

О прямом доказательстве теоремы Пуанкаре об инвариантных торах

АЛЕКСАНДР В. БЕЛЯЕВ

(Представлена А. М. Самойленко)

Аннотация. Представлено прямое доказательство теоремы Пуанкаре об инвариантных торах.

2010 MSC. 70H08.

Ключевые слова и фразы. КАМ-теория, инвариантные торы, квазипериодические функции, ряды Линдштедта.

Введение

Одним из интригующих вопросов гамильтоновых систем является вопрос существования инвариантных торов при малом возмущении интегрируемой системы. Впервые этот вопрос был рассмотрен Пуанкаре [1], причем формулировался он как задача о представлении решений возмущенной вполне интегрируемой гамильтоновой системы в виде рядов, члены которых квазипериодичны (периодичны) по времени и являются степенными рядами по параметру возмущения (ряды Линдштедта). При этом было доказано, что существуют ряды Линдштедта, которые формально удовлетворяют уравнениям возмущенной гамильтоновой системы, причем доказательство было получено из “общих соображений” ([1, п. 127]) методом формального решения уравнения Гамильтона – Якоби, поскольку “непосредственное доказательство ... нелегко” (там же).

Далее ([1, п. 148]) Пуанкаре рассматривает возможность сходимости рядов Линдштедта и приходит к выводу, что эти ряды, вообще говоря, не сходятся во всех случаях, кроме случая, когда квазипериоды рядов Линдштедта не зависят от параметра возмущения. И в этом случае он допускает возможность сходимости рядов, если начальные условия таковы, что невозмущенный тор имеет несоизмеримые частоты и выполнены еще некоторые условия (например, для

Статья поступила в редакцию 11.05.2011

двух степеней свободы “отношение частот иррационально, а квадрат его, напротив, рационален”). Впрочем, Пуанкаре полагает, что “такой случай маловероятен” (там же).

В 1954 г. Колмогоров анонсирует теорему [2], полное доказательство которой затем публикует Арнольд [3] (1965), о существовании инвариантных торов возмущенной гамильтоновой системы. Доказательство этой теоремы не использует рядов Линдштедта, что дает дополнительные основания считать эти ряды весьма “плохими” с точки зрения доказательства их сходимости для данной задачи. Тем не менее Мозер [4] (1967) рассматривает задачу, используя прямые методы построения рядов, описывающих квазипериодические движения, а в 1988 г. Эльяссон публикует в препринте [5] полное доказательство сходимости рядов Линдштедта возмущенной гамильтоновой системы. Основываясь на идее Эльяссона, в 1994 году Черчия и Фальколини [7], а в 1995 году Галлавотти и Джентиле [6] публикуют свои варианты доказательства.

Из последующих работ отметим работы [8–10], причем, этот список можно расширить.

Известно, что теорема Колмогорова–Арнольда–Мозера не позволяет получить даже приближенно частный интеграл, задающий инвариантный тор с заданными частотами в исходных координатах. К сожалению, доказательство сходимости соответствующих рядов Линдштедта не улучшает ситуацию принципиально, так как сходимость этих рядов очень плохая. Поэтому устройство возмущенной интегрируемой гамильтоновой системы остается во многом непонятным. Это есть причина, по которой мы пытаемся получить результаты, дополняющие названные выше, а именно, мы предлагаем прямое доказательство существования формального решения возмущенной задачи для гамильтониана общего вида.

Заметим, что в работах [4–10] рассматриваются гамильтонианы специального вида с тем, чтобы делать по возможности простым доказательство сходимости рядов Линдштедта. Нас же интересует возмущение гамильтониана общего вида, но при этом вопроса сходимости мы пока не касаемся.

1. О теореме Пуанкаре об инвариантных торах

Мы рассматриваем возмущение вполне интегрируемой консервативной гамильтоновой системы. Это значит, что невозмущенная гамильтонова система задается гамильтонианом $H(x)$ на симплектическом многообразии M^{2n} (с невырожденной скобкой Пуассона) имеет

вид

$$\dot{x} = \text{sgrad } H(x) = (\{x_1, H(x)\}, \dots, \{x_{2n}, H(x)\}),$$

и обладает набором n функционально независимых первых интегралов J_1, \dots, J_n , находящихся в инволюции, то есть удовлетворяющих условиям

$$\{J_k, H\} = \{J_k, J_l\} = 0, \quad k, l = 1, \dots, n$$

и задающих компактные инвариантные поверхности как поверхности уровня интегралов. Согласно теореме Лиувилля–Арнольда [11] почти все поверхности уровня первых интегралов являются n -мерными торами, на которых гамильтонова система задает условно-периодическую обмотку.

Более того, на фазовом пространстве можно ввести новые координаты, называемые каноническими координатами “действие-угол”, в которых гамильтонова структура с помощью скобки Пуассона задается следующим образом:

$$\{F(I, \varphi), G(I, \varphi)\} = \frac{\partial F}{\partial I} \frac{\partial G}{\partial \varphi} - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial I},$$

здесь $I \in \mathbb{R}^n$ — координаты действия, $\varphi \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ — угловые координаты. Гамильтониан в этих координатах имеет вид $H(I)$, и, следовательно, гамильтонова система имеет максимально простой вид:

$$\begin{cases} \dot{I} = 0, \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \alpha. \end{cases} \quad (1.1)$$

Решение системы (1.1) очевидно: $I(t) = I(0)$, $\varphi(t) = \alpha t + \varphi(0)$. Естественно, что рассматривать возмущение интегрируемой задачи удобнее всего именно в координатах “действие-угол”.

Итак, мы рассматриваем однопараметрическое семейство гамильтоновых систем с гамильтонианом

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi),$$

где функции H_0, H_1 аналитичны, $I = I(I_1, \dots, I_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ — координаты “действие-угол”,

$$\begin{cases} \dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}, \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}. \end{cases} \quad (1.2)$$

При нулевом значении параметра возмущения ε система (1.2) вполне интегрируема: $I(t) = I_0$, $\varphi(t) = \varphi_0 + \alpha t$, где $\alpha = \frac{\partial H_0}{\partial I}|_{I=I_0}$.

Далее мы применяем метод Пуанкаре [1] малого параметра. Введем обозначения:

$$I_n = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} I \Big|_{\varepsilon=0}, \quad \varphi_n = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} \varphi \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Для нахождения $I_1(t)$, $\varphi_1(t)$ имеем систему:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi}, \\ \dot{\varphi}_1 = \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_1 + \frac{\partial H_1}{\partial I}. \end{cases} \quad (1.3)$$

здесь и далее в аналогичных ситуациях мы подразумеваем, что аргументы I , φ в правой части (1.3) равны I_0 , αt , соответственно.

Система (1.3) легко решается:

$$I(t) = I_1(0) - \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} d\tau,$$

$$\varphi(t) = \varphi_1(0) - \int_0^t \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_1 + \frac{\partial H_1}{\partial I} \right) d\tau,$$

причем функция $I_1(t)$ будет квазипериодической, если отношение частот $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ достаточно плохо аппроксимируется рациональными числами.

В самом деле, m -периодическая функция от $2m$ переменных $H_1(I, \varphi)$, будучи к тому же аналитической, разлагается в ряд Фурье

$$H_1(I, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} h_k(I) e^{i(k, \varphi)}.$$

Ряд Фурье функции $\frac{\partial H_1}{\partial \varphi}$ из правой части (1.3) будет равен

$$\frac{\partial H_1}{\partial \varphi}(I_0, \alpha t) = i \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} h_k(I) e^{i(k, \alpha)t} k, \quad (1.4)$$

а первообразная от нее

$$\int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} d\tau = h_0(I) + \sum_{k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \frac{h_k(I)}{(k, \alpha)} e^{i(k, \alpha)t} k, \quad (1.5)$$

Ряд в правой части (1.5), вообще говоря, не суммируется, из-за знаменателей (k, α) , которые могут быть сколь угодно малыми, даже

если частоты $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ несоизмеримы. Но, как известно из теории диофантовых приближений [11], для большинства α малые знаменатели (k, α) допускают оценку снизу вида $(k, \alpha) \geq K|k|^{-(n+1)}$. Эта оценка позволяет доказать сходимость рядов (1.4) и (1.5). Наконец, благодаря дифференцированию по φ , в правой части (1.4) нет константы, поэтому первообразная в (1.5) не имеет слагаемого с t , то есть является квазипериодической.

Функцию $\varphi(t)$ можно выбрать квазипериодической, если среднее значение квазипериодической функции $\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_1 + \frac{\partial H_1}{\partial I}$ равно нулю. Здесь мы используем невырожденность оператора $\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}$, благодаря чему всегда можно выбрать значение $I_1(0)$ так, чтобы все подынтегральное выражение в представлении $\varphi(t)$ имело нулевое среднее.

Итак, на первом шаге можно специальным образом выбрать $I_1(0)$ и произвольным образом $\varphi_1(0)$ так, что первое приближение возмущенного решения будет задавать тор с такими же периодами, что и у невозмущенного решения.

Теперь мы можем сформулировать проблему, связанную с возмущением интегрируемой гамильтоновой системы: все ли функции $\dot{I}_n(t)$ имеют нулевое среднее и сходятся ли полученные ряды по ε

$$I_\varepsilon(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(t)\varepsilon^n}{n!}, \quad \varphi_\varepsilon(t) = \varphi_0 + \alpha t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(t)\varepsilon^n}{n!}.$$

В принципе обе проблемы решены, но непрямыми методами. Как уже было отмечено, вопрос формального существования ряда решен Пуанкаре ([1, п. 127]) методом формального решения уравнения Гамильтона–Якоби. Другая часть проблемы решена Колмогоровым и Арнольдом ([2,3]), а именно, доказана сходимость замен, приводящих к системе вида (1.1) в некоторых новых координатах.

Естественно, такие результаты стали сильным продвижением в решении проблемы о сохраняющихся торах, но все же не прекращался поиск прямых доказательств в КАМ-теории (Колмогорова–Арнольда–Мозера).

Новое прямое доказательство теоремы Колмогорова–Арнольда представил Эльяссон [5]. Его доказательство касалось возмущения гамильтониана не самого общего вида:

$$H = \langle \omega, y \rangle + \frac{1}{2} \langle Qy, y \rangle + \varepsilon h(x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in \mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n,$$

где $\det Q \neq 0$, с фиксированными диофантовыми частотами ω . Эльяссон показал, что получающиеся в рассматриваемой им задаче ряды

Линдштедта не являются абсолютно сходящимися, но сходятся условно. Это-то и было причиной всех проблем, связанных с прямыми доказательствами теоремы. Метод доказательства содержал очень тщательное слежение за коэффициентами всех рассматриваемых рядов. При этом надо помнить, что в ходе вычислений тригонометрические ряды и дифференцируются, и интегрируются, и умножаются друг на друга.

Ввиду сложности представленного доказательства далее последовали доказательства Галлавогги и Джентиле [6], Черчия и Фальколини [7], в которых авторы пытались сделать имеющееся доказательство более ясным. Отметим, что гамильтонианы в их работах отличались от гамильтониана [5], и имели вид ([6]):

$$\frac{1}{2}J^{-1}A \cdot A + \varepsilon f(\alpha),$$

где J — диагональный оператор инерции, $A = (A_1, \dots, A_l) \in \mathbb{R}^l$ — угловые моменты, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in T^l$ — углы, описывающие положение системы, и

$$\frac{1}{2}y \cdot y + \varepsilon f(x)$$

([7]), заданный в координатах “действие-угол”.

Итак, несмотря на очень серьезные результаты, проблема прямого доказательства теоремы Колмогорова–Арнольда остается актуальной.

Далее мы предлагаем прямое доказательство существования формального решения возмущенной задачи для гамильтониана общего вида.

Теорема 1.1. Пусть возмущенная гамильтонова система задается гамильтонианом

$$H(I, \varphi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi),$$

где функции H_0, H_1 аналитичны в окрестности тора, $I = I(I_1, \dots, I_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ — координаты “действие-угол”,

Пусть на торе $I = I_0$ выполнено соотношение

$$(\alpha, k) > \frac{\beta}{|k|^\gamma}, \quad k \in \mathbb{Z}^m, \quad \beta, \gamma > 0, \quad \alpha = \frac{\partial H_0}{\partial I} \Big|_{I=I_0}, \quad (1.6)$$

а также невырожден оператор $\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}$, тогда существуют формальные ряды по ε

$$I_\varepsilon(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(t)\varepsilon^n}{n!}, \quad \varphi_\varepsilon(t) = \varphi_0 + \alpha t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(t)\varepsilon^n}{n!}, \quad (1.7)$$

задающие решение возмущенной гамильтоновой системы $s\text{grad } H$, причем все функции $I_n(t), \varphi_n(t)$ квазипериодичны и их явный вид может быть представлен в квадратурах.

2. Доказательство теоремы Пуанкаре об инвариантных торах

Доказательство. Для нахождения ряда (1.7) мы дифференцируем по ε систему (1.2).

Выясним сначала, чему равны I_n, φ_n .

$$\begin{cases} \dot{I}_n = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} \left(-\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} \right)_{\varepsilon=0} = -n \frac{d^{n-1}}{d\varepsilon^{n-1}} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} \right)_{\varepsilon=0}, \\ \dot{\varphi}_n = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} \left(\frac{\partial H_0}{\partial I} I_1 + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} \right)_{\varepsilon=0} \\ = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} \left(\frac{\partial H_0}{\partial I} \right)_{\varepsilon=0} + n \frac{d^{n-1}}{d\varepsilon^{n-1}} \left(\frac{\partial H_1}{\partial I} \right)_{\varepsilon=0}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Для удобства в выкладках введем формальный оператор дифференцирования \mathbf{D}

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(F(I, \varphi, I_1, \varphi_1, I_2, \varphi_2, \dots)) \\ = \frac{\partial F}{\partial I} I_1 + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \varphi_1 + \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial I_k} I_{k+1} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \varphi_{k+1} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_n = -n \mathbf{D}^{n-1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} \right), \\ \dot{\varphi}_n = n \mathbf{D}^{n-1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial I} \right) + \mathbf{D}^n \left(\frac{\partial H_0}{\partial I} \right). \end{cases} \quad (2.3)$$

Для $n = 1$ система (2.3) есть (1.3), для $n = 2$ — примет вид:

$$\begin{cases} \dot{I}_2 = -2 \left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial I \partial \varphi} I_1 + \frac{\partial^2 H_1}{\partial^2 \varphi} \varphi_1 \right), \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{\partial^3 H_0}{\partial I^3} I_1^2 + \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_2 + 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial^2 I} I_1 + 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial I \partial \varphi} \varphi_1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Как и система (1.3) система (2.4) легко интегрируется. Покажем, что функция I_2 квазипериодична.

Вначале заметим, что квазипериодические функции I_1, φ_1 определяют функции $\tilde{I}_1, \tilde{\varphi}_1$, заданные на торе $I = I_0$ такие, что $I_1 = \tilde{I}_1(\alpha t)$, $\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1(\alpha t)$. Именно, если $\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} h_k(I) e^{i(k, \alpha)t}$, то $\sum_{k \in \mathbb{Z}^m} h_k(I) e^{i(k, \varphi)}$, и тогда на производные $\dot{I}_1, \dot{\varphi}_1$ в левой части (2.4) можно смотреть

как на производные по направлению векторного поля $sgrad H_0$; кроме того, имеют смысл частные производные $\frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \varphi}$. Для простоты в записях далее мы опускаем тильду в $\tilde{I}_1, \tilde{\varphi}_1$, поскольку это не приводит к недоразумению.

В таком случае первое уравнение системы (2.4) может быть записано в виде:

$$\dot{I}_2 = \left(\frac{\partial I_1}{\partial \varphi} \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} I_1 \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial H_1}{\partial I} I_1 + \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} \varphi_1 \right),$$

откуда видно, что функция \dot{I}_2 имеет нулевое среднее.

Далее необходимо показать, что аналогичное представление можно получить для всех функций \dot{I}_n . Мы покажем, что искомое представление имеет вид:

$$\dot{I}_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k E_n^k - \frac{\partial}{\partial \varphi} (n \mathbf{D}^{n-1} H_1 + G_n), \quad (2.5)$$

где

$$E_n^k = \sum_{p=1}^m \left((\dot{\varphi}_{n-k})_p \frac{\partial (I_k)_p}{\partial \varphi} - (\dot{I}_{n-k})_p \frac{\partial (\varphi_k)_p}{\partial \varphi} \right),$$

$$G_2 = \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_1^2, \quad G_{n+1} = \mathbf{D} G_n + \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_1 I_n.$$

Этого достаточно, поскольку $E_n^k + E_n^{n-k}$ имеет нулевое среднее. Для упрощения записей далее E_n^k будем записывать в виде

$$E_n^k = \dot{\varphi}_{n-k} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} - \dot{I}_{n-k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi}.$$

$$\begin{aligned} E_n^k + E_n^{n-k} &= \dot{\varphi}_{n-k} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} - \dot{I}_{n-k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi} + \dot{\varphi}_k \frac{\partial I_{n-k}}{\partial \varphi} - \dot{I}_k \frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\dot{\varphi}_{n-k} I_k - \dot{I}_{n-k} \varphi_k) + \left(\varphi_k \frac{\partial I_{n-k}}{\partial \varphi} - I_k \frac{\partial \varphi_{n-k}}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

При $n = 2$ истинность (2.5) проверяется непосредственно.

Индукционный шаг разобьем на 2 этапа. Поскольку при вычислении \dot{I}_n функции H_0 и H_1 только дифференцируются, но не перемножаются, то сначала докажем формулу (2.5) по модулю H_0 , а затем по модулю H_1 .

Итак, предполагаем, что (12) верно и доказываем, что верно

$$\dot{I}_{n+1} = \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k E_{n+1}^k - \frac{\partial}{\partial \varphi} ((n+1) \mathbf{D}^n H_1 + G_{n+1}). \quad (2.6)$$

Применим оператор \mathbf{D} к левой и правой частям (2.5), учитывая, что по определению \mathbf{D}

$$\mathbf{D}I_n = I_{n+1}, \quad \mathbf{D}\varphi_n = \varphi_{n+1},$$

и согласно (10)

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\dot{I}_n &= \frac{n}{n+1} \dot{I}_{n+1}, \\ \mathbf{D}\dot{\varphi}_n &= \frac{n}{n+1} \dot{\varphi}_{n+1} \pmod{H_0}. \end{aligned}$$

Мы получим

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} \dot{I}_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \mathbf{D} \left(\dot{\varphi}_{n-k} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} - \dot{I}_{n-k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi} \right) \\ &\quad - \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial \varphi} (n\mathbf{D}^{n-1}H_1 + G_n). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Как видим, для вычисления (2.7) надо находить результат действия оператора \mathbf{D} на функции вида $\frac{\partial I_k}{\partial \varphi}, \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi}$. Учитывая, что правой части \dot{I}_2 таких слагаемых нет (в представлении (2.5) такие слагаемые взаимно уничтожаются), положим

$$\mathbf{D} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} = \frac{\partial I_{k+1}}{\partial \varphi}, \quad \mathbf{D} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial \varphi}.$$

С учетом сказанного, имеем по модулю H_0

$$\frac{n}{n+1} \dot{I}_{n+1} + \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial \varphi} (n\mathbf{D}^{n-1}H_1) = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \left(\frac{n-k}{n+1-k} E_{n+1}^k + E_{n+1}^{k+1} \right).$$

В сумме полученного представления изменим индексы суммирования

$$\begin{aligned} &\frac{n}{n+1} \dot{I}_{n+1} + \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial \varphi} (n\mathbf{D}^{n-1}H_1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \frac{n-k}{n+1-k} E_{n+1}^k + \sum_{k=2}^n C_n^{k-1} E_{n+1}^k \\ &= (n-1)E_{n+1}^1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(C_n^k \frac{n-k}{n+1-k} + C_n^{k-1} \right) E_{n+1}^k + nE_{n+1}^n \\ &= (n-1)E_{n+1}^1 + \frac{n}{n+1} \sum_{k=2}^{n-1} C_{n+1}^k E_{n+1}^k + nE_{n+1}^n \\ &= \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k E_{n+1}^k - E_{n+1}^1 \end{aligned}$$

и в результате получаем

$$\dot{I}_{n+1} = \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k E_{n+1}^k - \frac{n+1}{n} E_{n+1}^1 - \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial \varphi} ((n+1) \mathbf{D}^{n-1} H_1).$$

Сравнивая полученное соотношение с (2.6), видим, что по модулю H_0 остается доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} ((n+1) \mathbf{D}^n H_1) = \frac{n+1}{n} E_{n+1}^1 + \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial \varphi} ((n+1) \mathbf{D}^{n-1} H_1)$$

или

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}, \mathbf{D} \right] (\mathbf{D}^{n-1} H_1) - \frac{1}{n} E_{n+1}^1 = 0. \quad (2.8)$$

Простая проверка показывает, что если функция F состоит из слагаемых вида $\frac{\partial^{\alpha+\beta} H_1}{\partial I^\alpha \partial \varphi^\beta} I_1^{s_1} \dots \varphi_1^{t_1} \dots$, то

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}, \mathbf{D} \right] F = \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} \mathbf{P}_1 F + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} \mathbf{P}_2 F, \quad (2.9)$$

где

$$\mathbf{P}_1 \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} H_1}{\partial I^\alpha \partial \varphi^\beta} I_1^{s_1} \dots \varphi_1^{t_1} \dots \right) = \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} H_1}{\partial I^{\alpha+1} \partial \varphi^\beta} I_1^{s_1} \dots \varphi_1^{t_1} \dots,$$

$$\mathbf{P}_2 \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} H_1}{\partial I^\alpha \partial \varphi^\beta} I_1^{s_1} \dots \varphi_1^{t_1} \dots \right) = \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} H_1}{\partial I^\alpha \partial \varphi^{\beta+1}} I_1^{s_1} \dots \varphi_1^{t_1} \dots$$

Кроме того, очевидно, что $[\mathbf{D}, \mathbf{P}_i] = 0$, для $i = 1, 2$.

Применим теперь полученные результаты к левой части (2.8), мы получим по модулю H_0 , что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} \mathbf{P}_1 (\mathbf{D}^{n-1} H_1) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} \mathbf{P}_2 (\mathbf{D}^{n-1} H_1) - \frac{1}{n} \left(\dot{\varphi}_n \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} - \dot{I}_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} (\mathbf{P}_1 (\mathbf{D}^{n-1} H_1) - \mathbf{D}^{n-1} \dot{\varphi}_1) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} (\mathbf{P}_2 (\mathbf{D}^{n-1} H_1) + \mathbf{D}^{n-1} \dot{I}_1) \\ &= \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} \mathbf{D}^{n-1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial I} - \dot{\varphi}_1 \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} \mathbf{D}^{n-1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} + \dot{I}_1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Теперь докажем, что из (2.5) следует (2.6) по модулю H_1 .

Мы имеем согласно определению \mathbf{D}

$$\mathbf{D} I_n = I_{n+1}, \quad \mathbf{D} \varphi_n = \varphi_{n+1},$$

и согласно (2.3)

$$\begin{aligned} \dot{I}_n &= 0 \pmod{H_1}, \\ \mathbf{D}\dot{\varphi}_n &= \varphi_n \pmod{H_1}. \end{aligned}$$

Итак, мы должны доказать, что из

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \dot{\varphi}_{n-k} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} - \frac{\partial G_n}{\partial \varphi} = 0 \pmod{H_1}$$

следует

$$\sum_{k=1}^n C_{n+1}^k \dot{\varphi}_{n+1-k} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} - \frac{\partial G_{n+1}}{\partial \varphi} \pmod{H_1} = 0. \quad (2.10)$$

Применим оператор \mathbf{D} к (2.9):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \left(\mathbf{D}(\dot{\varphi}_{n-k}) \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} + \dot{\varphi}_{n-k} \mathbf{D} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} \right) - \mathbf{D} \frac{\partial G_n}{\partial \varphi} &= 0 \pmod{H_1}, \\ \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \left(\dot{\varphi}_{n+1-k} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} + \dot{\varphi}_{n-k} \frac{\partial I_{k+1}}{\partial \varphi} \right) - \mathbf{D} \frac{\partial G_n}{\partial \varphi} &= 0 \pmod{H_1}, \\ \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \dot{\varphi}_{n+1-k} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} + \sum_{k=2}^n C_n^{k-1} \dot{\varphi}_{n+1-k} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} - \mathbf{D} \frac{\partial G_n}{\partial \varphi} &= 0 \pmod{H_1}, \\ -\dot{\varphi}_n \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k \dot{\varphi}_{n+1-k} \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} - \dot{\varphi}_1 \frac{\partial I_n}{\partial \varphi} - \mathbf{D} \frac{\partial G_n}{\partial \varphi} &= 0 \pmod{H_1}, \end{aligned}$$

и, сравнивая полученный результат с (2.10), видим, что необходимо доказать, что

$$\frac{\partial G_{n+1}}{\partial \varphi} = \dot{\varphi}_n \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} + \dot{\varphi}_1 \frac{\partial I_n}{\partial \varphi} + \mathbf{D} \frac{\partial G_n}{\partial \varphi} \pmod{H_1}.$$

Учитывая (2.5), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\mathbf{D}G_n + \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_1 I_n \right) &= \dot{\varphi}_n \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} + \dot{\varphi}_1 \frac{\partial I_n}{\partial \varphi} + \mathbf{D} \frac{\partial G_n}{\partial \varphi} \pmod{H_1}, \\ \left[\frac{\partial}{\partial \varphi}, \mathbf{D} \right] G_n + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_1 I_n - \dot{\varphi}_n \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} - \dot{\varphi}_1 \frac{\partial I_n}{\partial \varphi} &= 0 \pmod{H_1}, \end{aligned}$$

Подставим значение $\dot{\varphi}_1 \pmod{H_1}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}, \mathbf{D} \right] G_n + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_1 I_n - \dot{\varphi}_n \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_1 \frac{\partial I_n}{\partial \varphi} = 0 \pmod{H_1},$$

Коммутатор операторов $[\frac{\partial}{\partial \varphi}, \mathbf{D}]$ по модулю H_1 имеет вид $[\frac{\partial}{\partial \varphi}, \mathbf{D}]F = \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} \mathbf{P}_1 F$, поэтому

$$\left(\mathbf{P}_1 G_n + \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_n - \dot{\varphi}_n \right) \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} = 0 \pmod{H_1}.$$

То, что полученное в скобках выражение равно нулю, докажем по индукции. При $n = 2$ оно, очевидно, выполняется (см. (1.3), (2.5) и (2.9)).

Далее в силу определения \mathbf{D} и свойств \mathbf{P}_1 имеем

$$\mathbf{D} \left(\mathbf{P}_1 G_n + \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_n - \dot{\varphi}_n \right) = 0 \pmod{H_1},$$

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{D} G_n + \frac{\partial^3 H_0}{\partial I^3} I_1 I_n + \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_{n+1} - \dot{\varphi}_{n+1} = 0 \pmod{H_1},$$

$$\mathbf{P}_1 \left(\mathbf{D} G_n + \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_1 I_n \right) + \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_{n+1} - \dot{\varphi}_{n+1} = 0 \pmod{H_1},$$

$$\mathbf{P}_1 G_{n+1} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} I_{n+1} - \dot{\varphi}_{n+1} = 0 \pmod{H_1}.$$

Что и требовалось доказать. \square

Литература

- [1] А. Пуанкаре, *Новые методы небесной механики. Избранные труды. Т. 1*, Наука, Москва, 1971.
- [2] А. Н. Колмогоров, *О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона* // Доклады АН СССР, **98** (1954), No. 4, 527–530.
- [3] В. И. Арнольд, *Малые знаменатели II. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона* // Успехи матем. наук, **18** (1965), No. 5, 13–40.
- [4] Ю. Мозер, *О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды* // Успехи матем. наук, **24** (1969), No. 2, 165–211.
- [5] L. H. Eliasson, *Absolutely convergent series for quasi-periodic motions*, Report 2-88, Department of Mathematics, University of Stockholm, (1988), Preprint of University of Stockholm.
- [6] G. Gallavotti, G. Gentile, *Majorant series convergence for twistless KAM tori* // Ergod. Th. and Dynam. Sys, **15** (1995), 857–869.
- [7] L. Chierchia, C. Falcolini, *A direct proof of a theorem by Kolmogorov in hamiltonian systems* // Annali della Scuola Normale Superiore di Piza, **21** (1995), No. 4, 541–593.

- [8] À. Jorba, R. de la Llave, M. Zou, *Lindstedt series for lower-dimensional tori, "Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom"*, (S'Agaro, 1995), 151–167, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 533, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1999).
- [9] M. V. Bartuccelli, G. Gentile, *Lindstedt series for perturbations of isochronous systems: a review of the general theory* // Rev. Math. Phys., **14** (2002), No. 2, 121–171.
- [10] M. V. Bartuccelli, G. Gentile, K. V. Georgiou, *KAM theory, Lindstedt series and the stability of the upside-down pendulum* // Discrete and continuous dynamical systes, **9** (2003), No. 2, 413–426.
- [11] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва, 1989.
- [12] В. И. Левитан, В. В. Жиков, *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения*, МГУ, Москва, 1978.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Александр
Владимирович
Беляев**

Донецкий государственный
университет управления
ул. Челюскинцев, 163А
83015 Донецк
Украина
E-Mail: nika@vnet.dn.ua