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)\Big(\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}f(\eta h_2(\tau),\tau)\\
&-\nu_1'(\tau)-\frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau))+\frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\\
&+\left(\frac{\eta h_2'(\tau)}{h_2(\tau)}+\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}b(\eta h_2(\tau),\tau)}{\beta h_2(\tau)}\right)\frac{\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau)}{\tau}\\
&+\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta}c(\eta h_2(\tau),\tau)\Big(\nu_1(\tau)+\frac{\eta}{\tau}(\nu_2(\tau)-\nu_1(\tau))\Big)\Big)d\eta,\quad (y,\sigma)\in Q_{T_1}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Для оцінки отриманого виразу застосуємо оцінку других похідних об'ємних теплових потенціалів [12, с. 23], яка для даного випадку матиме вигляд

$$
\left|\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau G^{**}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)f(\eta,\tau)\,d\eta\right|\le C_{31}\int_0^\sigma\frac{d\tau}{(\theta_2(\sigma)-\theta_2(\tau))^{1-\gamma/2}}.
$$

Тут $f(y,\sigma)$ — неперервна в $\overline{Q}_T$ функція, яка за змінною y задовольняє умову Гельдера з показником $\gamma, 0<\gamma<1$. Подамо η як $\eta=\eta^\gamma\eta^{1-\gamma}$. Враховуючи те, що функція η^γ задовольняє умову Гельдера з показником $\gamma,\ 0<\gamma<1$, та рівності $\nu_i'(\sigma)=\frac{1}{\beta}\mu_i'(\sigma^{1/\beta})\sigma^{1/\beta-1},\ i=1,2$, з (4.12) маємо

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^\sigma d\tau\int_0^\tau G^{**}_{yy}(y,\sigma,\eta,\tau)\frac{\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau)}{\tau}\eta\,d\eta\right|\\
&\qquad\le C_{32}\int_0^\sigma\frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}-\gamma}d\tau}{(\theta_2(\sigma)-\theta_2(\tau))^{1-\gamma/2}},
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

де

$$\theta_2(\sigma) = \int\limits_0^\sigma \frac{a_2(\tau)\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}}}{\beta h_2^2(\tau)}\,d\tau.$$

Решту доданків в (4.12) оцінюємо аналогічно, використовуючи умову **(A5)**.

Беручи до уваги нерівність $\theta_2(\sigma)-\theta_2(\tau) \geq C_{33}(\sigma^{1/\beta}-\tau^{1/\beta})$, з (4.12) і (4.13) отримуємо

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leq C_{34}\int\limits_0^\sigma \frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}-\gamma}d\tau}{(\theta(\sigma)-\theta(\tau))^{1-\gamma/2}} \leq C_{35}\int\limits_0^\sigma \frac{\tau^{\frac{1-\beta}{\beta}-\gamma}d\tau}{(\sigma^{1/\beta}-\tau^{1/\beta})^{1-\gamma/2}}.$$

Звідси після заміни $z=\frac{\tau}{\sigma}$ отримаємо

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \leq C_{36}\sigma^{\frac{\gamma}{2\beta}-\gamma}\int\limits_0^1 \frac{z^{\frac{1-\beta}{\beta}-\gamma}dz}{(1-z^{1/\beta})^{1-\gamma/2}} \leq C_{37}\sigma^{\frac{\gamma}{2\beta}-\gamma}.$$

З того, що $\gamma \in (0,1)$, випливає $\frac{\gamma}{2\beta}-\gamma > -1$, тому особливість в $v_{2yy}(y,\sigma)$ є інтегровною. Тоді за властивостями інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду система рівнянь (4.5–(4.8) має тільки тривіальний розв'язок $v(y,\sigma)\equiv 0$, $h(\sigma)\equiv 0$, $a(\sigma)\equiv 0$, $p(\sigma)\equiv 0$, $y\in[0,\sigma]$, $\sigma\in[0,T_1]$. Тому розв'язок задачі (1.5)–(1.8), а, отже, і задачі (1.1–(1.4) єдиний. Теорему доведено. □

Теорема 4.2. *Нехай $\beta>1$ і виконується умова*

(A6) $\tilde b,\tilde c,\tilde f \in C^{1,0}([0,\infty)\times[0,T])$, $\mu_i\in C^1[0,T], \mu_i'(t)=\lambda_i(t)t^{\beta-1}$, $\lambda_i\in C[0,T]$, $i=1,2$, $\mu_i(t)\neq 0$, $i=2,3$, $\mu_4(t)=\mu_0(t)t^\beta$, $\mu_0(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$.

Тоді задача (1.1)–(1.4) *не може мати більше одного розв'язку* $(\tilde h(t)$, $\tilde a(t), u(x,t))$, *який належить до класу* $C^1(0,T)\cap C[0,T]\times C[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Доведення теорем 4.1 і 4.2 відрізняються тільки оцінкою виразу $\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}}v_{2_{yy}}(y,\sigma)$. Зафіксуємо деяке $\gamma\in(0,1)$ і оцінимо вираз

$$\left|\int\limits_0^\sigma d\tau\int\limits_0^\tau G_{yy}^{**}(y,\sigma,\eta,\tau)\frac{\nu_2'(\tau)-\nu_1'(\tau)}{\tau}\eta\,d\eta\right|$$

$$\leq C_{38}\int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\gamma(\theta_2(\sigma)-\theta_2(\tau))^{1-\gamma/2}}, \quad (4.14)$$

враховуючи при цьому, що з умови **(A6)** випливає

$$\nu_i'(\sigma) = \frac{1}{\beta}\mu_i'(\sigma^{1/\beta})\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} = \frac{1}{\beta}\lambda_i(\sigma^{1/\beta}), \quad i = 1, 2.$$

Тоді з (4.12) і (4.14) маємо

$$|v_{2yy}(y,\sigma)| \le C_{39} \int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\gamma(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\gamma/2}}$$
$$\le C_{40} \int\limits_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^\gamma(\sigma^{1/\beta} - \tau^{1/\beta})^{1-\gamma/2}} \le C_{41}\sigma^{1-\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma}{2\beta}-\gamma}.$$

Використовуючи отриману нерівність, знаходимо оцінку

$$|\sigma^{\frac{1-\beta}{\beta}} v_{2_{yy}}(y,\sigma)| \le C_{42}\sigma^{\frac{\gamma}{2\beta}-\gamma},$$

і доведення теореми 4.2 завершується аналогічно до доведення теореми 4.1. □

Література

[1] L. Lorenzi, *An identification problem for a one-phase Stefan problem* // J. Inv. Ill-Posed Problems, **9** (2001), No. 6, 1–27.

[2] М. І. Іванчов, *Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності* // Укр. мат. журн., **55** (2003), No. 7, 901–910.

[3] І. Баранська, *Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею* // Мат. методи та фіз.-мех. поля,**48** (2005), No. 2, 32–42.

[4] І. Баранська, М. Іванчов, *Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння в області з вільною межею* // Укр. мат. вісник, **4** (2007), No. 4, 467–484.

[5] V. Isakov, *On inverse problems in secondary oil recovery* // Euro. Jounal of Applied Mathematics, **19** (2008), 459–478.

[6] M. Ivanchov, N. Saldina, *An inverse problem for strongly degenerate heat equation* // J. Inv. Ill-Posed Problems, **14** (2006, No. 5, 465–480.

[7] М. Іванчов, Н. Салдіна, *Обернена задача для параболічного рівняння із сильним степеневим виродженням* // Укр. мат. журн., **58** (2006), No. 11, 1487–1500.

[8] M. Ivanchov, A. Lorenzi, N. Saldina, *Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in a Banach space* // J. Inv. Ill-Posed Problems, **16** (2008), No. 4, 397–415.

[9] Н. Гринців, *Обернена задача для параболічного рівняння із сильним степеневим виродженням в області з вільною межею* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., (2007), вип. 64, 84–97.

[10] М. І. Іванчов, *Задача теплопровідності з вільною межею, яка вироджується у початковий момент часу* // Мат. методи та фіз.-мех. поля, **50** (2007), No. 3, 82–87.

[11] M. Ivanchov, *Inverse problem for equation of parabolic type*, Math. Studies: Monogr. Ser. Vol. 10, Lviv: VNTL Publ., 2003, 240 p.

[12] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Москва: Мир, 1968, 428 с.

[13] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 736 с.

[14] Г. А. Снітко, *Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею* // Мат. методи та фіз.-мех. поля, **50** (2007), No. 4, 7–18.

Відомості про авторів

Микола Іванович Іванчов, Тетяна Савіцька

Львівський національний університет
імені Івана Франка
вул. Університетська, 1
79001 Львів
Україна
E-Mail: ivanchov@franko.lviv.ua