Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 1, 17 – 54

УМВ

Задача Стефана

Михаил А. Бородин

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. В этой работе мы доказываем существование глобального классического решения в многомерной двухфазной задаче Стефана. Задача сводится к квазилинейному параболическому уравнению с разрывными коэффициентами в фиксированной области. Затем при помощи малого параметра ε сглаживаются коэффициенты и исследуется полученное приближенное решение. Создан аналитический аппарат, позволяющий получить равномерные оценки приближенного решения на сечениях $t = \text{const}$. После этого, учитывая равномерные оценки, совершен предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Предел приближенного решения является классическим решением задачи Стефана, причем свободная граница есть поверхность класса $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}$.

2010 MSC. 35R35, 35K20.

Ключевые слова и фразы. Задача со свободной границей, глобальное решение, задача Стефана.

1. Постановка задачи

Задача Стефана в классической постановке представляет собой математическую модель процесса распространения тепла в среде, находящейся в различных фазовых состояниях, например, жидком и твердом. В результате плавления или кристаллизации области, занятые жидкой и твердой фазами, будут изменяться. Поэтому будет изменяться поверхность, разделяющая эти фазы. Эта неизвестная поверхность называется свободной границей. Процесс распространения тепла в каждой из фаз описывается уравнением теплопроводности.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, граница которой состоит из двух $C^{2+\alpha}$ поверхностей ∂D_1 и ∂D_2 таких, что ∂D_1 лежит внутри ∂D_2. Пусть среда, находящаяся в двух фазовых состояниях, заполняет область D, $u(x,t)$ — температура среды. Температура кристаллизации, то есть температура перехода из жидкого состояния в

Статья поступила в редакцию 5.11.2010

ISSN 1810 – 3200.

твердое, равна единице. Требуется найти функцию $u(x,t)$ в области $D_T = D \times (0,T)$, где $T > 0$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\Delta u - a(u)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{в } \Omega_T \cup G_T, \tag{1.1}$$

$$\Omega_T = \{(x,t) \in D_T : 0 < u(x,t) < 1\},$$
$$G_T = \{(x,t) \in D_T : u(x,t) > 1\},$$

где $a(u)$ — кусочно-постоянная функция, равная $a_1 > 0$ в Ω_T и $a_2 > 0$ в G_T .

На известной границе области D_T заданы условия

$$\begin{gathered} u(x,t) = 0 \quad \text{на } \partial D_1 \times [0,T), \\ u(x,t) = \varphi(x,t) > 1 \quad \text{на } \partial D_2 \times [0,T). \end{gathered} \tag{1.2}$$

На свободной (неизвестной) поверхности $\gamma_T = D_T \cap \partial\Omega_T = D_T \cap \partial G_T$ законы сохранения массы и энергии приводят к двум условиям: условию равенства температуры $u(x,t)$ температуре плавления и условию Стефана, которое учитывает выделение тепла за счет скрытой теплоты плавления

$$u^-(x,t) = u^+(x,t) = 1, \quad \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial u^-}{\partial x_i} - \frac{\partial u^+}{\partial x_i}\Big)\cos(n,x_i) + \lambda\cos(n,t) = 0, \tag{1.3}$$

где $u^-(x,t), u^+(x,t)$ обозначают граничные значения функции $u(x,t)$ на γ_T, взятые соответственно со стороны областей Ω_T, G_T, n — нормаль к поверхности Ω_T, G_T,направленная в сторону возрастания функции $u(x,t)$, λ — коэффициент скрытой теплоты плавления.

Начальные условия

$$\begin{gathered} u(x,0) = \psi(x) > 0 \text{ в } D, \\ \psi(x)\Big|_{\partial D_1} = 0, \quad \psi(x)\Big|_{\partial D_2} = \varphi(x,0) > 1, \\ \Omega_0 = \{x \in D : 0 < \psi(x) < 1\}, \quad G_0 = \{x \in D : \psi(x) > 1\}, \\ \gamma_0 = D \cap \partial\Omega_0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Многомерная задача Стефана изучалась многими авторами. Начало изучению многомерной задачи было положено в работах О. А. Олейник [1] и С. А. Каменомосткой [2]. Впервые была использована концепция обобщенного решения, что позволило доказать теорему существования и единственности слабого решения. Класс функций, в котором решение задачи Стефана единственно, шире класса функций, которому принадлежит обобщенное решение. Так как каждое классическое решение является и обобщенным, то вопрос о единственности решения задачи Стефана был полностью решен. Вопрос о существовании классического решения остался открытым.

В 1973 году Г. Дюво [3] свел задачу Стефана к некоторому вариационному неравенству, для которого доказал существование слабого решения. В 1975 году А. Фридман и Д. Киндерлерер [4], используя преобразование Дюво, свели однофазную многомерную задачу Стефана к вариационному неравенству, а затем доказали липшицевость свободной границы. Однако этой гладкости было недостаточно для доказательства классичности решения. В эти же годы в работах Л. Каффарелли [5–7] был получен ряд фундаментальных результатов по исследованию гладкости свободных границ. Используя результаты Л. Каффарелли, в 1978 году Д. Киндерлереру и Л. Ниренбергу [8] удалось доказать существование классического решения в однофазной задаче. В 1979 году А. М. Мейерманов [9] доказал существование классического решения в двухфазной задаче Стефана в малом по времени. В 1982 году М. А. Бородин [10] доказал существование глобального решения в двухфазной задаче, причем была установлена липшицевость свободной границы. Затем в восьмидесятые годы разными методами была доказана классическая разрешимость в малом по времени в работах Е. И. Ханзавы [11], Б. В. Базалия [12], Е. В. Радкевича [13]. Липшицева непрерывность свободной границы в двухфазной задаче доказана Р. Ночетто в [14]. В 1996 году Дж. Атанасопоулос, Л. Кафарелли и С. Салза в работе [15] показали, что вязкое решение с липшицевой свободной границей и, при так называемом условии невырожденности, является классическим. Свободная граница является при этом поверхностью класса C^1 в пространстве и во времени. Заметим еще, что задача Стефана с учетом кривизны свободной границы изучалась в [16–18], а с учетом конвекции в [19].

Более подробный обзор по рассматриваемой проблеме можно найти в [20, 21].

В 1999 году в работе автора [22] было доказано существование глобального классического решения в многомерной задаче Стефана, причем свободная граница являлась поверхностью класса $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}$. Достаточным условием для этого наряду с обычными требованиями гладкости, было требование знакоопределенности величины $\Delta\psi(x)$, где $\psi(x)$ обозначает начальное распределение. Это требование приводит к монотонности процесса, описываемого решением задачи Стефана, то есть либо происходит процесс кристаллизации, либо процесс плавления. Очевидно, что это требование достаточно обременительно.

В настоящей работе такого рода ограничение снято и заменено на более естественное, а именно $\nabla\psi(x) \neq 0$. Нарушение этого условия, как показано в [9], приводит к несуществованию классического решения.

Наш главный результат состоит в следующей теореме

Теорема 1.1. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, граница которой состоит из двух $C^{2+\alpha}$ поверхностей ∂D_1 и ∂D_2 таких, что ∂D_1 лежит внутри ∂D_2, $D_T = D \times (0,T)$,*

$$\psi(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{D}), \quad \varphi(x,t) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T}),$$

$$\min_{\overline{D}} |\nabla\psi(x)| > 0, \qquad \min_{\partial D_2 \times [0,T]} \varphi(x,t) > 1,$$

выполнены соответствующие условия согласования при $t = 0, x \in \partial D$. Тогда задача (1.1)–(1.4) разрешима и имеет единственное решение

$$u(x,t) \in \Big(H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega_T \setminus \gamma_0}) \times (\overline{G_T \setminus \gamma_0})\Big) \cap C(\overline{D_T}),$$

а свободная граница является поверхностью класса $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}$.

2. Аппроксимация задачи

Предположим, что задача (1.1)–(1.4) имеет классическое решение. Умножим равенство (1.1) на функцию $\eta(x,t) \in C^{2,1}(\overline{D_T}))$, обращающуюся в нуль на $\partial D_1 \times (0,T)$, $\partial D_2 \times (0,T)$, при $t = T$, и проинтегрируем по частям

$$\int\limits_{D_T} \Big(\nabla u(x,t)\nabla\eta(x,t) + a(u)\frac{\partial u}{\partial t}\eta(x,t) + \lambda\chi(u)\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big)\,dx\,dt + \lambda\int\limits_{D} \chi(\psi)\eta(x,0)\,dx = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\chi(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u(x,t) < 1, \\ 0, & \text{если } u(x,t) > 1. \end{cases}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ определим функцию $\chi_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ следующим образом:

$$\chi_\varepsilon(x) = 1\ \forall\, x \le 1, \quad \chi_\varepsilon(x) = 0\ \forall\, x \ge 1+\varepsilon, \quad \chi_\varepsilon'(x) \le 0, \quad \chi_\varepsilon^{(n)}(x) \le \frac{c}{\varepsilon^n},$$

где положительная константа c не зависит от ε. Пусть

$$a_\varepsilon(x) = a_2 + \chi_\varepsilon(x)(a_1 - a_2).$$

При помощи функций $a_\varepsilon(x), \chi_\varepsilon(x)$ сгладим коэффициенты в (2.1) и обозначим теперь через $u^\varepsilon(x,t)$ функцию, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{D_T} \Big(\nabla u^\varepsilon(x,t)\nabla\eta(x,t) + a_\varepsilon(u^\varepsilon)\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t}\eta(x,t) + \lambda\chi_\varepsilon(u^\varepsilon)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\Big)\,dx\,dt$$
$$+\lambda\int\limits_D \chi_\varepsilon(\psi)\eta(x,0)\,dx = 0. \qquad (2.2)$$

Если функция $u^\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет тождеству (2.2) и достаточно гладкая, то она является решением следующей задачи:

$$\Delta u^\varepsilon(x,t) - \{a_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t)) - \lambda\chi'_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t))\}\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t} = 0 \text{ в } D_T, \qquad (2.3)$$

$$u^\varepsilon(x,t) = 0 \text{ на } \partial D_1 \times [0,T], \quad u^\varepsilon(x,t) = \varphi(x,t) \text{ на } \partial D_2 \times [0,T], \quad (2.4)$$

$$u^\varepsilon(x,0) = \psi(x) \text{ в } D. \qquad (2.5)$$

Функцию $u^\varepsilon(x,t)$, являющуюся решением задачи (2.3)–(2.5), назовем приближенным решением задачи (1.1)–(1.4). Наша основная цель состоит в том, чтобы доказать существование приближенного решения и показать, что

$$u(x,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x,t)$$

является решением задачи (1.1)–(1.4).

Так как

$$0 < a_0 = \min(a_1,a_2) \le b_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t)) = a_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t)) - \lambda\chi'_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t)) \le \frac{c}{\varepsilon},$$

где $c > 0$ и не зависит от ε, то, как известно [24], имеет место

Теорема 2.1. *Пусть* $\psi(x) \in H^{r+\alpha}(\overline{D})$, $\varphi(x,t) \in H^{r+\alpha,(r+\alpha)/2}(\overline{D_T})$, $\min_{\partial D_1\times[0T]}\varphi(x,t) > 1$, $0 < \alpha < 1$, $r \ge 2$, *выполнены соответствующие условия согласования при* $t = 0$, $x \in \partial D$. *Тогда задача* (2.3)–(2.5) *разрешима и имеет единственное решение* $u^\varepsilon(x,t) \in H^{r+\alpha,(r+\alpha)/2}(\overline{D_T})$, *причем имеет место оценка*

$$\big\|u^\varepsilon(x,t)\big\|_{H^{r+\alpha,(r+\alpha)/2}(\overline{D_T})} \le \frac{c}{M(\varepsilon)}, \qquad (2.6)$$

где положительная константа c *не зависит от* ε, *а* $M(\varepsilon) \to 0$, *если* $\varepsilon \to 0$.

Представим уравнение (2.3) в виде

$$\Delta u^\varepsilon(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^{u^\varepsilon(x,t)} [a_\varepsilon(\tau) - \lambda\chi'_\varepsilon(\tau)]\, d\tau = 0.$$

Рассечем цилиндр D_T плоскостями $t = k\tau$, где $\tau N = T$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и проинтегрируем по переменной t от $(k-1)\tau$ до $k\tau$.

$$\int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau} \Delta u^\varepsilon(x,\tau)\, d\tau - \int\limits_{u^\varepsilon_{k-1}(x)}^{u^\varepsilon_k(x)} [a_\varepsilon(\tau) - \lambda\chi'_\varepsilon(\tau)]\, d\tau = 0, \tag{2.7}$$

где $u^\varepsilon_k(x) \equiv u^\varepsilon(x, k\tau)$. После очевидных преобразований получим

$$\Delta u^\varepsilon_k(x) - \beta^\varepsilon_k(x)\frac{\partial u^\varepsilon_k(x)}{\partial \bar t} = f^\varepsilon_k(x), \tag{2.8}$$

$$u^\varepsilon_k(x) = 0 \text{ на } \partial D_1, \quad u^\varepsilon_k(x) = \varphi(x, k\tau) > 1 \text{ на } \partial D_2, \quad u^\varepsilon_0(x) = \psi(x) \text{ в } D, \tag{2.9}$$

где

$$\frac{\partial u^\varepsilon_k(x)}{\partial \bar t} = \frac{u^\varepsilon_k(x) - u^\varepsilon_{k-1}(x)}{\tau},$$

$$\beta^\varepsilon_k(x) = \int\limits_0^1 \{a_\varepsilon[u^\varepsilon_{k-1} + \tau(u^\varepsilon_k - u^\varepsilon_{k-1})] - \lambda\chi'_\varepsilon[u^\varepsilon_{k-1} + \tau(u^\varepsilon_k - u^\varepsilon_{k-1})]\}\, d\tau$$

$$= \int\limits_0^1 b_\varepsilon[u^\varepsilon_{k-1}(x) + \tau(u^\varepsilon_k(x) - u^\varepsilon_{k-1}(x)]\, d\tau, \tag{2.10}$$

$$f^\varepsilon_k(x) = \frac{1}{\tau} \int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau} [\Delta u^\varepsilon(x, k\tau) - \Delta u^\varepsilon(x,t)]\, dt. \tag{2.11}$$

Наша ближайшая цель получить равномерные оценки для решений задачи (2.8)–(2.9), то есть оценки для $u^\varepsilon(x,t)$ на сечениях $t = \text{const}$. Для этого мы создадим и изучим интегральные представления, которые будут играть ту же роль, что и интегральные представления типа потенциалов в теории линейных граничных задач для эллиптических уравнений.

3. Интегральное представление приближенного решения и свойства фундаментальных решений

Для изучения свойств приближенного решения нам понадобится интегральное представление. Пусть $K_R(x_0)$ — шар радиуса R с центром в точке x_0, принадлежащий области D. Введем функции

$$\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|) \\ = \frac{-\tau}{a_m 2\pi i}\oint\limits_{\partial L} \frac{\sinh[\sqrt{z}(R-|x-x_0|)]\,dz}{4\pi|x-x_0|\sinh(\sqrt{z}R)(1-\frac{z\tau}{a_m})(1-\frac{z\tau}{a_{m-1}})(1-\frac{z\tau}{a_k})}, \quad (3.1)$$

где $k=1,2,\dots,m$, ∂L — граница области,

$$L = \Big\{ z : \varrho = |z| < \frac{(1+q)\max_{1\le k\le N} a_k}{\tau}, \\ \operatorname{Re} z = b_0 > -\frac{\pi^2}{2R^2},\ |b_0| < \varrho,\ q>0 \Big\}.$$

Так как числитель и знаменатель подынтегральной функции в (3.1) имеет одну и ту же точку ветвления $z=0$, то внутри контура ∂L можно выделить однозначную ветвь аналитической функции.

Обозначим

$$\omega_{m-k+1}(z) = \Big(z-\frac{a_m}{\tau}\Big)\Big(z-\frac{a_{m-1}}{\tau}\Big)\cdots\Big(z-\frac{a_k}{\tau}\Big).$$

Тогда из (3.1) следует

$$\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|) = \frac{i\tau}{2\pi a_m}\oint\limits_{\partial L} \frac{\sinh[\sqrt{z}(R-|x-x_0|)]\omega_{m-k+1}(0)\,dz}{4\pi|x-x_0|\sinh(\sqrt{z}R)\omega_{m-k+1}(z)}. \quad (3.2)$$

Если $a_1=a_2=\dots=a_m=a$, то интеграл (3.1) принимает вид

$$\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|) \\ = (-1)^{m-k}\Big(\frac{a}{\tau}\Big)^{m-k}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial L} \frac{\sinh[\sqrt{z}(R-|x-x_0|)]\,dz}{4\pi|x-x_0|\sinh(\sqrt{z}R)(z-\frac{a}{\tau})^{m-k+1}}.$$

Последний интеграл является интегралом Коши. Поэтому

$$\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|) \\ = (-1)^{m-k}\Big(\frac{a}{\tau}\Big)^{m-k}\frac{1}{(m-k)!}\frac{\partial^{(m-k)}}{\partial z^{(m-k)}}\frac{\sinh[\sqrt{z}(R-|x-x_0|)]}{4\pi|x-x_0|\sinh(\sqrt{z}R)}\Big|_{z=\frac{a}{\tau}}$$

Если $a_1, a_2, \dots, a_m$ различны, то интеграл (3.1) представляет собой разделенную разность соответствующего порядка [25] и может быть вычислен по формуле

$$\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|) = (-1)^{m-k}\Big(\frac{a_{m-1}a_{m-2}\cdots a_k}{\tau^{m-k}}\Big) \\ \times \frac{1}{(m-k)!}\frac{\partial^{(m-k)}}{\partial z^{(m-k)}}\frac{\sinh[\sqrt{z}(R-|x-x_0|)]}{4\pi|x-x_0|\sinh(\sqrt{z}R)}\Bigg|_{z=\frac{a^*}{\tau}}, \quad (3.3)$$

где $\min_{1\le k\le m} a_k < a^* < \max_{1\le k\le m} a_k$.

Отметим некоторые свойства функций $\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)$.

Свойство 3.1. *Пусть* $|x-x_0| \neq 0$, *тогда функции* $\{\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\}$ *удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:*

$$\begin{aligned} &\Delta\Gamma_{m-k+1} - a_k\frac{\Gamma_{m-k+1}-\Gamma_{m-k}}{\tau} = 0, \quad \forall\, k = 1, \dots, (m-1), \\ &\Delta\Gamma_1 - a_m\frac{\Gamma_1}{\tau} = 0, \quad \Gamma_1(|x-x_0|) = \frac{\sinh\sqrt{\frac{a_m}{\tau}}(R-|x-x_0|)}{4\pi|x-x_0|\sinh(\sqrt{\frac{a_m}{\tau}}R)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Доказательство. Пусть $r = |x-x_0|$ — сферический радиус и $r \neq 0$. Из (3.1) следует

$$\begin{aligned} &\frac{d^2[r\Gamma_{m-k+1}(r)]}{dr^2} \\ &\quad = -\frac{\tau}{a_m}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial L}\frac{z\sinh\sqrt{z}(R-r)\,dz}{4\pi\sinh(\sqrt{z}R)(1-\frac{z\tau}{a_m})(1-\frac{z\tau}{a_{m-1}})\cdots(1-\frac{z\tau}{a_k})} \\ &\quad = -\frac{\tau}{a_m}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial L}\frac{\frac{a_k}{\tau}(\frac{z\tau}{a_k}-1+1)\sinh\sqrt{z}(R-r))\,dz}{4\pi\sinh\sqrt{z}R(1-\frac{z\tau}{a_m})(1-\frac{z\tau}{a_{m-1}})\cdots(1-\frac{z\tau}{a_k})} \\ &\qquad = \frac{a_k}{\tau}|x-x_0|\left[\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)-\Gamma_{m-k}(|x-x_0|)\right]. \end{aligned}$$

Если $k = m$, то из (3.2) следует

$$\Gamma_1(|x-x_0|) = -\frac{\tau}{a_m}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial L}\frac{\sinh\sqrt{z}(R-r)\,dz}{4\pi|x-x_0|\sinh(\sqrt{z}R)(1-\frac{z\tau}{a_m})} \\ = \frac{\sinh\sqrt{\frac{a_n}{\tau}}(R-|x-x_0|)}{4\pi|x-x_0|\sinh(\sqrt{\frac{a_m}{\tau}}R)}.$$

□

Свойство 3.2.

$$\int\limits_{K_R(x_0)} \frac{\Gamma_m(|x-x_0|)}{\tau}\,dx \le \int\limits_{K_R(x_0)} \frac{\Gamma_{m-1}(|x-x_0|)}{\tau}\,dx \le \cdots$$
$$\le \int\limits_{K_R(x_0)} \frac{\Gamma_1(|x-x_0|)}{\tau}\,dx = \frac{1}{a_m}\Big(1 - \frac{R\sqrt{\frac{a_m}{\tau}}}{\sinh(\sqrt{\frac{a_m}{\tau}}R)}\Big). \quad (3.5)$$

Доказательство. Если $x \ne x_0$, то

$$\Delta\Gamma_{m-k+1} - a_k \frac{\Gamma_{m-k+1} - \Gamma_{m-k}}{h} = 0, \quad \forall\, k = 1, \dots, (m-1).$$

Кроме того, мы имеем

$$\lim_{|x-x_0|\to 0} 4\pi|x-x_0|\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = m, \\ 0, & \text{если } k \ne m, \end{cases}$$

$$\Gamma_{m-k+1}(R) = 0.$$

Из принципа максимума следует

$$\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|) > 0 \text{ в } K_R(x_0), \quad \frac{\partial\Gamma_{m-k+1}}{\partial n} \le 0 \text{ на } \partial K_R(x_0).$$

Следовательно, $\forall\, k < m$

$$\int\limits_{K_R(x_0)} a_k \frac{\Gamma_{m-k+1} - \Gamma_{m-k}}{h} = \int\limits_{K_R(x_0)} \Delta\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx \le 0.$$

□

Свойство 3.3. *Пусть $K_\delta(x_0)$ обозначает шар с центром в точке x_0 и радиуса δ. Тогда*

$$\lim_{\delta\to 0} \oint\limits_{\partial K_\delta(x_0} \frac{\partial\Gamma_{m-k+1}}{\partial n}\,ds = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \ne m, \end{cases} \quad (3.6)$$

где n — внутренняя нормаль.

Доказательство. Действительно, если $k < m$, тогда

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{i\tau}{2\pi a_m} \oint\limits_L \int\limits_{\partial K_\delta(x_0)} \left(\frac{\sinh[\sqrt{z}(R-\delta)]}{4\pi\delta^2 \sinh(\sqrt{z}R)} + \frac{\sqrt{z}\cosh[\sqrt{z}(R-\delta)]}{4\pi\delta \sinh(\sqrt{z}R)} \right) ds$$

$$\times \frac{\omega_{m-k+1}(0)}{\omega_{m-k+1}(z)}\,dz = \lim_{\delta\to 0}\frac{i\tau}{2\pi a_m}\oint\limits_{L}\int\limits_{K_\delta(x_0)}\frac{\omega_{m-k+1}(0)}{\omega_{m-k+1}(z)}\,dz = 0,$$

так как сумма вычетов относительно всех особых точек, включая бесконечно удаленную точку, равна нулю. Если $k = m$, то получим

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{K_\delta(x_0)}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial n}\,ds = \frac{i\tau}{2\pi a_m}\oint\limits_{L}\frac{dz}{1-\frac{z\tau}{a_v}} = 1.$$

□

Свойство 3.4. *Пусть* $\{u_k(x)\}\in C^2(\overline{D})$ *и*

$$\Delta u_k - \frac{a_k u_k - a_{k-1}u_{k-1}}{h} = -F_k(x), \tag{3.7}$$

где $F_k \in C(D)$ *заданные функции. Тогда имеет место следующее интегральное представление*

$$u_m(x_0) = \int\limits_{K_R(x_0)}\frac{a_0u_0\Gamma_m(|x-x_0|)}{\tau}\,dx - \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\partial K_R(x_0)}u_k\frac{\partial\Gamma_{m-k+1}}{\partial n}\,ds + \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)}F_k\Gamma_{m-k+1}\,dx. \tag{3.8}$$

Доказательство. Для пары функций $u(x), v(x)\in C^2(\overline{D})$ имеет место тождество Грина

$$\int\limits_{D}(v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int\limits_{\partial D}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial n}v\Big)-\Big(\frac{\partial v}{\partial n}u\Big)\Big]\,dx.$$

Применим это тождество для пары функций $u_k(x)$, $\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)$. Так как функция $\Gamma_1(|x-x_0|)$ недифференцируема в точке x_0, то тождество Грина применим на множестве $K_R(x_0)\setminus K_\delta(x_0)$, а затем перейдем к пределу при $\delta\to 0$.

$$\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)\setminus K_\delta(x_0)}\big[\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\Delta u_k(x) - u_k(x)\Delta\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\big]\,dx = \sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\partial K_R(x_0)}\Big(\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\frac{\partial u_k(x)}{\partial n}$$

$$- u_k(x)\frac{\partial \Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)}{\partial n}\Big)\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\partial K_\delta(x_0)}\Big(\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\frac{\partial u_k(x)}{\partial n}$$

$$- u_k(x)\frac{\partial \Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)}{\partial n}\Big)\,dx. \quad (3.9)$$

Преобразуем левую часть равенства (3.9), используя свойство 3.1 и уравнение (3.7). После этого перейдем к пределу при $\delta \to 0$.

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)\setminus K_\delta(x_0)}\big[\Delta u_k(x)\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)$$

$$- u_k\Delta\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\big]\,dx$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)\setminus K_\delta(x_0)}\Big(\frac{a_k u_k(x) - a_{k-1}u_{k-1}(x)}{\tau} - F_k(x)\Big)\Gamma_{m-k+1}\,dx$$

$$- \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)\setminus K_\delta(x_0)}\Big(u_k(x)\frac{a_k}{\tau}\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|) - \Gamma_{m-k}(|x-x_0|)\Big)\,dx$$

$$= -\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)} F_k\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)}\Big(\frac{a_k u_k}{\tau}\Gamma_{m-k}(|x-x_0|) - \frac{a_{k-1}u_{k-1}}{\tau}\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\Big)\,dx$$

$$= -\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)} F_k(x)\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx$$

$$+\int\limits_{K_R(x_0)}\frac{-a_0u_0(x)}{\tau}\Gamma_m(|x-x_0|)\,dx.$$

Перейдем к пределу в левой части этого тождества, учитывая (3.6). Это даст

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\partial K_\delta(x_0)}\Big(\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\frac{\partial u_k(x)}{\partial n}$$

$$- u_k(x)\frac{\partial \Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)}{\partial n}\Big)\,dx = -u_m(x_0).$$

В результате получим интегральное представление (3.8). □

Свойство 3.5. *Функции* $\Gamma_k(r)-\Gamma_{k-1}(r)$, $k=2,\dots,N$, *на интервале* $0<r<R$ *изменяют свой знак не более, чем один раз.*

Доказательство. Обозначим $r_{k,k-1}$ точки, в которых функции $\Gamma_k(r)$ $-\Gamma_{k-1}(r)$, $k=1,2\dots,n$, обращаются в нуль. Рассмотрим функцию $\Gamma_2(|x-x_0|)-\Gamma_1(|x-x_0|)$. Эта функция удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{gathered}\triangle(\Gamma_2-\Gamma_1)-a_{n-1}\frac{\Gamma_2-\Gamma_1}{\tau}=-a_n\frac{\Gamma_1}{\tau}\quad\forall\,x:0<|x-x_0|<R,\\ \lim_{|x-x_0|\to 0}4\pi|x-x_0|(\Gamma_2-\Gamma_1)=-1,\quad \Gamma_2(R)-\Gamma_1(R)=0.\end{gathered}\tag{3.10}$$

Вблизи точки x_0 функция $\Gamma_2(|x-x_0|)-\Gamma_1(|x-x_0|)$ отрицательна. Предположим, что при переходе через точку $r=r_{2,1}$ эта функция меняет свой знак с минуса на плюс. Тогда на концах интервала $(r_{2,1},R)$ она обращается в нуль, а внутри этого интервала удовлетворяет уравнению (3.10), правая часть которого отрицательна. Отсюда следует, что внутри интервала $(r_{2,1},R)$ функция $\Gamma_2(|x-x_0|)-\Gamma_1(|x-x_0|)$ не может принимать отрицательных значений.

Рассмотрим функцию $\Gamma_3(|x-x_0|)-\Gamma_2(|x-x_0|)$. Она является решением следующей граничной задачи

$$\begin{gathered}\Delta(\Gamma_3-\Gamma_2)-a_{n-2}\frac{\Gamma_3-\Gamma_2}{\tau}=-a_{n-1}\frac{\Gamma_2-\Gamma_1}{\tau}\quad\forall\,x:0<|x-x_0|<R,\\ \Gamma_3(0)-\Gamma_2(0)=0,\quad \Gamma_3(R)-\Gamma_2(R)=0.\end{gathered}\tag{3.11}$$

Докажем, что в достаточно малой окрестности точки $r=0$ функция $\Gamma_3(r)-\Gamma_2(r)$ отрицательна. Предположим, что имеется точка $r_0<r_{2,1}$, в которой указанная функция обращается в нуль. Тогда на интервале $(0,r_0)$, как следует из (3.11), она не может иметь положительного максимума и поэтому отрицательна. Если же функция $\Gamma_3(r)-\Gamma_2(r)$ положительна в некоторой окрестности точки $r=0$, то на интервале $(0,r_{2,1})$ в нуль она обратиться не может, как сказано выше. На интервале $(r_{2,1},R)$ в нуль она также обратиться не может, так как не может иметь минимума. Следовательно, функция $\Gamma_3(r)-\Gamma_2(r)$ будет положительной на всем интервале $(0,R)$. Но это противоречит свойству 3.2. Предположим теперь, что существует точка $r_{3,2}$, при переходе которой функция $\Gamma_3(r)-\Gamma_2(r)$ изменяет знак с минуса на плюс, и пусть $r_{3,2}<r_{2,1}$. На интервале $(r_{3,2},r_{2,1})$ указанная функция в нуль обратиться не может, так как тогда бы она достигала на этом интервале положительного максимального значения, что противоречит положительности правой части уравнения (3.11). По

аналогичным соображениям не может быть перемен знака и на интервале $(r_{2,1}, R)$. Если же $r_{3,2} > r_{2,1}$, то на интервале $(r_{3,2}, R)$ функция $\Gamma_3(r) - \Gamma_2(r) > 0$, так как правая часть уравнения (3.11) на этом интервале отрицательна. Для завершения доказательства осталось применить метод математической индукции. □

Свойство 3.6. *Пусть* $R = \tau^\sigma$, $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $N = \frac{T}{\tau}$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\Gamma'_k(R) - \Gamma'_{k-1}(R) \le 0, \quad k = 2, 3, \ldots, N. \tag{3.12}$$

Доказательство. Покажем, что достаточно доказать неравенства (3.12) при $k = N$. Пусть при $k = m \le N$ имеет место неравенство

$$\Gamma'_m(R) - \Gamma'_{m-1}(R) \le 0,$$

а при $k = m - 1$ имеем

$$\Gamma'_{m-1}(R) - \Gamma'_{m-2}(R) > 0. \tag{3.13}$$

Тогда в некоторой левой полуокрестности точки $r = R$ функция

$$\Gamma_{m-1}(r) - \Gamma_{m-2}(r) < 0,$$

так как

$$\Gamma_{m-1}(R) - \Gamma_{m-2}(R) = 0.$$

С другой стороны, в силу предыдущего свойства, в правой полуокрестности точки $r = 0$ эта функция отрицательная и может обращаться в нуль не более, чем в одной точке. Поэтому

$$\Gamma_{m-1}(r) - \Gamma_{m-2}(r) < 0 \quad \forall\, r : 0 < r < R.$$

Функция $\Gamma_{m-1}(|x - x_0|) - \Gamma_{m-2}(|x - x_0|)$ на указанном интервале удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \triangle[\Gamma_m(|x - x_0|) - \Gamma_{m-1}(|x - x_0|)] \\ - a_{n-m+1}\frac{\Gamma_m(|x - x_0|) - \Gamma_{m-1}(|x - x_0|)}{\tau} \\ = -a_{n-m}\frac{\Gamma_{m-1}(|x - x_0|) - \Gamma_{m-2}(|x - x_0|)}{\tau}, \end{aligned}$$

правая часть которого положительна. В силу принципа максимума отсюда следует, что $\Gamma_{m-1}(|x - x_0|) - \Gamma_{m-2}(|x - x_0|) < 0$ всюду на интервале $(0 < |x - x_0| < R)$. Это противоречит неравенству (3.12).

Далее, из (3.2) следует

$$\Gamma'_N(R) - \Gamma'_{N-1}(R)$$
$$= \frac{\tau^2}{a_N a_1}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial L}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{4\pi R\sinh(R\sqrt{z})}\frac{dz}{(1-\frac{z\tau}{a_N})(1-\frac{z\tau}{a_{N-1}})\cdots(1-\frac{z\tau}{a_1})}$$
$$= (-1)^N\frac{a_{N-1}a_{N-2}\cdots a_2}{(N-1)!\tau^{N-2}}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\Big(\frac{z^{\frac{3}{2}}}{4\pi R\sinh(R\sqrt{z})}\Big)\Big|_{z=\frac{\xi}{\tau}}$$
$$= (-1)^N c_N(\tau)\frac{d^{N-1}\varphi(\sqrt{z})}{dz^{N-1}}\Big|_{z=\frac{\xi}{\tau}},$$

где

$$a_{min} < \xi < a_{max}, \quad c_N(\tau) = \frac{a_{N-1}a_{N-2}\cdots a_2}{4\pi R(N-1)!\tau^{N-2}},$$

$$\varphi(\sqrt{z}) = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\sinh(R\sqrt{z})} = 2z^{\frac{3}{2}}\frac{\exp\{-R\sqrt{z}\}}{1-\exp\{-2R\sqrt{z}\}}.$$

Пусть

$$F(Rx) = \frac{\exp\{-Rx\}}{1-\exp\{-2Rx\}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)Rx}$$
$$= e^{-Rx} + e^{-3Rx}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2k-1)Rx}. \quad (3.14)$$

Вычислим

$$\frac{d^{N-1}\varphi(x)}{dx^{N-1}} = 2\sum_{k=0}^{N-1} C^k_{N-1}(x^3)^{(k)}\frac{d^{N-1-k}F(x)}{dx^{N-1-k}}$$
$$= 2x^3\frac{d^{N-1}F(x)}{dx^{N-1}} + 6(N-1)x^2\frac{d^{N-2}F(x)}{dx^{N-2}} + 6(N-1)(N-2)x\frac{\partial^{N-3}F(x)}{\partial x^{N-3}}$$
$$+ 2(N-1)(N-2)(N-3)\frac{d^{N-4}F(x)}{dx^{N-4}},$$

С другой стороны

$$\frac{d^n F(x)}{dx^n} = (-1)^n R^n e^{-Rx} + (-1)^n (3R)^n O(e^{-3Rx}) \quad \text{при } \tau\to 0, \quad (3.15)$$

так как $x = \sqrt{\frac{\xi}{\tau}} \geq \sqrt{\frac{a_{min}}{\tau}}$, $R=\tau^\sigma$, $0<\sigma<\frac{1}{2}$, и поэтому $Rx\to+\infty$, если $\tau\to 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{d^{N-1}\varphi(x)}{dx^{N-1}} &= (-1)^{N-1}2\frac{R^{N-3}e^{-Rx}}{1+e^{-2Rx}}[x^3R^3 - 3R^2x^2(N-1) \\ &\quad + 3(N-1)(N-2)xR - (N-1)(N-2)(N-3)] \\ &\quad + (-1)^{N-2}(3R)^{N-2}O(e^{-3Rx})[x^3(3R)^3 - 3(3R)^2x^2(N-1) \\ &\quad + 3(N-1)(N-2)x3R - (N-1)(N-2)(N-3)].\end{aligned}$$

Знак всего выражения определяется первым слагаемым. Знак квадратной скобки последним слагаемым. Поэтому

$$\operatorname{sign}\left[\frac{d^{N-1}\varphi(x)}{dx^{N-1}}\right] = \operatorname{sign}[(-1)^N]. \tag{3.16}$$

Из (3.15) следует

$$\begin{aligned}\Gamma'_N(R) - \Gamma'_{N-1}(R) &= (-1)^{N-1}c_N(\tau)\frac{d^{N-1}\varphi(\sqrt{z})}{dz^{n-1}}\bigg|_{z=\frac{\xi}{\tau}} \\ &= (-1)^{N-1}c_N(\tau)\left[\frac{\varphi^{(N-1)}\Big(\sqrt{\frac{\xi}{\tau}}\Big)}{\Big(2\sqrt{\frac{\xi}{\tau}}\Big)^{N-1}} - \frac{(N-1)(N-2)}{1!}\frac{\varphi^{(N-2)}\Big(\sqrt{\frac{\xi}{\tau}}\Big)}{\Big(2\sqrt{\frac{\xi}{\tau}}\Big)^{N}}\right] \\ &+ (-1)^{N-1}c_N(\tau)\left[\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{2!}\frac{\varphi^{(N-3)}\Big(\sqrt{\frac{\xi}{\tau}}\Big)}{\Big(2\sqrt{\frac{\xi}{\tau}}\Big)^{N+1}} - \cdots\right] < 0.\end{aligned}$$

□

Свойство 3.7. *Пусть* $R = \tau^\sigma$, $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $N = \frac{T}{\tau}, T > 0$, $0 < a_0 \leq a_k \leq a_{max} \leq \frac{c}{\varepsilon}$, *где* c, a_0 *положительные константы, которые не зависят от* ε. *Тогда имеет место оценка*

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial\Gamma_N}{\partial n}\Big|\bigg|_{\partial K_R(x_0)} \leq M_1\bigg\{\frac{1}{q^N R}\exp\Big\{-M_2\frac{\sqrt{a_{max}}R}{\sqrt{\tau}}\Big\} \\ + \exp\Big\{-M_3\frac{T\pi^2}{2R^2a_{\max}}\Big\}\bigg\},\end{aligned} \tag{3.17}$$

где $q \geq 2$, *и положительные константы* M_1, M_2, M_3 *не зависят от* N, τ, R, ε.

Доказательство. Оценим интеграл

$$\frac{\partial\Gamma_N}{\partial n}\bigg|_{\partial K_R(x_0)} = \frac{-i\tau}{2\pi a_N}\oint\limits_{\partial L}\frac{\sqrt{z}}{4\pi R\sinh(\sqrt{z}R)}\frac{dz}{(1-\frac{z\tau}{a_1})(1-\frac{z\tau}{a_2})\cdots(1-\frac{z\tau}{a_N})}, \tag{3.18}$$

где ∂L граница области

$$L=\Big\{z:\varrho=|z|<\frac{(1+q)\max_{1\le k\le N}a_k}{\tau},\ \operatorname{Re}z=b_0>-\frac{\pi^2}{R^2},\\ b_0<0,\ \varrho>\frac{\max_{1\le k\le N}a_k}{\tau}\Big\}.$$

Представим замкнутую кривую ∂L в виде двух кривых ∂L_1 и ∂L_2, где кривая ∂L_1 — дуга окружности, уравнение которой $\{z=\rho e^{i\varphi}, -\varphi_0(\tau)\le\varphi\le\varphi_0(\tau)\}$, причем

$$\frac{\pi}{2}\le\varphi_0(\tau),\quad \lim_{\tau\to 0}\varphi_0=\frac{\pi}{2}.$$

∂L_2 — отрезок прямой, уравнение которого

$$\{\operatorname{Re}z=b_0=-\frac{\pi^2}{2R^2},\ -\rho\sin\varphi_0\le\operatorname{Im}z\le\rho\sin\varphi_0\}.$$

Обозначим интеграл (3.18) по кривой ∂L_1 через I_1, а интеграл по кривой ∂L_2 через I_2. Оценим интеграл I_1. Так как

$$\Big|\Big(1-\frac{z\tau}{a_1}\Big)\Big(1-\frac{z\tau}{a_2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{z\tau}{a_N}\Big)\Big|\ge\Big|\frac{|z|\tau}{a_{\max}}-1\Big|^N\ge q^N,$$

$$\big|\sinh(\sqrt{z}R)\big|\ge\sinh[\sqrt{|z|}R\cos(\arg z/2)]=\sinh[\sqrt{|z|}R\cos(\varphi_0/2)],$$

то

$$|I_1|\le c_1\frac{1}{q^NR}\exp\Big\{-c_2\frac{\sqrt{a_{max}}R}{\sqrt{\tau}}\Big\},$$

где константы c_1 и c_2 не зависят от τ,ε. Оценим теперь интеграл I_2. Так как $Rez=b_0=-\frac{\pi^2}{2R^2}$, то

$$\Big|\Big(1-\frac{z\tau}{a_1}\Big)\Big(1-\frac{z\tau}{a_2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{z\tau}{a_N}\Big)\Big|\ge\Big(1+\tau\frac{|b_0|}{a_{\max}}\Big)^{\frac{T}{\tau}},$$

$$\Big|\frac{\sqrt{|z|}R}{\sinh\sqrt{z}R}\Big|\le c_3.$$

В результате получим

$$|I_2|\le\frac{c_3}{R^2}\exp\Big\{-\frac{T\pi^2}{2R^2a_{\max}}\Big\}\le c_4\exp\Big\{-\frac{c_5T\pi^2}{2R^2a_{\max}}\Big\},$$

где константы c_3,c_4,c_5 не зависят от τ,ε. □

4. Равномерные оценки приближенного решения

Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Из уравнения (2.3)

$$\Delta u^\varepsilon(x,t) - \{a_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t)) - \lambda\chi'_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t))\}\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t} = 0 \quad \text{в } D_T$$

и принципа максимума следует, что решение $u^\varepsilon(x,t)$ принимает максимальное и минимальное значения на параболической границе, то есть либо на $\partial D_i \times [0,T)$, $i = 1,2$, либо при $t = 0$. Поэтому имеет место

$$\max_{\overline{D_T}} |u^\varepsilon(x,t)| \le \max\Big(\max_{\overline{D}} |\psi(x)|,\ \max_{\overline{D_T}} |\varphi(x,t)|\Big). \tag{4.1}$$

Пусть x_0 произвольная точка из области D. Преобразуем уравнение (2.7) к виду

$$\Delta\Big(\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial \bar t}\Big) - \frac{\partial}{\partial \bar t}\Big(\beta_k^\varepsilon(x_0)\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial \bar t}\Big)$$
$$= \frac{\partial}{\partial \bar t}\Big([\beta_k^\varepsilon(x) - \beta_k^\varepsilon(x_0)]\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial \bar t}\Big) + \frac{\partial f_k^\varepsilon(x)}{\partial \bar t},$$

где $k = 2,3,\ldots,N$. Если $k = 1$, то уравнение принимает вид

$$\Delta\Big(\frac{\partial u_1^\varepsilon(x)}{\partial \bar t}\Big) - \frac{\beta_1^\varepsilon(x_0)}{\tau}\frac{\partial u_1^\varepsilon(x)}{\partial \bar t} + \frac{1}{\tau}\Delta u_0^\varepsilon(x) = \frac{\beta_1^\varepsilon(x) - \beta_1^\varepsilon(x_0)}{\tau}\frac{\partial u_1^\varepsilon(x)}{\partial \bar t}.$$

Теорема 4.1. *Пусть* $\psi(x) \in H^{r+\alpha}(\overline{D})$, $\varphi(x,t) \in H^{r+\alpha,(r+\alpha)/2}(\overline{D_T})$, $0 < \alpha < 1$, $r \ge 3$, $\min_{\partial D_2\times[0,T]} \varphi(x,t) > 1$,

$$\tau^{\sigma-1/3} \le \varepsilon^2 M^2(\varepsilon), \quad 1/3 < \sigma < 1/2, \tag{4.2}$$

выполнены соответствующие условия согласования при $t = 0$, $x \in \partial D$. *Тогда существует такая положительная константа* c, *которая не зависит от* ε, *что имеет место оценка*

$$\max_{x\in\overline{D_T}}\Big|\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t}\Big| \le c\max\Big\{\max_{x\in\overline{D}}\Big|\Delta\psi(x)\Big|,\ \max_{\partial D_2\times[0,T]}\Big|\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\Big|\Big\}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть $K_R(x_0) \subset D$ шар с центром в точке x_0 радиуса $R = \tau^\sigma$, $m\tau = T_1 \le T$. Воспользуемся интегральным представлением (3.8), где в качестве a_k возьмем $\beta_k^\varepsilon(x_0)$.

$$\frac{\partial u_m^\varepsilon(x_0)}{\partial \bar t} = \int\limits_{K_R(x_0)} \Delta u_0^\varepsilon(x)\frac{\Gamma_m(|x-x_0|)}{\tau}\,dx$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\partial K_R(x_0)}\frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial\bar t}\frac{\partial\Gamma_{m-k+1}}{\partial n}\,ds$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)}\frac{\partial f_k^\varepsilon(x)}{\partial\bar t}\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)}[\beta_k^\varepsilon(x)-\beta_k^\varepsilon(x_0)]\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial\bar t}\frac{\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)}{\tau}\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)}[\beta_{k-1}^\varepsilon(x)-\beta_{k-1}^\varepsilon(x_0)]\frac{\partial u_{k-1}^\varepsilon(x)}{\partial\bar t}\frac{\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)}{\tau}\,dx$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

Оценим каждый из интегралов. Из (3.5) следует

$$|I_1|\le\max_{\overline D}|\Delta\psi|\int\limits_{K_R(x_0)}\frac{\Gamma_1(|x-x_0|)}{\tau}\,dx$$
$$\le\frac{\max_{\overline D}|\Delta\psi|}{\beta_m^\varepsilon(x_0)}\le\frac{\max_{\overline D}|\Delta\psi|}{\min(a_1,a_2)}\le\frac{\max_{\overline D}|\Delta\psi|}{a_0}.$$

Оценим $|I_2|$. Учитывая известное неравенство

$$x^\mu e^{-x}\le\mu^\mu e^{-\mu},\quad\forall\,x\in(0,+\infty),\ \forall\,\mu>0,$$

свойство 3.7, оценку (4.2) и оценку $a_{max}\le\frac{c}{\varepsilon}$, получим

$$|I_2|\le\frac{T_1c_1}{\tau M(\varepsilon)}\Big\{\frac{1}{q^NR}\exp\Big\{-c_2\frac{R}{\sqrt{\tau}}\Big\}+\exp\Big\{-M_3\frac{T_1\pi^2}{R^2a_{\max}}\Big\}\Big\}$$
$$=\frac{T_1c_1}{\tau M(\varepsilon)}\Big\{\frac{1}{q^N\tau^\sigma}\exp\Big\{-c_2\frac{\tau^\sigma}{\sqrt{\tau}}\Big\}+\exp\Big\{-c_3\frac{\varepsilon T_1\pi^2}{\tau^{2\sigma}}\Big\}\Big\}\le\frac{c}{M(\varepsilon)}\tau,$$

где константа c не зависит от τ,ε.

Из (2.6) и (2.11) следует, что

$$\Big|\frac{\partial f_k^\varepsilon(x)}{\partial\bar t}\Big|\le\frac{c\tau}{M(\varepsilon)}.$$

Поэтому

$$|I_3|\le\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)}\Big|\frac{\partial f_k^\varepsilon(x)}{\partial\bar t}\Big|\Gamma_{n-k+1}(|x-x_0|)\,dx\le c\frac{\tau}{M(\varepsilon)},$$

где константа c не зависит от ε, τ.

Из (2.6) и (2.10) следует

$$\Big|[\beta_k^\varepsilon(x)-\beta_k^\varepsilon(x_0)]\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial \overline{t}}-[\beta_{k-1}^\varepsilon(x)-\beta_{k-1}^\varepsilon(x_0)]\frac{\partial u_{k-1}^\varepsilon(x)}{\partial \overline{t}}\Big|\le\frac{c\tau|x-x_0|}{\varepsilon^2M^2(\varepsilon)}.$$

Поэтому

$$|I_4+I_5|\le\sum_{k=1}^m\int\limits_{K_R(x_0)}\frac{c}{\varepsilon^2M^2(\varepsilon)}|x-x_0|\frac{\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)}{\tau}\,dx$$

$$\le\frac{c\tau^\sigma}{\varepsilon^2M^2(\varepsilon)}<c\tau^{1/3}.$$

В результате, учитывая (4.2), получим

$$\Big|\frac{\partial u_m^\varepsilon(x_0)}{\partial \overline{t}}\Big|\le c_1\max_{x\in\overline{D}}|\Delta u_0^\varepsilon(x)|, \tag{4.4}$$

где константа c_1 не зависит от τ, ε.

Покажем теперь, что

$$\omega_m^\varepsilon=\{x\in D: 1<u_m^\varepsilon(x)<1+\varepsilon\}\subseteq D_R=\{x\in D:\operatorname{dist}(x,\partial D)>R\}.$$

Пусть $x_1\in\partial D_R$, $x_2\in\partial D_2$ и $\operatorname{dist}(x_1,x_2)=R=\tau^\sigma$. Из (4.2) следует

$$u_m^\varepsilon(x_2)-u_m^\varepsilon(x_1)\le\max_{\overline{D}}|\nabla u_m^\varepsilon(x)|R\le\frac{c}{M(\varepsilon)}\tau^\sigma\le c\varepsilon^2M(\varepsilon)\le c\varepsilon.$$

Так как $\min_{\partial D_2\times[0,T]}\varphi(x,t)>1$, то, не ограничивая общности можно считать, что при достаточно малом ε $\min_{\partial D_2\times[0,T]}\varphi(x,t)\ge 1+\varepsilon+c\varepsilon$. Отсюда следует

$$u_k^\varepsilon(x_1)\ge\varphi(x_2,k\tau)-c\varepsilon\ge 1+\varepsilon,$$

Аналогично, если $x_1\in\partial D_R$, $x_2\in\partial D_1$ и $\operatorname{dist}(x_1,x_2)=R$

$$u_m^\varepsilon(x_1)\le\max_{\overline{D}}|\nabla u_m^\varepsilon(x)|R\le\frac{c}{M(\varepsilon)}\tau^\sigma\le c\varepsilon<1.$$

Таким образом, в области $D\setminus\overline{D_R}=\{x\in D:\operatorname{dist}(x,\partial D)<R\}$ уравнение (2.3) является дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Поэтому из принципа максимума следует, что

$$\max_{\substack{x\in\overline{D}\setminus D_R,\\ 1\le m\le N}}\Big|\frac{\partial u_m^\varepsilon(x)}{\partial\overline{t}}\Big|\le\max\Big\{\max_{\substack{x\in\overline{\partial D_R},\\ 1\le m\le N}}\Big|\frac{\partial u_m^\varepsilon(x)}{\partial\overline{t}}\Big|,$$

$$\max_{\partial D_2\times[0,T]}\Big|\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\Big|,\ \max_{\overline{D}}|\Delta u_0(x)|\Big\}. \tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) в результате получим

$$\max_{\substack{x\in\overline{D},\\ 1\le m\le N}} \Big|\frac{\partial u_m^\varepsilon(x)}{\partial \bar t}\Big| \le c\max\left\{\max_{\overline{D}}|\Delta u_0(x)|,\ \max_{\partial D_2\times[0,T]}\Big|\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\Big|\right\}, \quad (4.6)$$

где константа c не зависит от τ,ε.

Пусть (x,t) произвольная точка из $\overline{D_T}$, $t\in[(m-1)\tau, m\tau]$ при некотором m, где $1\le m\le N$. Тогда

$$\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u_m^\varepsilon(x)}{\partial \bar t} = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(m-1)\tau}^{m\tau}\left\{\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u^\varepsilon(x,\eta)}{\partial \eta}\right\}d\eta.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t}\Big| &\le \Big|\frac{\partial u_m^\varepsilon(x)}{\partial \bar t}\Big| + \frac{\tau}{2}\max_{(x,t)\in\overline{D_T}}\Big|\frac{\partial^2 u^\varepsilon(x,t)}{\partial t^2}\Big| \\ &\le c\max\left\{\max_{\overline{D}}|\Delta u_0(x)|,\ \max_{\partial D_2\times[0,T]}\Big|\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\Big|\right\} + \frac{c\tau}{M(\varepsilon)} \\ &\le c_1\max\left\{\max_{\overline{D}}|\Delta u_0(x)|,\ \max_{\partial D_2\times[0,T]}\Big|\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\Big|\right\}.\end{aligned}$$

Оценка (4.3) доказана. □

Обозначим через

$$\omega^\varepsilon(x,t) = \{(x,t)\in D_T : 1 < u^\varepsilon(x,t) < 1+\varepsilon\}, \quad D_T^R = D_R\times(0,T),$$

$$\omega_-^\varepsilon(x,t) = \{(x,t)\in D_T : u^\varepsilon(x,t) < 1\},$$

$$\omega_+^\varepsilon(x,t) = \{(x,t)\in D_T : u^\varepsilon(x,t) > 1+\varepsilon\}.$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Тогда* $\forall\,(x,t)$, $(y,t)\in\overline{D_T}\cap\omega_\varepsilon^\pm(x,t)$ *существует константа* c*, которая не зависит от* ε,t,x,y*, что имеет место оценка*

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u^\varepsilon(y,t)}{\partial t}\Big| \\ &\qquad\le c|x-y|^\alpha\left\{\|u_0(x)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})}, \|\varphi(x,t)\|_{H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T})}\right\}, \quad (4.7)\end{aligned}$$

где $0<\alpha<1$.

Доказательство. Уравнение (2.3) в $D_T \setminus \overline{\omega^\varepsilon(x,t)} = \omega^\varepsilon_-(x,t) \cup \omega^\varepsilon_+(x,t)$ имеет вид

$$\Delta u^\varepsilon(x,t) = a_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t))\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t}.$$

Пусть x_0, y_0 произвольные точки либо из $\overline{\omega^\varepsilon_-(x,m\tau)} \cap D_R$, либо из $\overline{\omega^\varepsilon_+(x,m\tau)} \cap D_R$. В каждом из указанных множеств $a_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t)) = \mathrm{const}$, Из сделанного предположения следует $\beta^\varepsilon_m(x_0) = \beta^\varepsilon_m(y_0)$.

Для определенности предположим, что $K_R(x_0) \subset \omega^\varepsilon_+(x,m\tau)$, $K_R(y_0) \subset \omega^\varepsilon_+(x,m\tau)$. Воспользуемся (3.8) и построим интегральное представление для $\frac{\partial u^\varepsilon_m(x_0)}{\partial \bar t} - \frac{\partial u^\varepsilon_m(y_0)}{\partial \bar t}$, и оценим разности однотипных слагаемых. Среди этих разностей слагаемых главным является первое, так как все остальные слагаемые, как следует из доказательства теоремы 4.1, стремятся к нулю при $\tau \to 0$. Итак

$$I_1 = \int\limits_{K_R(x_0)} \Delta u^\varepsilon_0(x)\frac{\Gamma_m(|x-x_0|)}{\tau}\,dx - \int\limits_{K_R(y_0)} \Delta u^\varepsilon_0(x)\frac{\Gamma_m(|x-y_0|)}{\tau}\,dx.$$

Во втором слагаемом сделаем замену переменной интегрирования $x = \omega + y_0 - x_0$. Это даст

$$I_1 = \int\limits_{K_R(x_0)} \Delta u^\varepsilon_0(x)\frac{\Gamma_m(|x-x_0|)}{\tau}\,dx - \int\limits_{K_R(x_0)} \Delta u^\varepsilon_0(\omega + y_0 - x_0)\frac{\Gamma_m(|\omega-x_0|)}{\tau}d\omega.$$

Отсюда следует

$$|I_1| \le \max_{x\in\overline{D}} |\Delta u_0(x) - \Delta u_0(x+y_0-x_0)| \int\limits_{K_R(x_0)} \frac{\Gamma_1(|x-x_0|)}{\tau}\,dx$$
$$\le c\max_{x\in\overline{D}} |\Delta u_0(x) - \Delta u_0(x+y_0-x_0)| \le c|x_0-y_0|^\alpha \left\| u_0(x)\right\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})}.$$

Остальные слагаемые оценим также как при доказательстве теоремы 4.1. В результате получим

$$\Big|\frac{\partial u^\varepsilon_m(x_0)}{\partial \bar t} - \frac{\partial u^\varepsilon_m(y_0)}{\partial \bar t}\Big|$$
$$\le c|x_0-y_0|^\alpha \left\| u_0(x)\right\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})} + c_1|x_0-y_0|\frac{\tau^\sigma}{\varepsilon^2 M^2(\varepsilon)}$$
$$\le c|x_0-y_0|^\alpha \left\| u_0(x)\right\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})} + c_2\tau^{1/3}|x_0-y_0|. \quad (4.8)$$

Пусть теперь $(x_0,t),(y_0,t)$ произвольные точки либо из $\overline{\omega^\varepsilon_-(x,t)}\cap D^R_T$, либо из $\overline{\omega^\varepsilon_+(x,t)}\cap D^R_T$, причем $t\in[(m-1)\tau,m\tau]$ при некотором m. Воспользуемся оценкой (4.8).

$$\Big(\frac{\partial u^\varepsilon(x_0,t)}{\partial t}-\frac{\partial u^\varepsilon(y_0,t)}{\partial t}\Big)-\Big(\frac{\partial u^\varepsilon_m(x_0)}{\partial\bar t}-\frac{\partial u^\varepsilon_m(y_0)}{\partial\bar t}\Big)$$
$$=\frac{1}{\tau}\int\limits_{(m-1)\tau}^{m\tau}\Big\{\Big(\frac{\partial u^\varepsilon(x_0,t)}{\partial t}-\frac{\partial u^\varepsilon(y_0,t)}{\partial t}\Big)-\Big(\frac{\partial u^\varepsilon(x_0,\eta)}{\partial \eta}-\frac{\partial u^\varepsilon(y_0,\eta)}{\partial \eta}\Big)\Big\}\,d\eta$$
$$=\frac{1}{\tau}\int\limits_{(m-1)\tau}^{m\tau}d\eta\int\limits_{y_0}^{x_0}\Big(\frac{\partial^2 u^\varepsilon(\xi,t)}{\partial t\partial\xi}-\frac{\partial^2 u^\varepsilon(\xi,\eta)}{\partial \eta\partial\xi}\Big)=,d\xi.$$

Отсюда следует

$$\Big|\frac{\partial u^\varepsilon(x_0,t)}{\partial t}-\frac{\partial u^\varepsilon(y_0,t)}{\partial t}\Big|$$
$$\le\Big|\frac{\partial u^\varepsilon_m(x_0)}{\partial\bar t}-\frac{\partial u^\varepsilon_m(y_0)}{\partial\bar t}\Big|+\frac{\tau}{2}\Big|\max_{(x,t)\in\overline{D_T}}\frac{\partial^3u^\varepsilon(x,t)}{\partial x\partial^2 t}\Big||x_0-y_0|$$
$$\le c_1|x_0-y_0|^\alpha\,\|u_0(x)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})}+|x_0-y_0|\frac{c_2\tau}{M(\varepsilon)}$$
$$\le c_3|x_0-y_0|^\alpha\,\|u_0(x)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})}\,,\qquad(4.9)$$

где константы c_1,c_2,c_3 не зависят от τ,ε.

Уравнение (2.3) в $\omega^\varepsilon_-(x,t)\cup\omega^\varepsilon_+(x,t)$ является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Из того, что доказана оценка (4.3), граница $\partial D_T\in C^{2+\alpha}$, функция $\varphi(x,t)\in H^{r+\alpha,(r+\alpha)/2}(\overline{D_T})$, следует оценка (4.8) вплоть до границы области D_T. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1 *и*

$$\tau^{\sigma-1/3}<\varepsilon^2M^3(\varepsilon),\quad \frac13<\sigma<\frac12,\quad \min_{\overline{D}}|\nabla\psi(x)|=c_0>0.\qquad(4.10)$$

Тогда существуют такие положительные константы c_1,c_2, которые не зависят от ε, что имеют место оценки

$$\max_{\overline{D_T}\setminus(\omega^\varepsilon(x,0)\cap\omega^\varepsilon(x,t))}|\nabla u^\varepsilon(x,t)|$$
$$\le c_1\max\Big\{\max_{x\in\overline{D}}|\nabla u^\varepsilon_0(x)|,\ \max_{\overline{D_T}}|\nabla\varphi(x,t)|\Big\},\qquad(4.11)$$

$$\min_{\overline{D^R_T}\setminus\omega^\varepsilon(x,t)}|\nabla u^\varepsilon(x,t)|\ge c_2>0.\qquad(4.12)$$

Доказательство. Продифференцируем обе части уравнения (2.7) по одной из переменных x_i. В результате получим

$$\Delta\Big(\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i}\Big) - \frac{b_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x))\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i} - b_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x))\frac{\partial u_{k-1}^\varepsilon(x)}{\partial x_i}}{\tau} = \frac{\partial f_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i}.$$

Пусть точка $x_0 \in D$ и $K_R(x_0) \subset D$. Обозначим через $w_k^\varepsilon(x) = \frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i}$. Преобразуем уравнение к следующему виду:

$$\Delta w_k^\varepsilon(x) - \frac{b_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x_0))w_k^\varepsilon(x) - b_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x_0))w_{k-1}^\varepsilon(x)}{\tau} = \frac{\partial f_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i}$$
$$+ \frac{b_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x)) - b_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x_0))}{\tau}w_k^\varepsilon(x) - \frac{b_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x)) - b_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x_0))}{\tau}w_{k-1}^\varepsilon(x).$$

Используем свойство 3.4 фундаментальных решений и построим интегральное представление $w_m^\varepsilon(x)$ в точке x_0

$$w_m^\varepsilon(x_0) = \int\limits_{K_{R(x_0)}} b_\varepsilon(u_0(x_0))\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\frac{\Gamma_m(|x-x_0|)}{\tau}\,dx$$
$$-\sum_{k=1}^m \int\limits_{\partial K_{R(x_0)}} w_k^\varepsilon(x)\frac{\partial \Gamma_{m-k+1}}{\partial n}\,ds - \sum_{k=1}^m \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\partial f_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i}\Gamma_{m-k+1}\,dx$$
$$-\sum_{k=1}^m \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{b_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x)) - b_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x_0))}{\tau}w_k^\varepsilon(x)\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx$$
$$+\sum_{k=1}^m \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{b_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x)) - b_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x_0))}{\tau}w_{k-1}^\varepsilon(x)\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \quad (4.13)$$

Оценим $|I_1|$. Из свойства 3.2 следует

$$|I_1| \le b_\varepsilon(u_0(x_0))\max_{\overline{D}}\Big|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}\Big| \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\Gamma_1(|x-x_0|)}{\tau}\,dx$$
$$\le c b_\varepsilon(u_0(x_0))\max_{\overline{D}}|\nabla u_0(x)|\,.$$

Оценим $|I_2|$ также, как оценен аналогичный интеграл при доказательстве теоремы 4.1

$$|I_2| \le \frac{Tc_1}{\tau M(\varepsilon)}\left\{\frac{1}{q^N R}\exp\Big\{-c_2\frac{R}{\sqrt{\tau}}\Big\} + \exp\Big\{-\frac{T\pi^2}{R^2 a_{\max}}\Big\}\right\}$$

$$\leq \frac{Tc_1}{\tau M(\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{q^N \tau^\sigma} \exp\Big\{ -c_2 \frac{\tau^\sigma}{\sqrt{\tau}} \Big\} + \exp\Big\{ -\frac{T\pi^2}{\tau^{2\sigma} a_{\max}} \Big\} \right\} \leq \frac{c}{M(\varepsilon)} \tau,$$

где константа c не зависит от τ, ε.

$$|I_3| \leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{K_{R(x_0)}} \max_{\overline{D}} \Big| \frac{\partial f_k^\varepsilon(x)}{\partial x} \Big| \Gamma_1(|x - x_0|)\, dx \leq \frac{c\tau}{M(\varepsilon) a_0},$$

где константа c не зависит от ε, τ, n. Так как

$$\Big| \frac{b_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x)) - b_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x_0))}{\tau} w_k^\varepsilon(x) - \frac{b_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x)) - b_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x_0))}{\tau} w_{k-1}^\varepsilon(x) \Big|$$
$$\leq c \frac{|x - x_0|}{\varepsilon^2 M^2(\varepsilon)} \leq c \frac{\sigma^\sigma}{\varepsilon^2 M^3(\varepsilon)},$$

то используя свойство 3.2, получим

$$|I_4 + I_5| \leq \frac{c\tau^\sigma}{\varepsilon^2 M^3(\varepsilon)},$$

где константа c не зависит от ε, τ, m. Учитывая (4.10), получим

$$|I_2 + I_3 + I_4 + I_5| \leq c\tau^{1/3}. \tag{4.14}$$

В результате имеем следующую оценку:

$$\Big| \frac{\partial u_m^\varepsilon(x_0)}{\partial x_i} \Big| = |w_m^\varepsilon(x_0)| \leq b_\varepsilon(u_0(x_0)) \max_{\overline{D}} \Big| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \Big| \frac{1}{a_0} + c\tau^{1/3},$$

где константа c не зависит от ε, τ, x_0. Если

$$x_0 \overline{\in} \{x \in D : 1 < u_0(x) < 1 + \varepsilon\},$$

то из предыдущей оценки получим

$$\Big| \frac{\partial u_m^\varepsilon(x_0)}{\partial x_i} \Big| = |w_m^\varepsilon(x_0)| \leq c_3 \max_{\overline{D}} |\nabla u_0(x)| + c\tau^{1/3} \leq c_4 \max_{\overline{D}} |\nabla u_0(x)|.$$

Пусть $(x, t) \in D_T^R$ и $t \in [(m-1)\tau, m\tau]$ при некотором целом $1 \leq m \leq N$. Тогда, учитывая (4.10), получим

$$\Big| \frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial x_i} \Big| = \Big| \frac{\partial u_m^\varepsilon(x)}{\partial x_i} + \int\limits_{m\tau}^{t} \frac{\partial^2 u^\varepsilon(x,\eta)}{\partial x_i \partial t}\, d\eta \Big|$$
$$\leq \Big| \frac{\partial u_m^\varepsilon(x)}{\partial x_i} \Big| + |t - m\tau| \max_{(x,t) \in \overline{D_T}} \Big| \frac{\partial^2 u^\varepsilon(x,\eta)}{\partial x_i \partial t} \Big| \leq \Big| \frac{\partial u_m^\varepsilon(x)}{\partial x_i} \Big| + \frac{c\tau}{M(\varepsilon)}$$

$$\leq c_4 \max_{\overline{D}} |\nabla u_0(x)| + c_2 \tau^{1/3} \leq c \max_{\overline{D}} |\nabla u_0(x)|\,,$$

где константа c не зависит от ε, x, t.

В области $D \setminus \overline{D_R} = \{x \in D : \operatorname{dist}(x, \partial D) < R\}$ уравнение (2.3) при каждом $t \in (0, T)$

$$\Delta u^\varepsilon(x,t) = a_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t) \frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t}$$

можно рассматривать как уравнение Пуассона с ограниченной правой частью. Из того, что граница $\partial D \in C^{2+\alpha}$, функция $\varphi(x,t) \in H^{r+\alpha,(r+\alpha)/2}(\overline{D_T})$, оценка (4.11) будет выполняться вплоть до границы области D_T.

По условию теоремы $\min_{\overline{D}} |\nabla \psi(x)| = c_0 > 0$. Поэтому в любой точке D, по крайней мере, одна из частных производных функции $\psi(x)$ удовлетворяет неравенству $|\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i}| = |\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i}| \geq c_0/3 > 0$. Предположим для определенности, что $\frac{\partial u_0(x_0)}{\partial x_i} \geq c_0/3$. Тогда

$$|I_1| \geq b_\varepsilon(u_0(x_0)) \frac{\partial u_0(x_0)}{\partial x_i} \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\Gamma_1(|x - x_0|)}{\tau}\, dx$$

$$- b_\varepsilon(u_0(x_0)) \int\limits_{K_{R(x_0)}} \left| \frac{\partial u_0(x_0)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \right| \frac{\Gamma_1(|x - x_0|)}{\tau}\, dx$$

$$\geq \frac{c_0}{3a_0} \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\Gamma_1(|x - x_0|)}{\tau}\, dx - b_\varepsilon(u_0(x_0)) c_1 \int\limits_{K_{R(x_0)}} |x - x_0| \frac{\Gamma_1(|x - x_0|)}{\tau}\, dx$$

$$\geq \frac{a_0 c_0}{3 b_\varepsilon(u_m(x_0))} \left(1 - \frac{R\sqrt{\frac{b_\varepsilon(u_m(x_0))}{\tau}}}{\sinh\left(R\sqrt{\frac{b_\varepsilon(u_m(x_0))}{\tau}}\right)} \right)$$

$$- \frac{\tau^\sigma b_\varepsilon(u_0(x_0))}{b_\varepsilon(u_m(x_0)} \left(1 - \frac{R\sqrt{\frac{b_\varepsilon(u_m(x_0))}{\tau}}}{\sinh\left(R\sqrt{\frac{b_\varepsilon(u_m(x_0))}{\tau}}\right)} \right).$$

Заметим, что

$$R = \tau^\sigma, \quad 0 < a_0 \leq b_\varepsilon(u_m(x_0)) \leq \frac{c}{\varepsilon}, \quad \forall\, x \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{x}{\sinh x} \leq \frac{3!}{x^2}.$$

Отсюда следует

$$\frac{R\sqrt{\frac{b_\varepsilon(u_m(x_0))}{\tau}}}{\sinh\left(R\sqrt{\frac{b_\varepsilon(u_m(x_0))}{\tau}}\right)} \leq \frac{3! \tau^{1-2\sigma}}{a_0} \to 0 \quad \text{если } \tau \to 0.$$

Поэтому из (4.14) следует

$$\Big|\frac{\partial u_m^\varepsilon(x_0)}{\partial x_i}\Big| \geq \frac{c}{b_\varepsilon(u_m(x_0))}\min_{\overline{D}}|\nabla\psi(x)| - |I_2+I_3+I_4+I_5|$$
$$\geq \frac{c}{b_\varepsilon(u_m(x_0))}\min_{\overline{D}}|\nabla\psi(x)| - c\tau^{1/3}. \quad (4.15)$$

Следовательно, для любой точки $x \in \overline{D_R}\setminus\omega_m^\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\Big|\frac{\partial u_m^\varepsilon(x_0)}{\partial x_i}\Big| \geq c_1 \min_{\overline{D}}|\nabla\psi(x)|,$$

где константа c_1 не зависит от $\varepsilon, x_0, \tau, m$. Из этой оценки, справедливой на сечении $t = m\tau$, также как в первой части теоремы, можно получить оценку (4.12) в $\overline{D_T^R}\backslash\omega^\varepsilon(x,t)$. □

Следствие 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.3. *Тогда существует такая положительная константа* c, *которая не зависит от* ε, *что имеет место оценка*

$$\|u^\varepsilon(x,t)\|_{W_2^{1,1}(\overline{D_T})} \leq c, \quad (4.16)$$

где константа c *не зависит* ε.

Доказательство. Умножим (2.3) на $u_t^\varepsilon(x,t)$ и проинтегрируем по частям $D_t = D\times(0,t)$. Это даст

$$0 = \int\limits_{D_t}\{b_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t))u_t^\varepsilon(x,t) - \Delta u(x,t)^\varepsilon(x,t)]u_t^\varepsilon(x,t)\}\,dx\,dt$$
$$= \int\limits_{D_t}\Big\{b_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t))[u_t^\varepsilon(x,t)]^2 - \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}[u_{x_i}^\varepsilon(x,t)u_t^\varepsilon(x,t)]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[u_{x_i}^\varepsilon(x,t)]^2\Big)\Big\}\,dx\,dt$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{2}\int\limits_D|\nabla u^\varepsilon(x,t)|^2\,dx + \int\limits_{D_t}b_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t))[u_t^\varepsilon(x,t)]^2\,dx\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_D|\nabla u_x^\varepsilon(x,0)|^2\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\partial D}\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial n}u_t^\varepsilon(x,t)\,ds\,dt.$$

Из (4.3) и (4.11) следует, что все слагаемые, стоящие справа, ограничены, а $b_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t)) \geq a_0$. Таким образом, оценка (4.16) доказана. □

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1 *и*

$$\tau^{\sigma-1/3} < \varepsilon^4 M^4(\varepsilon). \tag{4.17}$$

Тогда существует такая положительная константа c*, которая не зависит от* ε*, что имеет место оценка*

$$\Big\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon(x,t)}{\partial x_i^2}\Big\|_{C^\alpha(\overline{\omega_\pm^\varepsilon(x,t)})} \le c\max\Big\{\|\psi(x)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})}, \|\varphi(x,t)\|_{H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T})}\Big\}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Продифференцируем обе части уравнения (2.7) дважды по одной из переменных x_i. В результате получим

$$\Delta\frac{\partial^2 u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2} - \frac{\beta_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x))\frac{\partial^2 u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2} - \beta_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x))\frac{\partial^2 u_{k-1}^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2}}{\tau} = \frac{\partial^2 f_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2} + \frac{\beta'_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x))\big(\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i}\big)^2 - \beta'_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x))\big(\frac{\partial u_{k-1}^\varepsilon(x)}{\partial x_i}\big)^2}{\tau}.$$

Пусть точка $x_0 \in D$, $K_R(x_0) \subset D$. Преобразуем полученное уравнение к следующему виду:

$$\begin{aligned}\Delta\frac{\partial^2 u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2} &- \frac{\beta_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x_0))\frac{\partial^2 u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2} - \beta_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x_0))\frac{\partial^2 u_{k-1}^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2}}{\tau} \\ &= \frac{\partial^2 f_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2} + \frac{\beta'_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x))\big(\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i}\big)^2 - \beta'_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x))\big(\frac{\partial u_{k-1}^\varepsilon(x)}{\partial x_i}\big)^2}{\tau} \\ &\quad + \frac{1}{\tau}\Big\{[\beta_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x)) - \beta_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x_0))]\frac{\partial^2 u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2} \\ &\quad - [\beta_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x)) - \beta_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x_0))]\frac{\partial^2 u_{k-1}^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2}\Big\}.\end{aligned}$$

Пусть точка $x_0 \in D$, $K_R(x_0) \subset D$. Обозначим через $w_m(x) = \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2}$. Используем свойство 4 фундаментальных решений и построим интегральное представление $w_m(x)$ в точке x_0

$$w_m^\varepsilon(x_0) = \int\limits_{K_{R(x_0)}} b_\varepsilon(u_0(x_0))\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i^2}\frac{\Gamma_m(|x-x_0|)}{\tau}\,dx$$

$$
-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\partial K_R(x_0)} w_k^\varepsilon(x)\frac{\partial\Gamma_{m-k+1}}{\partial n}\,ds-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_R(x_0)}\frac{\partial^2 f_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i^2}\Gamma_{m-k+1}\,dx
$$

$$
-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_{R(x_0)}}\frac{\beta_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x))-\beta_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x_0))}{\tau}w_k^\varepsilon(x)\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx
$$

$$
+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_{R(x_0)}}\frac{\beta_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x))-\beta_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x_0))}{\tau}w_{k-1}^\varepsilon(x)\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx
$$

$$
-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_{R(x_0)}}\frac{b'_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x))\left(\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i}\right)^2}{\tau}-\frac{b'_\varepsilon(u_{k-1}^\varepsilon(x))\left(\frac{\partial u_{k-1}^\varepsilon(x)}{\partial x_i}\right)^2}{\tau}
$$

$$
\times\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx
$$

$$
=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6. \qquad (4.19)
$$

Оценим все интегралы, входящие в интегральное представление (4.19). Заметим, что оценки интегралов $I_k,\ k=1,2,3,4,5$ проводятся аналогично тому, как это сделано в интегральном представлении (4.14) при доказательстве теоремы 4.3. Поэтому достаточно оценить только I_6. Пусть

$$
F_k^\varepsilon(x)=b'_\varepsilon(u_k^\varepsilon(x))\Big(\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i}\Big)^2.
$$

Преобразуем I_6 следующим образом:

$$
I_6=-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_{R(x_0)}}\Big[\frac{F_k^\varepsilon(x)-F_k^\varepsilon(x_0)}{\tau}
-\frac{F_{k-1}^\varepsilon(x)-F_{k-1}^\varepsilon(x_0)}{\tau}\Big]\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx
$$

$$
-\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_{R(x_0)}}\frac{F_k^\varepsilon(x_0)-F_{k-1}^\varepsilon(x_0)}{\tau}\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx=I_6^1+I_6^2.
$$

Заметим, что из (2.6) следует

$$
\left|\frac{F_k^\varepsilon(x)-F_k^\varepsilon(x_0)}{\tau}-\frac{F_{k-1}^\varepsilon(x)-F_{k-1}^\varepsilon(x_0)}{\tau}\right|\le c_1\frac{|x-x_0|}{\varepsilon^4M^4(\varepsilon)},
$$

где константа c_1 не зависят от k,τ,ε. Оценим каждое слагаемое

$$
|I_6^1|\le\frac{c_1\tau^\sigma}{\varepsilon^3M^2(\varepsilon)}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{K_{R(x_0)}}\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\,dx\le\frac{c_1\tau^\sigma}{a_0\varepsilon^4M^4(\varepsilon)}.
$$

Второй интеграл сначала преобразуем

$$I_6^2 = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{F_k^\varepsilon(x_0) - F_{k-1}^\varepsilon(x_0)}{\tau} \Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)\, dx$$

$$= F_m^\varepsilon(x_0) \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\Gamma_1(|x-x_0|)}{\tau}\, dx$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} F_k^\varepsilon(x_0) \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|) - \Gamma_{m-k}(|x-x_0|)}{\tau}\, dx$$

$$- F_0^\varepsilon(x_0) \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\Gamma_m(|x-x_0|)}{\tau}\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} F_k^\varepsilon(x_0) \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\Delta\Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)}{\beta_k^\varepsilon(x_0)}\, dx$$

$$+ F_m^\varepsilon(x_0) \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\Gamma_1(|x-x_0|)}{\tau}\, dx - F_0^\varepsilon(x_0) \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\Gamma_m(|x-x_0|)}{\tau}\, dx$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{F_k^\varepsilon(x_0)}{\beta_k^\varepsilon(x_0)} \int\limits_{\partial K_{R(x_0)}} \frac{\partial \Gamma_{m-k+1}(|x-x_0|)}{\partial n}\, ds$$

$$+ F_m^\varepsilon(x_0) \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\Gamma_1(|x-x_0|)}{\tau}\, dx - F_0^\varepsilon(x_0) \int\limits_{K_{R(x_0)}} \frac{\Gamma_m(|x-x_0|)}{\tau}\, dx.$$

Теперь воспользуемся свойством 3.2. Это даст

$$|I_6^2| \le \frac{}{\varepsilon^2} \frac{Tc_1}{\tau M^2(\varepsilon)} \Big\{ \frac{1}{q^N \tau^\sigma} \exp\Big\{ -c_2 \frac{\tau^\sigma}{\sqrt{\tau}} \Big\} + \exp\Big\{ -\frac{T\pi^2}{\tau^{2\sigma} a_{\max}} \Big\} \Big\}$$

$$+ c_2 \Big(|b'_\varepsilon(u_m^\varepsilon(x)| \Big(\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i} \Big)^2 + |b'_\varepsilon(u_0^\varepsilon(x)| \Big(\frac{\partial u_0^\varepsilon(x)}{\partial x_i} \Big)^2 \Big)$$

$$\le \frac{c_3 \tau}{\varepsilon^2 M^2(\varepsilon)} + c_2 \Big(|b'_\varepsilon(u_m^\varepsilon(x)| \Big(\frac{\partial u_k^\varepsilon(x)}{\partial x_i} \Big)^2 + |b'_\varepsilon(u_0^\varepsilon(x)| \Big(\frac{\partial u_0^\varepsilon(x)}{\partial x_i} \Big)^2 \Big),$$

где константы c_2, c_3 не зависят от m, τ, ε.

Так же, как при доказательстве теоремы 4.3, сначала получим оценку

$$\Big| \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(x_0)}{\partial x_i^2} \Big| \le c(b_\varepsilon(u_0(x_0)) \max_{\overline{D}} \Big| \frac{\partial^2 u_0(x_0)}{\partial x_i^2} \Big|$$

$$+ c_2\Big(|b'_\varepsilon(u^\varepsilon_m(x)|\Big(\frac{\partial u^\varepsilon_k(x)}{\partial x_i}\Big)^2 + |b'_\varepsilon(u^\varepsilon_0(x)|\Big(\frac{\partial u^\varepsilon_0(x)}{\partial x_i}\Big)^2\Big).$$

Если $(x,t)\overline{\in}\omega_\varepsilon(x,t)$, то полученная оценка принимает вид

$$\Big|\frac{\partial^2 u^\varepsilon_m(x_0)}{\partial x_i^2}\Big| \le cb_\varepsilon(u_0(x_0))\max_{\overline{D}}\Big|\frac{\partial^2 u_0(x_0)}{\partial x_i^2}\Big| + c_2|b'_\varepsilon(u^\varepsilon_0(x)|\Big(\frac{\partial u^\varepsilon_0(x)}{\partial x_i}\Big)^2,$$

где константы c, c_2 не зависят от $\varepsilon, x_0, m, \tau$. Заметим, что на поверхностях $u^\varepsilon_m(x) = 1,\ u^\varepsilon_m(x) = 1+\varepsilon$, являющихся границей множества

$$\{x \in D : 1 < u^\varepsilon_m(x) < 1+\varepsilon\},$$

эта оценка принимает вид

$$\Big|\frac{\partial^2 u^\varepsilon_m(x_0)}{\partial x_i^2}\Big| \le c\Big(\max_{\overline{D}}\Big|\frac{\partial^2 u_0(x_0)}{\partial x_i^2}\Big| + \Big(\frac{\partial u^\varepsilon_0(x)}{\partial x_i}\Big)^2\Big).$$

Затем, используя (2.6) и (4.18), из этой оценки получим

$$\Big|\frac{\partial^2 u^\varepsilon(x,t)}{\partial x_i^2}\Big| \le cb_\varepsilon(u_0(x))\max_{\overline{D}}\Big|\frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i^2}\Big| + |b'_\varepsilon(u^\varepsilon_0(x)|\Big(\frac{\partial u^\varepsilon_0(x)}{\partial x_i}\Big)^2.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 4.1, можно получить равномерную оценку константы Гельдера для функции $\frac{\partial^2 u^\varepsilon(x,t)}{\partial x_i^2}$.

Уравнение (2.3) в областях $\omega^\varepsilon_\pm(x,t)$ при каждом фиксированном $t \in (0,T)$

$$\Delta u^\varepsilon(x,t) = a_\varepsilon(u^\varepsilon(x,t)\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t}$$

является уравнением Пуассона с правой частью, принадлежащей пространству $C^\alpha(\overline{D_T}\setminus\omega_\varepsilon(x,t))$, причем граница $\partial(\overline{D_T}\setminus\omega_\varepsilon(x,t)) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T})$, функция $\varphi(x,t) \in H^{r+\alpha,(r+\alpha)/2}(\overline{D_T})$. Поэтому из известных фактов теории эллиптических граничных задач следует

$$\big\|u^\varepsilon(x,t)\big\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\omega^\varepsilon_\pm(x,t)})} \le c\max\Big\{\|\psi(x)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})}, \|\varphi(x,t)\|_{H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T})}\Big\},$$

где константа c не зависит от ε, t. □

Теорема 4.5. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, граница которой состоит из двух $C^{2+\alpha}$ поверхностей ∂D_1 и ∂D_2 таких, что ∂D_1 лежит внутри ∂D_2, $D_T = D\times(0,T)$,*

$$\psi(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{D}), \quad \varphi(x,t) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T}),$$

$$\min_{\overline{D}} |\nabla\psi(x)| > 0, \qquad \min_{\partial D_2\times[0,T]} \varphi(x,t) > 1, \qquad \tau^{\sigma-1/3} < \varepsilon^4 M^4(\varepsilon),$$

выполнены соответствующие условия согласования при $t = 0,\ x \in \partial D$. *Тогда для функции* $u^\varepsilon(x,t)$, *являющейся решением задачи* (2.3)–(2.5), *имеют место оценки* (4.3), (4.7), (4.11), (4.12), (4.16), (4.18).

Доказательство. Равномерные оценки (4.3), (4.7), (4.11), (4.12), (4.16), (4.19) получены в предположении, что $\psi(x) \in C^{r+2}(\overline{D})$, $\varphi(x,t) \in H^{r+\alpha,(r+\alpha)/2}(\overline{D_T})$, где $r \geq 3$. Однако правые части этих оценок зависят только от норм $\|\psi(x)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})}$, $\|\varphi(x,t)\|_{H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T})}$. Поэтому во всех теоремах этого раздела можно избавиться от излишних требований гладкости функций $\psi(x)$, $\varphi(x,t)$. Для этого функции $\psi(x) \in C^{\alpha+2}(\overline{D})$, $\varphi(x,t) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T})$ аппроксимируем последовательностью функций $\{\psi_k(x)\} \in C^{r+2}(\overline{D})$, $\{\varphi_k(x,t)\} \in H^{r+\alpha,(r+\alpha)/2}(\overline{D_T})$, докажем указанные равномерные оценки для последовательности функций $\{u_k^\varepsilon(x,t)\}$, а затем в этих оценках совершим предельный переход. □

5. Предельный переход

Пусть выполнены условия теоремы 4.5. Из оценок (4.3), (4.11) следует, что $\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t}$ равномерно ограничена всюду в $\overline{D_T}$, а $|\nabla u^\varepsilon(x,t)|$ ограничен всюду в $\overline{D_T}$ за исключением множества $\omega^\varepsilon(x,0) \cap \omega^\varepsilon(x,t)$, мера которого стремится к нулю, если $\varepsilon \to 0$. Поэтому из семейства функций $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится почти всюду в D_T. Пусть

$$u(x,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(x,t).$$

В любой замкнутой подобласти области $D \setminus \gamma_0$ семейства функций $\{\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t}\}$, $\{|\nabla u^\varepsilon(x,t)|\}$ равномерно ограничены и последовательность $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ сходится равномерно. Предельная функция $u(x,t)$ будет равномерно непрерывной в области $D \setminus \gamma_0$. Поэтому функцию $u(x,t)$ можно продолжить на γ_0 и притом единственным образом так, что полученная функция будет непрерывной.

Пусть

$$\Omega_T = \{(x,t) \in D_T : 0 < u(x,t) < 1\},$$

$$G_T = \{(x,t) \in D_T : u(x,t) > 1\},$$

$$\gamma_T = \{(x,t) \in D_T : u(x,t) = 1\},$$

$$\gamma_T^+ = \partial G_T \cap D_T, \quad \gamma_T^- = \Omega_T \cap D_T.$$

Обратимся теперь к тождеству (2.2)

$$\int\limits_{D_T} \Big(\nabla u^\varepsilon(x,t)\nabla\eta(x,t) + a_\varepsilon(u^\varepsilon)\frac{\partial u^\varepsilon(x,t)}{\partial t}\eta(x,t) + \lambda\chi_\varepsilon(u^\varepsilon)\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big)\,dx\,dt + \lambda\int\limits_D \chi_\varepsilon(\psi)\eta(x,0)\,dx = 0.$$

Из (4.16) следует

$$\|u^\varepsilon(x,t)\|_{W_2^{1,1}(D_T)} \le c.$$

Поэтому последовательность $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ слабо сходится в $W_2^{1,1}(D_T)$ и сильно сходится в $L_2(D_T)$. Обозначим через $A_k = \{(x,t) \in D_T : u(x,t) > k\}$, $A_k^\circ = \{(x,t) \in D_T : u(x,t) = k\}$. Построим по $u(x,t)$ функцию $u_{(k)}(x,t) = \max\{u(x,t) - k, 0\}$. Тогда, как известно [23], если $u^\varepsilon(x,t)$ сходятся в $W_2^{1,1}(D_T)$ к $u(x,t)$, то $u^\varepsilon_{(k)}(x,t)$ сходятся в $W_2^{1,1}(D_T)$ к $u_{(k)}(x,t)$. Кроме того,

$$\mathrm{mes}[A_k \setminus A_k^\varepsilon \cap A_k] \to 0, \quad \mathrm{mes}[A_k^\varepsilon \setminus A_k^\varepsilon \cap (A_k \cup A_k^\circ] \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Учитывая вышесказанное, совершим предельный переход в тождестве (2.2). В результате получим

$$\int\limits_{D_T} \nabla u(x,t)\nabla\eta(x,t)\,dx\,dt + \int\limits_{\Omega_T} (a_1 - a_2)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\eta(x,t)\,dx\,dt + \int\limits_{D_T} a_2\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\eta(x,t)\,dx\,dt + \lambda\int\limits_{\Omega_T}\frac{\partial\eta}{\partial t}\,dx\,dt + \lambda\int\limits_{D_T^{(1)}} \lim_{\varepsilon\to 0}\chi_\varepsilon(u^\varepsilon)\frac{\partial\eta}{\partial t}\,dx\,dt + \lambda\int\limits_{\Omega_0}\eta(x,0)\,dx = 0, \tag{5.1}$$

где $D_T^{(1)} = \{(x,t) \in D_T : u(x,t) = 1\}$.

Пусть $0 < \delta < 1$ произвольное положительное число,

$$\Omega_T^\delta = \{(x,t) \in D_T : 0 < u(x,t) < 1 - \delta\}.$$

Тогда для достаточно малого ε имеет место

$$\overline{\Omega_T^\delta} \subset \omega_-^\varepsilon(x,t) = \{(x,t) \in D_T : 0 < u_\varepsilon(x,t) < 1\}.$$

Поэтому в $\overline{\Omega_T^\delta}$ и, следовательно, в любой замкнутой подобласти области Ω_T для семейства функций $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ имеют место все утверждения теоремы 4.5. Аналогичное утверждение справедливо и в области

G_T. Отсюда следует, что для предельной функции $u(x,t)$ имеют место оценки

$$\max_{0<t<T}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right\|_{C^\alpha(\Omega_T^t\cup G_T^t)} \le c\max\left\{\|\psi(x)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})},\ \|\varphi(x,t)\|_{H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T})}\right\}, \quad (5.2)$$

где Ω_T^t, G_T^t обозначают сечение областей Ω_T, G_T плоскостью $t=\mathrm{const}$,

$$\begin{gathered}\max_{\overline{D_T}}|\nabla u(x,t)| \le c\max\left\{\max_{x\in\overline{D}}|\nabla\psi(x)|,\ \max_{\overline{D_T}}|\nabla\varphi(x,t)|\right\},\\ \min_{D_T\setminus D_T^{(1)}}|\nabla u(x,t)|\ge c_1>0,\end{gathered} \quad (5.3)$$

$$\max_{\overline{D_T}}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right| \le c\max\left\{\max_{x\in\overline{D}}|\Delta\psi(x)|,\ \max_{\partial D_T}\left|\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\right|\right\}, \quad (5.4)$$

$$\max_{0<t<T}\left\|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\|_{C^\alpha(D_T^t)} \le c\max\left\{\|\psi(x)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})},\ \|\varphi(x,t)\|_{H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{D_T})}\right\}, \quad (5.5)$$

где c, c_1 некоторые положительные константы. Используя эти оценки, функцию $u(x,t)$ и ее производные можно продолжить на $\gamma_T^\pm$ единственным образом так, что продолженная функция и соответствующие производные будут непрерывными в $\Omega_T\cup\gamma_T^-$ и $G_T\cup\gamma_T^+$. Каждая точка поверхностей $\gamma_T^\pm$ обладает окрестностью, в которой одна из частных производных $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}$ отлична от нуля, например $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}$. Тогда в каждой окрестности уравнение поверхности можно представить в виде $x_1 = s(x_2,x_3,t)$, причем эта функция дифференцируема по t и при каждом фиксированном t $s(x_2,x_3,t)\in C^{2+\alpha}$. Из интегрального тождества следует

$$\Delta u(x,t) - a_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ в } \Omega_T, \quad \Delta u(x,t) - a_2\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ в } G_T,$$

$$\lambda\int\limits_{D_T^{(1)}}\lim_{\varepsilon\to 0}\chi_\varepsilon(u^\varepsilon)\frac{\partial\eta}{\partial t}\,dx\,dt = 0.$$

Так как $\eta(x,t)$ произвольная функция, равная нулю на $(\partial D_1\cup\partial D_2)\times(0,T)$, то из последнего равенства следует

$$\operatorname{mes}\left\{(x,t)\in D_T^{(1)} : \lim_{\varepsilon\to 0}\chi_\varepsilon(u^\varepsilon) > 0\right\} = 0.$$

После этого тождество (5.1) принимает вид

$$\int\limits_{D_T} \nabla u(x,t)\nabla\eta(x,t)\,dx\,dt + \int\limits_{\Omega_T} a_1\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\eta(x,t)\,dx\,dt$$
$$+ \int\limits_{D_T\setminus\Omega_T} a_2\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\eta(x,t)\,dx\,dt + \lambda\int\limits_{\Omega_T}\frac{\partial\eta}{\partial t}\,dx\,dt + \lambda\int\limits_{\Omega_0}\eta(x,0)\,dx = 0. \tag{5.6}$$

Отсюда следует

$$\Delta u(x,t) - a_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ в } \Omega_T, \quad \Delta u(x,t) - a_2\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ в } D\setminus\Omega_T = G_T,$$

$$\gamma^+ = \gamma^- = \partial\Omega_T\cap D_T = G_T\cap D_T = \gamma_T,$$

а на свободной границе γ_T выполнены условия

$$u^-(x,t) = u^+(x,t) = 1,$$
$$\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial u^-}{\partial x_i} - \frac{\partial u^+}{\partial x_i}\Big)\cos(n,x_i) + \lambda\cos(n,t) = 0, \tag{5.7}$$

где $u^-(x,t), u^+(x,t)$ обозначают граничные значения функции $u(x,t)$ на γ_T, взятые соответственно со стороны областей Ω_T, G_T, n — нормаль к поверхности Ω_T, G_T,направленная в сторону возрастания функции $u(x,t)$.

Докажем теперь, что производные $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}$ удовлетворяют условию Гельдера по t с показателем $1/2$. Области Ω_T и G_T удовлетворяют условию конуса, то есть существует фиксированный шаровой конус какой-либо высоты d такой, что в какую бы точку $\overline{\Omega_T}$ или $\overline{G_T}$ ни поместить его вершину, сам конус можно повернуть так, что он весь попадет Ω_T или G_T. Для произвольных точек x' и x'', принадлежащих $\overline{\Omega_T}$, справедливо соотношение

$$I = \int\limits_{x'}^{x''}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial l} - \frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\right]dl\Bigg|_{t'}^{t''}$$
$$= u(x'',t'') - u(x',t'') - u(x'',t') + u(x_1',t'), \tag{5.8}$$

В нем $\frac{\partial}{\partial l}$ означает дифференцирование вдоль отрезка $[x',x'']$. В силу (5.5) правая часть (5.8) не превосходит $c|t''-t'|$.

Из оценок (5.2), (5.4) следует

$$|I| \le c_1|t''-t'|, \qquad \left|\int\limits_{x'}^{x''}\left[\frac{\partial u(x,t')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\right]dl\right| \le c_2|x_1''-x_1'|^2. \quad (5.9)$$

Кроме того,

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''}\left[\frac{\partial u(x,t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\right]dl\right|$$

$$= \left|\int\limits_{x'}^{x''}\left[\frac{\partial u(x,t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t'')}{\partial l}\right]dl + \int\limits_{x'}^{x''}\left[\frac{\partial u(x',t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\right]dl\right|$$

$$= |I_1+I_2| \ge |I_2|-|I_1|. \quad (5.10)$$

$$|I_2| = |x''-x'|\left|\frac{\partial u(x',t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\right|. \quad (5.11)$$

Оценим сверху $|I_1|$. Функция $\frac{\partial u(x,t'')}{\partial l}$ при переходе через поверхность γ_T в сечении $t=t''$ вдоль отрезка $[x'x'']$ имеет разрыв типа скачка. Разобьём отрезок интегрирования на два: $[x',c_0]$ и $[c_0,x'']$, где c_0 — точка разрыва функции $\frac{\partial u(x,t'')}{\partial l}$. Поэтому, учитывая (5.2), получим

$$|I_2| \le \left|\int\limits_{x'}^{c_0}\left[\frac{\partial u(x,t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t'')}{\partial l}\right]dl\right|$$

$$+\left|\int\limits_{c_0}^{x''}\left[\frac{\partial u(x,t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t'')}{\partial l}\right]dl\right| \le c|x''-x'|^2, \quad (5.12)$$

где c — положительная константа, зависящая от $\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\|_{C^\alpha(\Omega_T^t\cup G_T^t)}$.

Из (5.10)–(5.12) получим

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''}\left[\frac{\partial u(x,t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\right]dl\right|$$

$$\ge |x''-x'|\left|\frac{\partial u(x',t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\right| - c|x''-x'|^2.$$

Отсюда следует

$$\Big|\frac{\partial u(x',t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\Big|$$
$$\leq\frac{1}{|x''-x'|}\left|\int\limits_{x'}^{x''}\left[\frac{\partial u(x,t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\right]dl\right|+c|x''-x'|. \quad (5.13)$$

Учитывая (5.8), оценим интеграл, стоящий в правой части неравенства (5.13),

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''}\left[\frac{\partial u(x,t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\right]dl\right|$$
$$\leq\left|\int\limits_{x'}^{x''}\left[\frac{\partial u(x,t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x,t')}{\partial l}\right]dl\right|+\left|\int\limits_{x'}^{x''}\left[\frac{\partial u(x,t')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\right]dl\right|$$
$$\leq c_1|t''-t'|+c_2|x''-x'|^2.$$

Из (5.12) в результате получим

$$\Big|\frac{\partial u(x',t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\Big|\leq\mu_1\frac{|t''-t'|}{|x''-x'|}+\mu_2|x''-x'|.$$

Считая x' вершиной конуса, минимизируем правую часть по x'' вдоль отрезка какого-либо луча l длины d, принадлежащего конусу. В результате получим

$$\Big|\frac{\partial u(x',t'')}{\partial l}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial l}\Big|\leq\left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}+\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\right)|t'-t''|^{1/2}\leq c|t'-t''|^{\alpha/2},$$
$$\alpha\in(0,1).$$

Так как луч l можно выбрать произвольно направленным внутри конуса, то отсюда и следует наше утверждение

$$\Big|\frac{\partial u(x',t'')}{\partial x_i}-\frac{\partial u(x',t')}{\partial x_i}\Big|\leq c|t'-t''|^{\alpha/2}. \quad (5.14)$$

Пусть $(x^0,t_0)\in\gamma_T$, одна из частных производных $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}$ отлична от нуля, например $\frac{\partial u(x^0,t_0)}{\partial x_3}\neq 0$. Тогда на основании теоремы о неявной функции существует такая окрестность

$$\Delta=\{|x_1-x_1^0|<b_1,\ |x_2-x_2^0|<b_1,\ |x_3-x_3^0|<b_3,\ |t-t_0|<\delta\},$$

вырезающая из γ_T часть поверхности, описываемую функцией

$$x_3=s(x_1,x_2,t),$$

$$(x_1, x_2, t) \in \Delta' = \{|x_1 - x_1^0| < b_1,\ |x_2 - x_2^0| < b_1,\ |t - t_0| < \delta\}.$$

Из (5.7) и (5.14) следует, что $s(x_1, x_2, t) \in H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\Delta')$.

Таким образом, имеет место теорема 1.1.

Литература

[1] О. А. Олейник, *О методе решения общей проблемы Стефана* // ДАН СССР, **135** (1960), No. 5, 1054–1057.

[2] S. Kamenomostkaya, *On the Stefan problem* // Math. Sb., **5** (1961), 489–514.

[3] G. Duvaut, *Resolution d'un probleme de Stefan* // C. R. Acad. Sc. Paris, **276 A** (1973), 1461–1463.

[4] A. Friedman, D. Kinderlehrer, *A one phase Stefan problem* // Indiana Univ. Math. J., **24** (1975), 1005–1035.

[5] L. A. Caffarelli, *The smoothness of the free serfase in a filtration problem* // Arch. Rat. Mech. Anal., **63** (1976), No. 1, 77–86.

[6] L. A. Caffarelli, *The regularity of elliptic and parabolic free boundaries* // Bull. Amer. Math. Soc., **82** (1976), 616–618.

[7] L. A. Caffarelli, *The regularity of free boundaries in higher dimensions* // Acta Math., **139** (1977), 156–184.

[8] D. Kinderlehrer, L. Nirenberg, *The smoothness of the free boundary in the one phase Stefan problem* // Comm. Pure Appl. Math., **31** (1978), 257–282.

[9] A. M. Meirmanov, *The Stefan problem*, Novosibirsk, Nauka,1986.

[10] М. А. Бородин, *О разрешимости двухфазной нестационарной задачи Стефана* // ДАН СССР, **263** (1982), No. 5, 1040–1042.

[11] Ei Hanzava, *Classical solution of the Stefan problem* //Tohoku math. J., **33** (1981), 297–335.

[12] Б. В. Базалий, *Проблема Стефана* // ДАН Укр., **Ser. A** (1986), No. 1, 3–7.

[13] Е. В. Радкевич, *Спектр пучка двухфазных задач Стефана* //ДАН СССР, **316** (1990), No. 6, 1322–1327.

[14] R. H. Nochetto, *A class of non-gegenerate two-phase Stefan problems in several variables* // Communications in PDE, **12** (1987), No. 1, 21–45.

[15] J. Athanasopoulos, L. Caffarelli, S. Salsa, *Regularity of the free boundary in parabolic phase transition problems* // Acta Math., **176(2)** (1996), 245–282.

[16] I. Athanasopoulos, L. A. Caffarelli, S. Salsa, *Stefan-like problems with curvature* // J. Geom. Anal., **13** (2003), No. 1, 21–27.

[17] M. A. Borodin, *The Stefan problem with surface tension* // Ukr. Mat. Visn., **1** (2004), No. 1, 47-–60; translation in Ukr. Math. Bull., **1** (2004), No. 1, 53-–65.

[18] J. Pruss, G. Simonett, *Stability of equilibria for the Stefan problem with surface tension* // SIAM J. Math. Anal., **40** (2008), No. 2, 675–698.

[19] D. A. Tarzia, C. V. Turner, *The asymptotic behavior for the two-phase Stefan problem with a convective boundary condition* // J. Commun. Appl. Anal., **7** (2003), No. 3, 313–334.

[20] И. И. Данилюк, *Проблема Стефана* // УМН, **40(5)** (1985), 133–185.

[21] S. C. Gupta, *The classical Stefan problem*, North Holand series in Applied mathematics and mechanics, **45**, Elsevier, 2003.

[22] M. A. Borodin, *Existence of the clobal classical solution for a two-phase Stefan problem* // SIAM J. Math. Anal., **30** (1999), No. 6, 1264–1281.

[23] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Москва, Наука, 1973.

[24] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Москва, Наука, 1967.

[25] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, Москва, Ленинград, ГИТТЛ, 1950.

Сведения об авторах

Михаил А. Бородин

Донецкий национальный университет
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: `bma@telenet.dn.ua`