Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 1, 144 – 153

Аппроксимация функций с нулевыми интегралами по шарам линейными комбинациями собственных функций оператора Лапласа

Даниил А. Зарайский

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Доказано, что специальные линейные комбинации бесселевых функций плотны в C^∞-топологии в пространстве функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса в произвольной открытой области $U \subset \mathbb{R}^n$. Получены обобщения этого результата для решений некоторых уравнений свёртки вида $f * T = 0$, T — радиально. Рассмотрены аналогичные результаты для симметрических пространств ранга 1 некомпактного типа.

2010 MSC. 33C05, 33C10, 33C55, 33C80, 35P10, 42A65, 42A75, 42A85, 42C30, 43A45, 43A85, 43A90.

Ключевые слова и фразы. Уравнения свёртки, симметрические пространства ранга один, собственные функции оператора Лапласа, обобщённые сферические функции, приближение.

1. Введение

Пусть B_R — открытый шар радиуса R в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат, $B_{R_1,R_2} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon R_1 < |x| < R_2\}$, $\overline{B}_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| \leqslant R\}$; (ρ, σ) — полярные координаты в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\rho(x) = |x|$, $\sigma(x) = x/|x|$. Обозначим $\mathcal{D}'(U)$ — пространство распределений на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, снабжённое $*$-слабой топологией, $\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ — пространство радиальных (т.е. инвариантных относительно вращений) распределений на $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями. Для $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ пусть $r(T)$ — радиус наименьшего замкнутого шара $\overline{B}_r(0)$, $r \geqslant 0$, содержащего $\operatorname{supp} T$. Для открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ положим $\mathcal{D}'_T(U) = \{f \in \mathcal{D}'(U) \colon f * T = 0$ на $U_{r(T)}\}$, $C^\infty_T(U) = \{f \in$

Статья поступила в редакцию 3.11.2010

$C^\infty(U)\colon f*T=0$ на $U_{r(T)}\}$, где $U_r=\{x\in U\colon \overline{B}_r(x)\subset U\}$ (очевидно, U_r открыто), $f*g$ — свёртка f и g; область определения $f*T$ содержит $U_{r(T)}$, но не обязательно совпадает с ним. Если $T=\chi_{B_r}$ — индикатор шара, обозначим $C_T^\infty(U)$ через $V_r^\infty(U)$; тогда $V_r^\infty(U)$ будет множеством функций из $C^\infty(U)$ с нулевыми интегралами по замкнутым шарам радиуса r, лежащим в U.

Пусть $\{Y_j^{(k)}(\sigma)\}_{j=1}^{d_k}$ — некоторый ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_k$ сферических гармоник степени k на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, см., например, [1, § 1.5.1]. Следуя [1], обозначим при $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, $\eta\in\mathbb{Z}_+$

$$\Phi_{z,\eta,k,j}(x)=\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{\eta}\frac{J_{n/2+k-1}(z\rho)}{(z\rho)^{n/2-1}}Y_j^{(k)}(\sigma),$$
$$\Psi_{z,\eta,k,j}(x)=\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{\eta}\frac{N_{n/2+k-1}(z\rho)}{(z\rho)^{n/2-1}}Y_j^{(k)}(\sigma),$$

где J_λ, N_λ — функции Бесселя первого и второго рода, [2], и при $\eta\in\mathbb{Z}_+$

$$\Phi_{0,\eta,k,j}(x)=\rho^{k+2\eta}Y_j^{(k)}(\sigma),$$

$$\Psi_{0,\eta,k,j}(x)=\begin{cases}\rho^{2\eta-n-k+2}Y_j^{(k)}(\sigma), & \text{если } n \text{ нечётно или}\\ & 2\eta<2k+n-2,\\ \big(\rho^{2\eta-n-k+2}\ln\rho\big)Y_j^{(k)}(\sigma), & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда $(\Delta+\lambda^2)^{\eta+1}\Phi_{\lambda,\eta,k,j}=0$ на $\mathbb{R}^n$, и $(\Delta+\lambda^2)^{\eta+1}\Psi_{\lambda,\eta,k,j}=0$ на $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, см. [1], Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$.

Сферическое преобразование распределения $T\in\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством $\widetilde{T}(z)=\hat{T}(z\mathbf{e})=\big\langle T,e^{-iz(\cdot,\mathbf{e})}\big\rangle$, $\hat{T}$ — преобразование Фурье–Лапласа T, $\mathbf{e}$ — единичный вектор в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $n_\lambda(\widetilde{T})$ — кратность нуля λ функции $\widetilde{T}$, и

$$n(\lambda,T)=n_\lambda(\widetilde{T})-1\quad\text{при } \lambda\neq 0,\ n(0,T)=n_0(\widetilde{T})/2-1. \tag{1.1}$$

Пусть $\mathcal{Z}(u)$ — множество нулей функции u, лежащих в $[0,+\infty)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Im}\lambda>0\}$. Обозначим, следуя [1], $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ — класс распределений $T\in\mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$, $T\neq 0$, таких, что для $\lambda\in\mathcal{Z}(\widetilde{T})$ выполнены неравенства

$$|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant\gamma_1\ln(2+|\lambda|),\quad |\widetilde{T}^{(n_\lambda(\widetilde{T}))}(\lambda)|\geqslant(2+|\lambda|)^{n_\lambda(\widetilde{T})-\gamma_2} \tag{1.2}$$

с положительными константами γ_1,γ_2, не зависящими от λ. Класс $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ содержится в классе обратимых распределений, то есть любое распределение $T\in\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ имеет фундаментальное решение E, $E*T=$

δ_0, δ_0 — дельта-функция Дирака. Класс $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ достаточно широк [1, § 3.2.1], он содержит, в частности, индикатор шара χ_{B_r}.

Если $T \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant \infty$, $R_2 - R_1 > r(T)$, $f \in C^\infty(B_{R_1,R_2})$, и $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_k} f_{k,j}(\rho)Y_j^{(k)}(\sigma)$ — ряд Фурье по сферическим гармоникам функции f, то f принадлежит $C_T^\infty(B_{R_1,R_2})$ тогда и только тогда [1, теорема. 3.2.6], когда

$$f_{k,j}(\rho)Y_j^{(k)}(\sigma) = \sum_{\lambda\in\mathcal{Z}(\widetilde{T})}\sum_{\eta=0}^{n(\lambda,T)} \left(\alpha_{\lambda,\eta,k,j}\Phi_{\lambda,\eta,k,j} + \beta_{\lambda,\eta,k,j}\Psi_{\lambda,\eta,k,j}\right), \quad (1.3)$$

и аналогичное утверждение имеет место для функций на B_R, $R > r(T)$, где в разложении (1.3) присутствуют только члены с $\Phi_{\lambda,\eta,k,j}$ [1, теорема. 3.2.3]. Таким образом, при $T \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$ для семейств

$$\Phi_T = \{\Phi_{\lambda,\eta,k,j}\}, \quad \Psi_T = \{\Psi_{\lambda,\eta,k,j}\},$$

где λ пробегает множество $\mathcal{Z}(\widetilde{T})$, $\eta = 0,\dots,n(\lambda,T)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1,\dots,d_k$, имеем:

$$\Phi_T \subset C_T^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{span}_{C^\infty(B_R)}\Phi_T = C_T^\infty(B_R), \quad \forall\, R > r(T), \quad (1.4)$$

$$\Psi_T \subset C_T^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}), \quad \operatorname{span}_{C^\infty(B_{\varepsilon,\infty})}(\Phi_T\cup\Psi_T) = C_T^\infty(B_{\varepsilon,\infty}),\ \forall\,\varepsilon > 0, \quad (1.5)$$

через $\operatorname{span}_{C^\infty(U)}$ обозначена замкнутая линейная оболочка в $C^\infty(U)$.

Если U выпукло, то из аппроксимационной теоремы Хёрмандера–Мальгранжа [3, теорема 16.4.1] следует, что $\operatorname{span}_{C^\infty(U)}\Phi_T = C_T^\infty(U)$, см. [1, § 2.4]. В связи с этим в [1] для случая, когда $T = \chi_{B_r}$ — индикатор шара, поставлены следующие вопросы:

1. Для каких областей $U \subset \mathbb{R}^n$ множество линейных комбинаций функций

   $$\Phi_{1,0,k,l}(\nu_m x/r), \quad k\in\mathbb{Z}_+,\ l = 1,\dots,d_k,\ m\in\mathbb{N}, \quad (1.6)$$

   где ν_m, $m \in \mathbb{N}$, — положительные корни $J_{n/2}$, плотно в $V_r^\infty(U)$ в C^∞-топологии?

2. Пусть $r > 0$, $R_2 - 2r > R_1 > 0$, $\nu > 0$ — ноль функции $J_{n/2}$. Верно ли тогда, что функция $N_{(n-2)/2}(\nu|x|/r)$ является пределом в $C^\infty(B_{R_1,R_2})$ последовательности линейных комбинаций функций (1.6)?

3. Для каких областей $U \subset \mathbb{R}^n$ множество линейных комбинаций функций

$$\begin{gathered} c_1\Phi_{1,0,k,l}(\nu_m x/r) + c_2\Psi_{1,0,k,l}(\nu_m(x-h)/r), \\ k \in \mathbb{Z}_+,\ l = 1,\dots,d_k,\quad m \in \mathbb{N},\quad c_1, c_2 \in \mathbb{C},\quad h \in \mathbb{R}^n \setminus U, \end{gathered} \tag{1.7}$$

плотно в $V_r^\infty(U)$ в C^∞-топологии?

По теореме 2.1 настоящей работы (см. ниже) линейные комбинации функций (1.7) плотны в $V_r^\infty(U)$ для произвольной области U. Если дополнение U связно, то также и линейные комбинации функций вида (1.6) плотны в $V_r^\infty(U)$. Теорема 2.2 даёт примеры областей U, для которых линейные комбинации функций (1.6) не плотны в $V_r^\infty(U)$, и отрицательный ответ на второй вопрос.

Доказательства теорем 2.1, 3.1 аналогичны доказательству теоремы Рунге для эллиптического дифференциального оператора с постоянными коэффициентами [3, теорема 4.4.5], при этом вместо теоремы единственности для вещественно-аналитических функций мы используем теорему единственности для решений уравнения свёртки вида $f * T = 0$, $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$, [1, теорема 3.2.1] (либо, соответственно, вида $f \times T = 0$, $T \in \mathcal{E}'_\natural(X)$, для случая симметрического пространства). Как и в случае теоремы Рунге [3, замечание к теореме 4.4.5], для уравнения свёртки с радиальным обратимым распределением можно доказать обратное утверждение (теоремы 2.2, 3.3).

2. Случай евклидова пространства

Для $a \in \mathbb{R}^n$ положим $\tau_a f = f(\cdot - a)$, $\Psi_{T,a} = \tau_a \Psi_T = \{f(\cdot - a)\colon f \in \Psi_T\}$. Имеет место следующий результат:

Теорема 2.1. *Пусть $T \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$, $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $A \subset \mathbb{R}^n \setminus U$ — множество, пересекающееся с каждой ограниченной компонентой связности $\mathbb{R}^n \setminus U$. Тогда*

$$\operatorname{span}_{C^\infty(U)}\Big(\Phi_T \cup \bigcup_{a\in A} \Psi_{T,a}\Big) = C_T^\infty(U),$$

то есть линейные комбинации функций $\Psi_{\lambda,\eta,k,j}(\cdot - a)$ и $\Phi_{\lambda,\eta,k,j}(\cdot)$, $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, $0 \leqslant \eta \leqslant n(\lambda, T)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant j \leqslant d_k$, $a \in A$, плотны в множестве $C_T^\infty(U)$ в топологии пространства $C^\infty(U)$.

Заметим, что теорема 2.1 остаётся в силе для любых семейств Φ_T, Ψ_T, удовлетворяющих (1.4), (1.5), и распределения $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$, имеющего фундаментальное решение.

Теорема 2.2. *Пусть $T \in \mathcal{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$, $T \neq 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, V — объединение U и некоторого семейства ограниченных компонент связности множества $\mathbb{R}^n \setminus U_{r(T)}$ (очевидно, V — открыто). Тогда:*

(i) Если T имеет фундаментальное решение E, $E * T = \delta_0$, и $f \in \mathcal{D}'(U)$ аппроксимируется в $*$-слабой топологии пространства $\mathcal{D}'(U)$ распределениями из $\mathcal{D}'_T(V)$, то и само f продолжается до распределения из $\mathcal{D}'_T(V)$, причём единственным образом.

(ii) Если $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, Ψ_λ — решение уравнения $(\Delta + \lambda^2)^{n(\lambda,T)+1} f = 0$ на U, не продолжающееся до решения этого уравнения на V, то Ψ_λ не лежит в замкнутой линейной оболочке в $\mathcal{D}'(U)$ ограничений на U функций из $\mathcal{D}'_T(V)$ и решений уравнений $(\Delta + \mu^2)^{n(\mu,T)+1} f = 0$ на U, $\mu \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}) \setminus \{\lambda\}$.

Мы опустим доказательства теорем 2.1 и 2.2, получающиеся из доказательств теорем 3.1, 3.3 ниже очевидным изменением обозначений.

3. Случай некомпактного симметрического пространства ранга один

В этом параграфе $X = G/K$ — симметрическое пространство некомпактного типа ранга один, $o = eK \in X$ — отмеченная точка. Пусть $\mathcal{E}'_\natural(X)$ — пространство инвариантных относительно K распределений на X с компактными носителями. Для открытого множества $U \subset X$ обозначим $f \times T$ свёртку распределений $f \in \mathcal{D}'(U)$ и $T \in \mathcal{E}'_\natural(X)$, $\mathcal{D}'_T(U)$ — множество $f \in \mathcal{D}'(U)$ таких, что $f \times T = 0$ на $U_{r(T)}$, где $r(T)$ и U_r определяются так же, как и в евклидовом случае, $C^\infty_T(U) = \mathcal{D}'_T(U) \cap C^\infty(U)$. Пусть $G = KAN$ — разложение Ивасавы, M — централизатор A в K, $\hat{K}_M$ — множество представлений δ группы K таких, что существует инвариантный относительно группы $M \subset K$ ненулевой вектор. Множество $\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$ комплексных линейных функционалов на алгебре Ли $\mathfrak{a}$ группы A посредством формы Киллинга стандартным образом отождествляется с $\mathbb{C}$, пусть $\rho \in \mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$ — полусумма положительных корней с учётом кратности [4, Гл. I]. При $T \in \mathcal{E}'_\natural(X)$ обозначим через $\widetilde{T}(\lambda)$ — сферическое преобразование распределения T, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$, [4, Гл. IV]. Аналогично евклидову случаю, пусть $\mathfrak{N}(X)$ — множество распределений $T \in \mathcal{E}'_\natural(X)$, $T \neq 0$, для которых выполнено (1.2), и $n(\lambda, T)$ определим формулой (1.1). При $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{Z}_+$, $\delta \in \hat{K}_M$, $j = 1, \ldots, d(\delta)$ можно определить функции $\Phi_{\lambda,\eta,\delta,j} \in C^\infty(X)$, $\Psi_{\lambda,\eta,\delta,j} \in C^\infty(X \setminus \{o\})$ такие, что при $T \in \mathfrak{N}(X)$ для семейств $\Phi_T = \{\Phi_{\lambda,\eta,\delta,j}\}$, $\Psi_T = \{\Psi_{\lambda,\eta,\delta,j}\}$, где λ пробегает множество $\mathcal{Z}(\widetilde{T})$, $0 \leqslant \eta \leqslant n(\lambda, T)$, $\delta \in \hat{K}_M$, $1 \leqslant j \leqslant d(\delta)$, выполнены следующие аналоги соотношений (1.4), (1.5), см. [5, Chap. 10]:

$$\Phi_T \subset C_T^\infty(X), \quad \mathrm{span}_{C^\infty(B_R)} \Phi_T = C_T^\infty(B_R), \ \forall R > r(T), \tag{3.1}$$

$$\Psi_T \subset C_T^\infty(X \setminus \{o\}), \quad \mathrm{span}_{C^\infty(B_{\varepsilon,\infty})}(\Phi_T \cup \Psi_T) = C_T^\infty(B_{\varepsilon,\infty}), \ \forall \varepsilon > 0. \tag{3.2}$$

Для $a \in G$ положим $\tau_a f = f(a^{-1}\,\cdot)$, $\Psi_{T,a} = \tau_a \Psi_T = \{f(a^{-1}\,\cdot) \colon f \in \Psi_T\}$.

Теорема 3.1. *Пусть $T \in \mathfrak{N}(X)$, $U \subset X$ открыто, $A \subset G$ — множество такое, что $A \cdot o \subset X \setminus U$, и $A \cdot o$ пересекается с каждой компактной компонентой связности множества $X \setminus U$. Тогда*

$$\mathrm{span}_{C^\infty(U)}\left(\Phi_T \cup \bigcup_{a\in A} \Psi_{T,a}\right) = C_T^\infty(U).$$

Доказательство. Положим $r = r(T)$. Нам потребуется далее следующая теорема единственности, см. [5, Th. 15.1]:

Теорема 3.2. *Если $f \in \mathcal{D}'_T(B_R(x))$, и $f = 0$ на $B_{r+\varepsilon}(x)$ для некоторого $0 < \varepsilon < R - r$, то $f = 0$ на $B_R(x)$.*

Поскольку T на протяжении доказательства фиксировано, обозначим, Φ_T и Ψ_T (либо любые другие семейства функций, удовлетворяющие (3.1), (3.2)) просто через Φ и Ψ, обозначим также $\Phi_a = \tau_a \Phi$, $\Psi_a = \tau_a \Psi$. Выберем некоторое $E \in \mathcal{D}'_\natural(X)$, $E \times T = \delta_o$.

Возьмём произвольное $w \in \mathcal{E}'(U) \subset \mathcal{E}'(X)$, ортогональное Φ и Ψ_a, $a \in A$. Положим $v = w \times E$, тогда $w = v \times T$. Зафиксируем $R, \varepsilon > 0$,

$$0 < \varepsilon < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\, w, X \setminus U), \tag{3.3}$$

$$\mathrm{supp}\, w \subset B_R, R > 0. \tag{3.4}$$

Покажем теперь, что распределение v обладает следующими свойствами:

(i) $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon/2}(a \cdot o)$, $\forall\, a \in A$;

(ii) $v = 0$ на $B_{R,\infty}$;

(iii) Если $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon/2}(s)$, $s \in X \setminus U$, то $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon}(s)$.

(i) Пусть $\psi \in C_\natural^\infty(X)$ — произвольная функция, такая что

$$\mathrm{supp}\, \psi \subset B_{\varepsilon/2}. \tag{3.5}$$

Для произвольного $x \in B_{r+\varepsilon/2}(a \cdot o) = a \cdot B_{r+\varepsilon/2}$ имеем:

$$x = ag \cdot o \quad \text{для некоторого } g \in G, g \cdot o \in B_{r+\varepsilon/2}, \tag{3.6}$$

$$(v \times \psi)(x) = (w \times E \times \psi)(ag \cdot o) = \langle w, \tau_{ag} E \times \psi \rangle = \langle w, \tau_a \tau_g E \times \psi \rangle. \tag{3.7}$$

Но $(\tau_g E \times \psi) \times T = \tau_g E \times T \times \psi = \tau_g \psi$. В силу (3.5), (3.6), $\operatorname{supp} \tau_g \psi = g \cdot \operatorname{supp} \psi \subset g \cdot B_{\varepsilon/2} = B_{\varepsilon/2}(g \cdot o) \subset B_{r+\varepsilon}$. Значит,

$$\tau_g E \times \psi \in C_T^\infty(B_{\varepsilon,\infty}) = \operatorname{span}_{C^\infty(B_{\varepsilon,\infty})} \Phi \cup \Psi,$$

$$\tau_a \tau_g E \times \psi \in \operatorname{span}_{C^\infty(B_{\varepsilon,\infty}(a \cdot o))} \Phi_a \cup \Psi_a = \operatorname{span}_{C^\infty(B_{\varepsilon,\infty}(a \cdot o))} \Phi \cup \Psi_a.$$

Поскольку $a \cdot o \in X \setminus U$, то из (3.3) следует, что $w \in \mathcal{E}'(B_{\varepsilon,\infty}(a \cdot o))$, и, так как w ортогонально Φ и Ψ_a, по непрерывности имеем $\langle w, \tau_a \tau_g E \times \psi \rangle = 0$. В силу (3.6), (3.7), теперь $v \times \psi = 0$ на $B_{r+\varepsilon/2}(a \cdot o)$. Устремляя ψ, удовлетворяющее (3.5), к δ_o, видим, что $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon/2}(a \cdot o)$.

(ii) Пусть функция $\psi \in C_\natural^\infty(X)$, $\operatorname{supp} \psi \subset B_r$, — произвольна. Для $x = g \cdot o \in B_{R,\infty}$ имеем: $(v \times \psi)(x) = \langle w, \tau_g E \times \psi \rangle$. Но $(\tau_g E \times \psi) \times T = \tau_g \psi$, $\operatorname{supp} \tau_g \psi \subset g \cdot B_r = B_r(x) \subset \{y \in X\colon \operatorname{dist}(y, o) > R - r\}$, значит $\tau_g E \times \psi \in C_T^\infty(B_R) = \operatorname{span}_{C^\infty(B_R)} \Phi$. Согласно (3.4), $w \in \mathcal{E}'(B_R)$, и, значит, как и в предыдущем рассуждении, $v \times \psi = 0$ на $B_{R,\infty}$. Поэтому и $v = 0$ на $B_{R,\infty}$, в силу произвольности ψ.

(iii) Из (3.3) получаем, что $v \times T = w = 0$ на $B_\varepsilon(s)$. Значит $v \in \mathcal{D}'_T(B_{r+\varepsilon}(s))$, и, если $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon/2}(s)$, то, по теореме 3.2, $v = 0$ на $B_{r+\varepsilon}(s)$.

Рассмотрим теперь множество $\{s \in X \setminus U\colon v = 0 \text{ на } B_{r+\varepsilon}(s)\}$. Вместе с каждым $s_0 \in X \setminus U$ оно содержит все $s \in X \setminus U$, $\operatorname{dist}(s_0, s) < \varepsilon/2$, по свойству (iii). Поэтому оно является как открытым, так и замкнутым в $X \setminus U$. Кроме того, согласно (i) и (ii), указанное множество содержит $A \cdot o$ и $B_{R+r+\varepsilon} \cap (X \setminus U)$. Таким образом, оно содержит как все ограниченные, так и все неограниченные компоненты $X \setminus U$, то есть совпадает с $X \setminus U$. Итак, $v = 0$ на $\bigcup_{s \in X \setminus U} B_{r+\varepsilon}(s)$, то есть $\operatorname{supp} v \subset \{x \in X\colon \operatorname{dist}(x, X \setminus U) \geq r + \varepsilon\} \subset U_r$. Так как $\operatorname{supp} v \subset \overline{B}_r$ (свойство (ii)), то $v \in \mathcal{E}'(U_r)$.

Теперь для любой $f \in C_T^\infty(U)$ имеем:

$$\langle w, f \rangle = \langle v \times T, f \rangle = \langle v, f \times T \rangle = 0,$$

так как $f \times T = 0$ на U_r и $\operatorname{supp} v \subset U_r$. Поэтому, по теореме Хана–Банаха, $C_T^\infty(U) \subset \operatorname{span}_{C^\infty(U)} \Phi \cup \bigcup_{a \in A} \Psi_a$.

Обратное включение очевидно: $\Phi \subset C_T^\infty(X)$, $\Psi_a \subset C_T^\infty(X \setminus \{a \cdot o\})$, значит $\Phi|_U, \Psi_a|_U \subset C_T^\infty(U)$. $\square$

Теорема 3.3. *Пусть* $T \in \mathcal{E}'_\natural(X)$, $T \neq 0$, $U \subset X$ *открыто,* V *— объединение* U *и некоторого семейства компактных компонент связности множества* $X \setminus U_{r(T)}$. *Тогда:*

(*i*) *Если* T *обладает фундаментальным решением* $E \in \mathcal{D}'(X)$, $E \times T = \delta_o$, *и* $f \in \mathcal{D}'(U)$ *аппроксимируется в* $*$*-слабой топологии* $\mathcal{D}'(U)$ *распределениями из* $\mathcal{D}'_T(V)$, *то и само* f *единственным образом продолжается до распределения из* $\mathcal{D}'_T(V)$.

(*ii*) *Пусть* L *— оператор Лапласа–Бельтрами на* X. *Если* $\lambda \in \mathcal{Z}(\widetilde{T})$, Ψ_λ *— решение уравнения* $(L + |\rho|^2 + \lambda^2)^{n(\lambda,T)+1} f = 0$ *на* U, *не продолжающееся до его решения на* V, *то* Ψ_λ *не лежит в замкнутой линейной оболочке в* $\mathcal{D}'(U)$ *ограничений на* U *функций из* $\mathcal{D}'_T(V)$ *и решений уравнений* $(L + |\rho|^2 + \mu^2)^{n(\mu,T)+1} f = 0$ *на* U, $\mu \in \mathcal{Z}(\widetilde{T}) \setminus \{\lambda\}$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.1, положим $r = r(T)$.

(*i*) Если $x, y \in X \backslash U$ принадлежат различным компонентам связности $X \backslash U_r$, то, в силу связности шара в X, $\overline{B}_r(x)$ и $\overline{B}_r(y)$ не пересекаются, и $\operatorname{dist}(x, y) > 2r$. $X \backslash U_r = \bigcup_{x \in X \backslash U} \overline{B}_r(x)$. Если S — компонента связности $X \backslash U_r$, то $S = \bigcup_{x \in S \backslash U} \overline{B}_r(x)$ (в частности, $S \backslash U$ непусто) и $U \cup S = U \cup \bigcup_{x \in S \backslash U} B_r(x)$ — открыто, поэтому V — открыто; очевидно также, что S и $S \backslash U$ замкнуты. Кроме того, $V_r = U_r \cup \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$, поскольку $x \in V_r$ тогда и только тогда, когда $\overline{B}_r(x) \subset U \cup \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S = U \cup \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} (S \backslash U)$, то есть, когда либо $x \in U_r$, либо $\overline{B}_r(x) \cap \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} (S \backslash U) \neq \varnothing$ и $x \in \bigcup_{x \in S \backslash U} \overline{B}_r(x) = S$ для некоторого $S \in \mathfrak{S}$.

Пусть $S \in \mathfrak{S}$, $0 < 4\varepsilon \leq \operatorname{dist}(S \backslash U, (X \backslash U) \backslash S) - 2r$. Выберем $\eta \in \mathcal{D}(X)$, равную 1 на $\{x \colon \operatorname{dist}(x, S \backslash U) \leq r + 2\varepsilon\}$ и 0 на $\{x \colon \operatorname{dist}(x, S \backslash U) \geq r + 3\varepsilon\}$ и $f_\varepsilon \in \mathcal{D}'(U \cup S)$, равное f на $\{x \in U \colon \operatorname{dist}(x, S \backslash U) > \varepsilon\}$. Тогда $\operatorname{supp} f_\varepsilon \times T \subset \{x \colon \operatorname{dist}(x, S \backslash U) \leq r + \varepsilon\} = \{x \colon \operatorname{dist}(x, S) \leq \varepsilon\}$, поскольку $f \in \mathcal{D}'_T(U)$. Пусть $F_\varepsilon \in \mathcal{E}'(X)$ — образ $f_\varepsilon \times T$ при естественном вложении $\mathcal{E}'((U \cup S)_r)$ в $\mathcal{E}'(X)$.

Если $h \in C^\infty(X)$, $h \times T = 0$ в окрестности $\overline{B}_\varepsilon(S \backslash U)$, то $\eta h \in \mathcal{D}((U \cup S)_r)$, $\operatorname{supp}(\eta h) \times T \subset \{x \colon \varepsilon < \operatorname{dist}(x, S \backslash U) \leq 2r + 3\varepsilon\}$, тогда

$$\langle F_\varepsilon, h \rangle = \langle F_\varepsilon, \eta h \rangle = \langle f_\varepsilon \times T, \eta h \rangle = \langle f_\varepsilon, (\eta h) \times T \rangle = \langle f, (\eta h) \times T \rangle = 0,$$

последнее равенство получается по непрерывности из условия теоремы, поскольку $(\eta h) \times T \in \mathcal{D}(U)$ и $\langle u, (\eta h) \times T \rangle = \langle u \times T, \eta h \rangle = 0$ при $u \in \mathcal{D}'_T(V)$. Поэтому при $\psi \in \mathcal{E}_\natural(X)$ имеем: $(F_\varepsilon \times E \times \psi)(x) = \langle F_\varepsilon \times E \times \psi, \delta_x \rangle = \langle F_\varepsilon, \delta_x \times E \times \psi \rangle = 0$, если $\operatorname{dist}(x, S \backslash U) > \varepsilon + r(\psi)$, так как в этом случае $\delta_x \times E \times \psi \times T = 0$ в окрестности $\overline{B}_\varepsilon(S\backslash U)$. Устремляя ψ к δ_o а $r(\psi)$ к 0, получаем:

$$\operatorname{supp} F_\varepsilon \times E \subset \{x\colon\ \operatorname{dist}(x, S\backslash U) \leq \varepsilon\}.$$

Положим

$$g_{S,\varepsilon} = f_\varepsilon - F_\varepsilon \times E \in \mathcal{D}'_T(U \cup S).$$

Тогда $g_{S,\varepsilon} = f$ на $\{x \in U\colon\ \operatorname{dist}(x, S \setminus U) > \varepsilon\}$. Но $g = g_{S,\varepsilon}$ не зависит от ε. Действительно, если $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, то $g_{S,\varepsilon} \times T = g_{S,\varepsilon'} \times T = 0$ на $\bigcup_{x\in S} B_{4\varepsilon}(x) = \{x\colon\ \operatorname{dist}(x, S \setminus U) < r + 4\varepsilon\} \subset (U \cup S)_r$. И $g_{S,\varepsilon'} = g_{S,\varepsilon}$ на $B_{r+\varepsilon}(x_0)$ для $x_0 \in X$, таких что $\operatorname{dist}(x_0, S \setminus U) = r + 2\varepsilon$. Поскольку $\bigcup_{x\in S} B_{4\varepsilon}(x)$ связно, применяя теорему 3.2, получаем $g_{S,\varepsilon'} = g_{S,\varepsilon}$. Поэтому существует и по теореме 3.2 единственно $g_S \in \mathcal{D}'_T(U \cup S)$, равное f на U.

Первое утверждение теоремы следует теперь из свойств локальности распределений: поскольку g_S и $g_{S'}$, $S, S' \in \mathfrak{S}$, совпадают на пересечении их областей определения, существует $g \in \mathcal{D}'(V)$, равное g_S на $U \cup S$ при $S \in \mathfrak{S}$. Так как $(g \times T)|_{U_r \cup S} = (g_S \times T)|_{(U\cup S)_r} = 0$, то $g \times T = 0$ на $V_r = \bigcup_{S\in\mathfrak{S}}(U_r \cup S)$ (мы не рассматриваем тривиальный случай $\mathfrak{S} = \varnothing$). Распределение $g \in \mathcal{D}'_T(V)$, равное f на U, единственно, поскольку на $U \cup S$ оно совпадает с g_S.

(ii) Предположим противное. Существует [5, Chap. 10.9] такое распределение $T_\lambda \in \mathcal{E}'_\natural(X)$, $r(T_\lambda) = r(T)$, что

$$f \times T_\lambda = 0 \text{ на } U_r,$$

если $(L + \rho^2 + \mu^2)^{n(\mu,T)+1} f = 0$ на U, для некоторого $\mu \in \mathcal{Z}_T \backslash \{\lambda\}$, и

$$f \times T_\lambda = f \text{ на } U_r,$$

если $(L + \rho^2 + \lambda^2)^{n(\lambda,T)+1} f = 0$ на U. Отображение $f \mapsto f \times T_\lambda$ из $\mathcal{D}'(U)$ в $\mathcal{D}'(U_r)$ непрерывно в $*$-слабой топологии пространства $\mathcal{D}'$, и Ψ_λ аппроксимируется в $\mathcal{D}'(U_r)$ решениями уравнения $(L + \rho^2 + \lambda^2)^{n(\lambda,T)+1} f = 0$ на $V_r = U_r \cup \bigcup_{S\in\mathfrak{S}} S$. Поэтому Ψ_λ продолжается до решения уравнения $(L + \rho^2 + \lambda^2)^{n(\lambda,T)+1} f = 0$ на V_r (аналогичный факт для евклидова пространства вытекает из утверждения, обратного к теореме Рунге для эллиптического дифференциального оператора с постоянными коэффициентами [3, замечание к теореме 4.4.5], в случае симметрического пространства мы можем применить уже доказанное утверждение (i) настоящей теоремы к распределению $T = (L + \rho^2 + \lambda^2)^{n(\lambda,T)+1}\delta_o$). Поскольку $V_r \cup U = V$, приходим к противоречию. $\square$

Литература

[1] V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Том 1, Наука, 1973; Том 2, Наука, 1974.

[3] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, Том 1, Мир, 1986; Том 2, Мир, 1986.

[4] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, 1987.

[5] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*, Springer, 2009.

Сведения об авторах

Даниил Анатольевич Зарайский

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 74,
Донецк, 83114
Украина
E-Mail: `d.zaraisky@gmail.com`