Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 4, 516 – 552

Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами

Владислав А. Літовченко, Ірина М. Довжицька

(*Представлена А. Є. Шишковим*)

Анотація. Побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші та досліджено її основні властивості для нового класу лінійних параболічних систем з гладкими обмеженими змінними коефіцієнтами, який охоплює клас параболічних за Шиловим систем диференціальних рівнянь із частинними похідними з невід'ємним родом.

2010 MSC. 35K41, 35A08.

Ключові слова та фрази. Фундаментальна матриця розв'язків, задача Коші, параболічні системі типу Шилова.

Вступ

Теорія параболічних рівнянь із частинними похідними бере свій початок фактично з класичного рівняння теплопровідності, але найбільш чітких рис вона набула з виходом у 1938 р. фундаментальної праці І. Г. Петровського [1], пов'язаної з описом та дослідженням досить широкого класу лінійних систем диференціальних рівнянь із частинними похідними з коефіцієнтами, незалежними від просторової змінної. У подальшому вивчення цього класу систем проходило досить інтенсивно; дослідження І. Г. Петровського були продовжені у відомих працях ряду авторів, і поширені на параболічні системи із змінними коефіцієнтами, залежними як від часу, так і від просторових змінних (див., наприклад, у [2, 3]).

У 1955 р. Г. Є. Шилов дає нове означення параболічної системи [4], яке узагальнює поняття параболічності за І. Г. Петровським і

Стаття надійшла в редакцію 22.06.2010

ISSN 1810 – 3200.

призводить до істотного розширення класу Петровського систем першого порядку за часовою змінною із сталими коефіцієнтами.

Дослідження параболічних за Г. Є. Шиловим систем проводилось у багатьох працях, зокрема, в [5–7], при цьому основна увага приділялась лише випадку сталих коефіцієнтів. Це, насамперед, пояснюється тим, що параболічні системи Г. Є. Шилова, на відміну від систем І. Г. Петровського, взагалі кажучи, не є стійкими в сенсі параболічності до зміни коефіцієнтів, навіть тих, що знаходяться при нульовій похідній [8].

У [9] Я. І. Житомирський вдало використовуючи поняття головної частини системи, означує новий клас параболічних систем типу Шилова із змінними молодшими коефіцієнтами (залежними лише від просторових змінних): головна частина кожної з таких систем є параболічним за Г. Є. Шиловим матричним диференціальним виразом із сталими коефіцієнтами. Зазначений клас не лише розширює клас параболічних за Г. Є. Шиловим систем, але й гармонічно доповнює клас Петровського систем із змінними коефіцієнтами. Для таких систем методом послідовного наближення встановлено існування розв'язку задачі Коші у випадку, коли початкові дані є гладкими обмеженими функціями, і, відтак доведено єдиність цього розв'язку в класі обмежених функцій. Подальше дослідження задачі Коші для систем з цього класу потребує побудови фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) та всебічного її вивчення.

У даній роботі, розвиваючи класичні методи теорії параболічних систем із змінними коефіцієнтами, проведено повний аналітичний опис ФМРЗК для параболічних систем типу Шилова із невід'ємним родом та обмеженими гладкими змінними молодшими коефіцієнтами (залежними від часу та просторових змінних), а також досліджено її основні властивості.

1. Допоміжні відомості. Постановка задачі

Нехай T — фіксоване число з $(0;+\infty)$, $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел; $\mathbb{N}_m := \{1;\ldots;m\}$; $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ — відповідно дійсний і комплексний простори розмірності $n \geq 1$; $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$, $\mathbb{C} := \mathbb{C}^1$; $\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$; i — уявна одиниця; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^n$; $\|x\| := (x,x)^{1/2}$ для $x \in \mathbb{R}^n$; $|x+iy| := (x^2+y^2)^{1/2}$, якщо $\{x,y\} \subset \mathbb{R}$; $|z|_* := |z_1|+\cdots+|z_n|$, $z^l := z_1^{l_1}\ldots z_n^{l_n}$, якщо $z := (z_1;\ldots;z_n) \in \mathbb{C}^n$, $l := (l_1;\ldots;l_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; $\Pi_M := \{(t;x)|\ t \in M, x \in \mathbb{R}^n\}$, $M \subset \mathbb{R}$, $\Pi_T^2 := \{(t,x;\tau,\xi)|\ 0 \leq \tau < t \leq T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n\}$; S — простір Л. Шварца нескінченно диференційовних швидкоспадних функцій, визначених на $\mathbb{R}^n$, а S' — відповідний топологічно спряжений з S простір [10].

У просторі S визначені неперервні операції додавання, множення та згортки

$$(\varphi * \psi)(\cdot) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\cdot - \xi)\psi(\xi)d\xi, \ \{\varphi, \psi\} \subset S,$$

а також перетворення Фур'є F [10]. Відомо, що $F[S] = S$, де

$$F[X] := \{\psi | \ \psi(\cdot) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{i(\cdot,x)}dx, \ \varphi \in X\},$$

при цьому оператор F відображає простір S у S взаємно однозначно та неперервно.

Пряме й обернене перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ означуються формулами

$$\langle F[f], F[\varphi]\rangle := (2\pi)^n\langle f, \varphi\rangle, \quad \langle F^{-1}[f], F^{-1}[\varphi]\rangle := (2\pi)^{-n}\langle f, \varphi\rangle, \quad \varphi \in S$$

(тут дужками $\langle \ , \ \rangle$ позначено результат дії функціонала на основну функцію).

Нехай далі m — фіксований елемент множини $\mathbb{N}$. Позначимо через $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}'$ декартові степені з показником m просторів S і S' з покомпонентною збіжністю відповідно в S та S'; через $\mathrm{P}(\mathbb{S})$ — множину всіх квадратних матриць порядку m, стовпцями яких є елементи $\mathbb{S}$ (також з поелементною збіжністю в просторі S). Згорткою матричних елементів $\varphi = (\varphi_{lj})_{l,j=1}^{m,k}$ і $\psi = (\psi_{lj})_{l,j=1}^{k,n}$, позначатимемо $\varphi * \psi$, назвемо матричний елемент $g = (g_{lj})_{l,j=1}^{m,n}$ такий, що $g_{lj} := \sum_{r=1}^{k} \varphi_{lr} * \psi_{rj}$. Очевидно, що якщо $\varphi \in \mathbb{S}$, $\{g, g_0\} \subset \mathrm{P}(\mathbb{S})$, то $g * \varphi \in \mathbb{S}$ і $g * g_0 \in \mathrm{P}(\mathbb{S})$, а

$$F[g * \varphi] = F[g]F[\varphi], \quad F[g * g_0] = F[g]F[g_0],$$

де $F[(\psi_{lj})_{l,j=1}^{k,n}] = (F[\psi_{lj}])_{l,j=1}^{k,n}$.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із частинними похідними порядку p

$$\partial_t u_j(t;x) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{|k|_* \le p} a_k^{lj}(t;x) i^{|k|_*} \partial_x^k u_l(t;x), \quad j \in \mathbb{N}_m, (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{1.1}$$

таку, що її права частина допускає зображення

$$\sum_{l=1}^{m} \sum_{|k|_* \le p} a_k^{lj}(t;x) i^{|k|_*} \partial_x^k u_l(t;x) = \sum_{l=1}^{m} \{P_0^{lj}(i\partial_x) + P_1^{lj}(t,x;i\partial_x)\} u_l(t;x),$$

де

$$P_0^{lj}(i\partial_x) := \sum_{|k|_*\le p} a_{0,k}^{lj} i^{|k|_*}\partial_x^k, \quad P_1^{lj}(t,x;i\partial_x) := \sum_{|k|_*\le p_1} a_{1,k}^{lj}(t;x) i^{|k|_*}\partial_x^k,$$

причому відповідна система

$$\partial_t u_j(t;x) = \sum_{l=1}^{m} P_0^{lj}(i\partial_x) u_l(t;x), \quad j\in\mathbb{N}_m, (t;x)\in\Pi_{(0;T]}, \tag{1.2}$$

є параболічною за Шиловим у шарі $\Pi_{(0;T]}$ з показником параболічності h, $0<h\le p$, та невід'ємним родом μ [5].

Крім цього, вважатимемо, що для системи (1.1) виконуються ще такі умови:

A) $0\le p_1 < h - n(1-h\mu/p_0) - (m-1)(p-h),\ 0\le\mu\le 1$ (тут p_0 — зведений порядок системи (1.2));

B) коефіцієнти $a_{1,k}^{lj}(t,x)$ є неперервними за змінною t, нескінченно диференційовними за змінною x і обмеженими разом із своїми похідними комплекснозначними функціями в шарі $\Pi_{[0;T]}$.

Прикладом системи (1.1) при $m=n=1$ є рівняння

$$\partial_t u(t;x) = \left(a\partial_x^3 + b\partial_x^2 + c\partial_x + \frac{\sin(tx)}{1+x^2}\right)u(t;x), \quad t\in(0;T],\ x\in\mathbb{R}, \tag{1.3}$$

де $\{a,c\}\subset\mathbb{R}$, $a\ne 0$, $b>0$. Відповідним, параболічним за Шиловим рівнянням, є

$$\partial_t u(t;x) = \left(a\partial_x^3 + b\partial_x^2 + c\partial_x\right)u(t;x), \quad t\in(0;T],\ x\in\mathbb{R},$$

для якого $p=p_0=3$, $h=2$, а $\mu\ge 0$.

Зазначимо, що рівняння (1.3) не відноситься ні до класу рівнянь, параболічних за Петровським (тому, що має непарний порядок), ні до класу рівнянь, параболічних за Шиловим (оскільки один із його коефіцієнтів є функцією, залежною від x).

Означення 1.1. *ФМРЗК для системи* (1.1) *називається функціональна матриця* $Z(t,x;\tau,\xi)$ *розмірності* $m\times m$, *визначена для всіх* $(t;x)\in\Pi_{(\tau;T]}$ *і залежна від параметричної точки* $(\tau;\xi)\in\Pi_{[0;T)}$ *така, що:*

1) Z *як функція* $(t;x)$ *задовольняє систему* (1.1) *в шарі* $\Pi_{(\tau;T]}$, $\tau\in[0;T)$*;*

2) *виконується граничне співвідношення*

$$Z(t,x;\tau,\cdot)\underset{t\to\tau+0}{\longrightarrow}\delta(\cdot-x)I$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі S' розподілів Шварца (тут I — одинична матриця порядку m, а $\delta(\cdot)$ — дельта-функція Дірака).

Позначимо ФМРЗК для системи (1.2) через $G(t;\cdot)$, $t\in(0;T]$. Правильне таке твердження [9]:

$$\forall T>0\ \exists\delta>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+^n\ \exists c>0\ \forall t\in(0;T]\ \forall x\in\mathbb{R}^n:$$

$$|\partial_x^k G(t;x)|\le ct^{-\frac{n+|k|_*+\gamma}{h}}e^{-\delta\left(\frac{\|x\|}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\tag{1.4}$$

$$\gamma:=(m-1)(p-h),\ \alpha:=\mu/p_0.$$

2. Побудова та дослідження властивостей ФМРЗК

Згідно з методом Леві, шукатимемо ФМРЗК для системи (1.1) у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi)=G(t-\tau;x-\xi)+\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}G(t-\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)\,dy$$

$$\equiv G(t-\tau;x-\xi)+W(t,x;\tau,\xi),\tag{2.1}$$

де G — ФМРЗК для системи (1.2), а Φ — деяка функціональна матриця розмірності $m\times m$. Виберемо Φ так, щоб матриця Z була розв'язком системи (1.1). Для цього, користуючись безпосередньо означенням розв'язку диференціальної системи, в результаті формальних перетворень одержимо інтегральне рівняння

$$\Phi(t,x;\tau,\xi)=K(t,x;\tau,\xi)+\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}K(t,x;\beta,y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)\,dy,\tag{2.2}$$

в якому

$$K(t,x;\tau,\xi):=P_1(t,x;i\partial_x)G(t-\tau;x-\xi),$$

$$P_1(t,x;i\partial_x):=\left(P_1^{lj}(t,x;i\partial_x)\right)_{l,j=1}^m.$$

Розв'язуючи зазначене рівняння методом послідовних наближень, одержимо такий його формальний розв'язок:

$$\Phi(t,x;\tau,\xi)=\sum_{l=1}^\infty K_l(t,x;\tau,\xi),\tag{2.3}$$

де $K_1 = K$, а

$$K_l(t,x;\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,y) K_{l-1}(\beta,y;\tau,\xi)\, dy, \quad l > 1.$$

Для встановлення збіжності ряду (2.3) та обґрунтування коректності здійснених раніше перетворень, дослідимо спочатку властивості повторних ядер K_l.

Згідно з оцінкою (1.4) та обмеженістю коефіцієнтів $a_{1,k}^{lj}$ на множині $\Pi_{(0;T]}$, маємо

$$|K_1(t,x;\tau,\xi)| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2. \quad (2.4)$$

Скориставшись оцінкою (2.4) та нерівністю

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-n\alpha} e^{-\delta\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}} dy$$
$$\le \frac{c_\varepsilon}{(t-\tau)^{n\alpha} e^{\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}}, \quad \delta > 0, \quad (2.5)$$

яка виконується для всіх $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\beta \in (\tau;t)$, $0 \le \tau < t \le T$ і $\varepsilon \in (0;1)$, причому величина c_ε залежить лише від ε (див. твердження леми 7 з [3, с. 312]), одержимо

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \le mc^2 \int\limits_{\tau}^{t} \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}}$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}} dy\, d\beta$$
$$\le mc^2 c_\varepsilon \big(t-\tau\big)^{-\alpha n} e^{-\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \int\limits_{\tau}^{t} \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} d\beta,$$
$$(t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2, \ \varepsilon \in (0;1).$$

Зазначимо, що підінтегральна функція в останньому інтегралі має особливість у кожній із меж інтегрування; однак, з огляду на умову А), ця особливість є інтегровною. Оскільки

$$\int\limits_{\tau}^{t} \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} d\beta = (t-\tau)^{1+2\left(\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h}\right)} B(\alpha_0,\alpha_0), \quad (2.6)$$

де $\alpha_0 := 1 + \alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h} > 0$, а $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функція Ейлера, то

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \le mc^2 c_\varepsilon B(\alpha_0,\alpha_0)(t-\tau)^{\alpha_0 - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} e^{-\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$
$$(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2,\ \varepsilon\in(0;1).$$

Продовжуючи аналогічні роздуми крок за кроком, для $l\in\mathbb{N}_m$, $0\le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ і $\varepsilon\in(0;1)$ одержимо

$$|K_l(t,x;\tau,\xi)| \le m^{l-1}c^l\left(\prod_{j=1}^{l-1} c_{(j\varepsilon)}B(\alpha_0,j\alpha_0)\right)$$
$$\times (t-\tau)^{(l-1)\alpha_0 - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \quad (2.7)$$

Звідси, врахувавши рівність $(l-1)\alpha_0 - \frac{n+p_1+\gamma}{h} = l\alpha_0 - (1+\alpha n)$ і поклавши $l_* := \left[\frac{1+\alpha n}{\alpha_0}\right]+1$ (тут $[\,\cdot\,]$ — ціла частина числа), та $\varepsilon := \frac{1}{r_* l_*}$, $\delta_* := \delta(1-\frac{1}{r_*})$, $r_*>2$, приходимо до існування сталої c_*, $c_*\ge mc$, такої, що для всіх $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $0\le\tau<t\le T$ правильними є такі оцінки:

$$|K_l(t,x;\tau,\xi)| \le c_*(t-\tau)^{l\alpha_0-(1+\alpha n)} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad l\in\mathbb{N}_{l_*-1}; \quad (2.8)$$

$$|K_{l_*}(t,x;\tau,\xi)| \le c_* e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \quad (2.9)$$

Повторні ядра K_l при $l>l_*$ оцінюватимемо так:

$$|K_{l_*+1}(t,x;\tau,\xi)| \le m\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} |K_1(t,x;\beta,y)||K_{l_*}(\beta,y;\tau,\xi)|\,dy$$
$$\le mcc_*\int_\tau^t (t-\beta)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - \delta_*\left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\,dy\,d\beta$$
$$\le c_*^2\int_\tau^t (t-\beta)^{\alpha_0-1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta_*\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}}$$
$$\times e^{-\frac{\delta}{r_*}\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\frac{dy}{(t-\beta)^{\alpha n}}\,d\beta.$$

Відтак, скориставшись нерівністю (див. [3, с. 312])

$$e^{-\delta_*\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}} \le e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \quad (2.10)$$

та зваживши на

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{r_*}\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{dy}{(t-\beta)^{\alpha n}} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{r_*}\|z\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} dz < +\infty, \tag{2.11}$$

а також на те, що

$$\int\limits_{\tau}^{t} (t-\beta)^{\alpha_0-1}\, d\beta = (t-\tau)^{\alpha_0} B(\alpha_0, 1), \tag{2.12}$$

одержуємо оцінку

$$|K_{l_*+1}(t,x;\tau,\xi)| \le c_*^2 E B(\alpha_0,1)(t-\tau)^{\alpha_0} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

$$E := \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{r_*}\|z\|^{\frac{1}{1-\alpha}}} dz.$$

Нехай тепер

$$|K_{l_*+l}(t,x;\tau,\xi)| \le c_*\big(c_* E(t-\tau)^{\alpha_0}\big)^l e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \prod_{j=0}^{l-1} B(\alpha_0, 1+j\alpha_0),$$

$$(t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2. \tag{2.13}$$

Тоді для всіх $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ і $0 \le \tau < t \le T$

$$|K_{l_*+l+1}(t,x;\tau,\xi)| \le m \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K_1(t,x;\beta,y)||K_{l_*+l}(\beta,y;\tau,\xi)|\, dy$$

$$\le c_*^2 (c_* E)^l \left(\prod_{j=0}^{l-1} B(\alpha_0, 1+j\alpha_0)\right) \int\limits_{\tau}^{t} (t-\beta)^{\alpha_0-1}(\beta-\tau)^{l\alpha_0}$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta_*\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{\|y-\xi\|}{(\beta-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}} e^{-\frac{\delta}{r_*}\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{dy}{(t-\beta)^{\alpha n}}\, d\beta$$

$$\le c_*\big(c_* E(t-\tau)^{\alpha_0}\big)^{l+1} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \prod_{j=0}^{l} B(\alpha_0, 1+j\alpha_0).$$

Звідси, згідно з методом математичної індукції, приходимо до виконання оцінки (2.13) для всіх $l \in \mathbb{N}$.

Одержані оцінки (2.8), (2.9), (2.13) дозволяють сформулювати таке допоміжне твердження.

Лема 2.1. *Для всіх* $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau;T]$ *і* $\tau \in [0;T)$ *матричний функціональний ряд* (2.3) *є абсолютно збіжним рядом, для суми якого справджується нерівність*

$$|\Phi(t,x;\tau,\xi)| \leq c_0(t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n)} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

(*тут константа* $c_0 > 0$ *залежить лише від* T).

Доведення. Згідно з відомою рівністю

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a>0,\ b>0,$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гама-функція Ейлера, одержуємо, що

$$\prod_{j=0}^{l-1} B(\alpha_0, 1+j\alpha_0) = \frac{\big(\Gamma(\alpha_0)\big)^l}{\Gamma(1+l\alpha_0)}. \tag{2.14}$$

Звідси, врахувавши оцінки (2.8), (2.9), (2.13), маємо

$$\begin{aligned}
|\Phi(t,x;\tau,\xi)| &\leq c_*\Bigg(\sum_{l=1}^{l_*}(t-\tau)^{l\alpha_0-(1+\alpha n)} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{\infty}\Big(c_*E(t-\tau)^{\alpha_0}\Big)^l \prod_{j=0}^{l-1} B(\alpha_0,1+j\alpha_0)\Bigg) e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \\
&\leq c_* l_*(t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n)}\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\big(c_*ET^{\alpha_0}\Gamma(\alpha_0)\big)^l}{\Gamma(1+l\alpha_0)}\right) e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \\
&\qquad (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2.
\end{aligned}$$

Відтак, зваживши на збіжність додатного числового ряду $\sum_{l=1}^{\infty}\frac{A^l}{\Gamma(1+l\alpha_0)}$, $A>0$, приходимо до твердження леми 2.1.

Лему доведено. □

Наслідок 2.1. *Матрична функція* Φ, *яка визначається рівністю* (2.3), *є звичайним розв'язком інтегрального рівняння* (2.2).

Твердження цього наслідку стає очевидним виходячи із структури рівняння (2.2) та зображення (2.3) функції Φ, якщо врахувати рівність

$$\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,y)\left(\sum_{l=1}^{\infty} K_l(\beta,y;\tau,\xi)\right) dy$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,y) K_l(\beta,y;\tau,\xi)\, dy,$$

у правильності якої легко переконуємось, зважаючи на одержані оцінки повторних ядер, лему 2.1 та відповідне твердження з [11, с. 697].

Зазначимо також, що твердження леми 2.1 разом із оцінкою (1.4) забезпечують абсолютну збіжність інтеграла, яким визначається потенціал W з рівності (2.1), для всіх $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ і $0 \le \tau < t \le T$. Таким чином, матрична функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ коректно визначена формулою (2.1) на всій множині Π_T^2.

Перейдемо до дослідження властивостей гладкості функції Z. Для цього, передусім, оцінимо похідні від повторних ядер K_l.

Оскільки

$$K_1(t,x;\tau,\xi) = P_1(t,x;i\partial_{(x-\xi)}) G(t-\tau;x-\xi),$$

то

$$\begin{aligned} &|\partial_x^q \partial_\xi^r K_1(t,x;\tau,\xi)| \\ &\quad = \Bigg| \sum_{|k|_* \le p_1} \Bigg(\sum_{|g|_* \le |q|_*} C_q^g \big(\partial_x^g A_{1,k}(t;x)\big) \big(\partial_{(x-\xi)}^{k+r+q-g} G(t-\tau;x-\xi)\big) \Bigg) \Bigg|, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \{q,r\} \in \mathbb{Z}_+^n, \end{aligned}$$

де $A_{1,k}(t;x) := \big(a_{1,k}^{lj}(t;x)\big)_{l,j=1}^m$, а $C_q^g := \prod_{j=1}^n C_{q_j}^{g_j}$ — біноміальний коефіцієнт.

Звідси, зваживши на умову B) та оцінку (1.4), одержимо

$$\begin{aligned} &|\partial_x^q \partial_\xi^r K_1(t,x;\tau,\xi)| \le c_{q,r} (t-\tau)^{-\frac{n+p_1+\gamma+|q+r|_*}{h}} e^{-\delta \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \{q,r\} \in \mathbb{Z}_+^n,\ (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2 \end{aligned}$$

(тут оціночні сталі не залежать від t, τ, x і ξ).

При $l > 1$ користуватимемося очевидним зображенням

$$K_l(t,x;\tau,\xi) = \int_{\tau}^{t_1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,\eta+\xi) K_{l-1}(\beta,\eta+\xi;\tau,\xi)\, d\eta$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,x;\beta,x-z) K_{l-1}(\beta,x-z;\tau,\xi)\, dz, \quad t_1 := \tau + \frac{1}{2}(t-\tau),$$

згідно з яким

$$
\begin{aligned}
&\partial_x^q \partial_\xi^r K_l(t,x;\tau,\xi) \\
&\qquad = \sum_{|r_1|_* \le |r|_*} \Bigg(C_r^{r_1} \int\limits_\tau^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_\xi^{r_1} \partial_x^q K_1(t,x;\beta,\eta+\xi)\big) \\
&\qquad\qquad \times \big(\partial_\xi^{r-r_1} K_{l-1}(\beta,\eta+\xi;\tau,\xi)\big)\, d\eta \Bigg) \\
&\qquad + \sum_{|q_1|_* \le |q|_*} \Bigg(C_q^{q_1} \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_x^{q_1} K_1(t,x;\beta,x-z)\big) \\
&\qquad\qquad \times \big(\partial_\xi^r \partial_x^{q-q_1} K_{l-1}(\beta,x-z;\tau,\xi)\big)\, dz \Bigg). \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Таким чином, оцінювання $|\partial_x^q \partial_\xi^r K_l(t,x;\tau,\xi)|$ зводиться до оцінювання виразів

$$
|\partial_\xi^r \partial_x^q K_1(t,x;\tau,\eta+\xi)|, \quad |\partial_x^q K_1(t,x;\tau,x-z)|,
$$
$$
|\partial_\xi^r \partial_x^q K_{l-1}(t,x-z;\tau,\xi)|, \quad |\partial_\xi^r K_{l-1}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)|.
$$

Урахувавши обмеженість похідних від коефіцієнтів $a_k^{lj}(t;\cdot)$ системи (1.1) та оцінку (1.4), для всіх $\{q,r\} \in \mathbb{Z}_+^n,\ \{x,\eta,\xi\} \in \mathbb{R}^n,\ t \in (\tau;T]$ і $\tau \in [0;T)$ маємо:

$$
\begin{aligned}
&\big|\partial_\xi^r \partial_x^q K_1(t,x;\tau,\eta+\xi)\big| \\
&\le m \sum_{|k|_* \le p_1} \sum_{|q_1|_* \le |q|_*} C_q^{q_1} \big|\partial_x^{q_1} A_{1,k}(t;x)\big| \big|\partial_{(x-\eta-\xi)}^{k+r+q-q_1} G(t-\tau;x-\eta-\xi)\big| \\
&\qquad \le c_{r,q}(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+\gamma+|r+q|_*}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|x-\eta-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}; \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\big|\partial_x^q K_1(t,x;\tau,x-\xi)\big| = \Bigg|\partial_x^q \Bigg(\sum_{|k|_* \le p_1} A_{1,k}(t;x) \partial_x^k G(t-\tau;\xi) \Bigg)\Bigg| \\
&\quad \le m \big|\partial_x^q A_{1,0}(t;x)\big| \big|G(t-\tau;\xi)\big| \le \widehat{c}_q (t-\tau)^{-\frac{n+\gamma}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \\
&\qquad \le c_q (t-\tau)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Перейдемо до оцінювання виразу $\big|\partial_\xi^r K_l(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\big|$. Зваживши на рівності

$$\partial^k_{\eta+\xi} G(t-\tau;\eta) = \partial^k_y G(t-\tau; y-\xi)\Big|_{y=\eta+\xi}$$
$$= \partial^k_{y-\xi} G(t-\tau; y-\xi)\Big|_{y=\eta+\xi} = \partial^k_\eta G(t-\tau;\eta),$$

при $l=1$ одержуємо, що

$$\left|\partial^r_\xi K_1(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \le \sum_{|k|_*\le p_1} \left|\partial^r_\xi A_{1,k}(t;\eta+\xi)\partial^k_\eta G(t-\tau;\eta)\right|$$
$$\le c_{1,r}(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}} e^{-\delta\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \quad (2.18)$$

Далі, оскільки

$$\partial^r_\xi K_2(t,\eta+\xi;\tau,\xi) = \partial^r_\xi\left(\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t,\eta+\xi;\beta,y)K_1(\beta,y;\tau,\xi)\,dy\right),$$

то здійснивши в останньому інтегралі заміну змінної інтегрування за формулою $y=z+\xi$, відтак, урахувавши оцінки (2.18), (2.5), рівності (2.6) і

$$\partial^r_\xi K_1(t,\eta+\xi;\tau,z+\xi) = \partial^r_\zeta K_1(t,(\eta-z)+\zeta;\tau,\zeta)\Big|_{\zeta=z+\xi},$$

дістанемо

$$\left|\partial^r_\xi K_2(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right|$$
$$\le \sum_{|r_1|_*\le|r|_*} C_r^{r_1} \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \left|\partial^{r_1}_\xi K_1(t,\eta+\xi;\beta,z+\xi)\partial^{r-r_1}_\xi K_1(\beta,z+\xi;\tau,\xi)\right| dz$$
$$\le m \sum_{|r_1|_*\le|r|_*} C_r^{r_1} c_{1,r_1} c_{1,(r-r_1)} \int_\tau^t \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}}$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\left(\left(\frac{\|\eta-z\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{\|z\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)} dz\,d\beta$$
$$\le mc_\varepsilon(t-\tau)^{-n\alpha} e^{-\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \int_\tau^t \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{\alpha n-\frac{n+p_1+\gamma}{h}} d\beta$$
$$\times\left(\sum_{|r_1|_*\le|r|_*} C_r^{r_1} c_{1,r_1} c_{1,(r-r_1)}\right) = c_{2,r}(\varepsilon)B(\alpha_0,\alpha_0)(t-\tau)^{\alpha_0-\frac{n+p_1+\gamma}{h}}$$
$$\times\, e^{-\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad \varepsilon\in(0;1).$$

Розмірковуючи аналогічно крок за кроком, прийдемо до нерівності

$$\left|\partial_\xi^r K_l(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \le c_{l,r}(\varepsilon)\left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0, j\alpha_0)\right) \\ \times (t-\tau)^{(l-1)\alpha_0 - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad (2.19)$$

яка виконується для всіх $\{\eta,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{Z}_+^n$, $t \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$, $\varepsilon \in (0;1)$ і $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, а, відтак і до існування такого номера l_*, при якому

$$\left|\partial_\xi^r K_{l_*}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \\ \le c_{l_*,r}(\varepsilon)\left(\prod_{j=1}^{l_*-1} B(\alpha_0, j\alpha_0)\right) e^{-\delta(1-(l_*-1)\varepsilon)\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \quad (2.20)$$

(тут величини $c_{l,r}(\varepsilon) > 0$ не залежать від змінних t, τ, η і ξ, які змінюються вищезазначеним способом).

Оскільки

$$\partial_\xi^r \partial_x^q K_l(t,x;\tau,\eta+\xi) = \partial_\zeta^r \partial_x^q K_l(t,x;\tau,\zeta)\Big|_{\zeta=\eta+\xi},$$

$$\partial_\xi^r \partial_x^q K_l(t,x-z;\tau,\xi) = \partial_\xi^r \partial_y^q K_l(t,y;\tau,\xi)\Big|_{y=x-z},$$

то вирази $\partial_\xi^r \partial_x^q K_l(t,x;\tau,\eta+\xi), \partial_\xi^r \partial_x^q K_l(t,x-z;\tau,\xi)$ і $\partial_\xi^r \partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)$ є однотипними. Тому з огляду на зображення (2.15) та на одержані оцінки (2.16), (2.17), (2.19) і (2.5), маємо

$$\left|\partial_\xi^r \partial_x^q K_2(t,x;\tau,\xi)\right| \\ \le m 2^{|r+q|_*}\Bigg(\sum_{|r_1|_* \le |r|_*} c_{r_1,q} c_{1,(r-r_1)} \int_\tau^{t_1} (t-\beta)^{-\frac{n+p_1+\gamma+|r_1+q|_*}{h}} (\beta-\tau)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}} \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\left(\left(\frac{\|x-\eta-\xi\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{\|\eta\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)} d\eta\, d\beta \\ + \sum_{|q_1|_* \le |q|_*} c_{q_1} c_{r,(q-q_1)} \int_{t_1}^{t} (\beta-\tau)^{-\frac{n+p_1+\gamma+|r+q-q_1|_*}{h}} (t-\beta)^{-\frac{n+p_1+\gamma}{h}} \\ \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\left(\left(\frac{\|z\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{\|x-z-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)} dz\, d\beta\Bigg)$$

$$\leq m2^{|r+q|_*} c_\varepsilon e^{-\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} (t-\tau)^{-\alpha n}$$

$$\times \Bigg(\sum_{|r_1|_* \leq |r|_*} c_{r_1,q} c_{1,(r-r_1)} \int_\tau^{t_1} (t-\beta)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma+|r_1+q|_*}{h}} (\beta-\tau)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} d\beta$$

$$+ \sum_{|q_1|_* \leq |q|_*} c_{q_1} c_{r,(q-q_1)} \int_{t_1}^{t} (t-\beta)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} (\beta-\tau)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma+|r+q-q_1|_*}{h}} d\beta \Bigg),$$

$$(t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2, \ \{r,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \ \varepsilon \in (0;1).$$

Врахувавши тепер оцінки

$$\int_\tau^{t_1} (t-\beta)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma+|r_1+q|_*}{h}} (\beta-\tau)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} d\beta$$

$$\leq (t-t_1)^{-\frac{|r_1+q|_*}{h}} \int_\tau^t \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{\alpha_0 - 1} d\beta$$

$$= 2^{\frac{|r_1+q|_*}{h}} (t-\tau)^{2\alpha_0 - \left(1 + \frac{|r_1+q|_*}{h}\right)} \int_0^1 \big(\chi(1-\chi)\big)^{\alpha_0-1} d\chi$$

$$= 2^{\frac{|r_1+q|_*}{h}} (t-\tau)^{2\alpha_0 - \left(1 + \frac{|r_1+q|_*}{h}\right)} B(\alpha_0, \alpha_0)$$

і

$$\int_{t_1}^{t} (t-\beta)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma}{h}} (\beta-\tau)^{\alpha n - \frac{n+p_1+\gamma+|r+q-q_1|_*}{h}} d\beta$$

$$\leq (t_1-\tau)^{-\frac{|r+q-q_1|_*}{h}} \int_\tau^t \big((t-\beta)(\beta-\tau)\big)^{\alpha_0 - 1} d\beta$$

$$= 2^{\frac{|r+q-q_1|_*}{h}} (t-\tau)^{2\alpha_0 - \left(1 + \frac{|r+q-q_1|_*}{h}\right)} B(\alpha_0, \alpha_0),$$

приходимо до нерівності

$$\big|\partial_\xi^r \partial_x^q K_2(t,x;\tau,\xi)\big|$$

$$\leq c_{2,\xi}^{r,q} (t-\tau)^{2\alpha_0 - \left(1 + \alpha n + \frac{|r+q|_*}{h}\right)} B(\alpha_0,\alpha_0) e^{-\delta(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Продовжуючи крок за кроком процес оцінювання, одержимо

$$\left|\partial_\xi^r \partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)\right| \le c_{l,\varepsilon}^{r,q}(t-\tau)^{l\alpha_0-\left(1+\alpha n+\frac{|r+q|_*}{h}\right)}$$
$$\times\, e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0, j\alpha_0)\right), \quad (2.21)$$

для всіх $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ 0\le\tau<t\le T,\ \varepsilon\in(0;1)$ і $l\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Перейдемо тепер до знаходження оцінок виразу $\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)\right|$, придатних для встановлення диференційовності матричної функції Φ за просторовими змінними. Безпосередньо з (2.21) приходимо до існування такого номера l^*, при якому

$$\left|\partial_\xi^r \partial_x^q K_{l^*}(t,x;\tau,\xi)\right| \le c_{l^*,\varepsilon}^{r,q} e^{-\delta(1-(l^*-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\left(\prod_{j=1}^{l^*-1} B(\alpha_0, j\alpha_0)\right),$$
$$\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,\ (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2.$$

Поклавши тут $l_+:=\max\{l_*,l^*\},\ l_-:=\min\{l_*,l^*\}$, де l_* — відповідний номер із (2.20), $\varepsilon:=\frac{1}{r_*l_+},\ \delta_*:=\delta\big(1-\frac{1}{r_*}\big),\ r_*>2,\ T_0:=\max\{1,T\}$, а також

$$c_*^0 := \max_{l\in\mathbb{N}_{l_+}\backslash\{1\}}\Bigg\{c_{1,r}, c_{l,r}(\varepsilon)\left(\prod_{j=1}^{l-1}B(\alpha_0,j\alpha_0)\right),$$
$$c_{r,q}, c_{l,\varepsilon}^{r,q}\left(\prod_{j=1}^{l-1}B(\alpha_0,j\alpha_0)\right)\Bigg\},$$

$$c_* := c_*^0 (T_0)^{l_+-l_-},$$

із (2.19) і (2.21) одержуємо, що для всіх $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n, \{x,\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n$ і $0\le\tau<t\le T$

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l_+}(t,x;\tau,\xi)\right| \le c_* e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

$$\left|\partial_\xi^r K_{l_+}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \le c_* e^{-\delta_*\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Звідси, зваживши на оцінку (2.10) та рівність (2.11), а також урахувавши зображення (2.15) та нерівності (2.16) і (2.17), одержуємо:

$$\left|\partial_\xi^r K_{l_++1}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right|$$
$$\le \sum_{|r_1|_*\le|r|_*} C_r^{r_1}\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\left|\partial_\xi^{r_1}K_1(t,\eta+\xi;\beta,z+\xi)\partial_\xi^{r-r_1}K_{l_+}(\beta,z+\xi;\tau,\xi)\right|dz$$

$$\le mc_*^2\Big(\sum_{|r_1|_*\le|r|_*} C_r^{r_1}\Big)\int\limits_\tau^t (t-\beta)^{\alpha_0-1}$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta_*\left(\left(\frac{\|\eta-z\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|z\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)} e^{-\frac{\delta}{r_*}\left(\frac{\|\eta-z\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{dz}{(t-\beta)^{n\alpha}}\,d\beta$$

$$\le mc_r^0 E c_*^2 B(\alpha_0,1)(t-\tau)^{\alpha_0} e^{-\delta_*\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad c_r^0 := \sum_{|r_1|_*\le|r|_*} C_r^{r_1};$$

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l_++1}(t,x;\tau,\xi)\right|$$

$$\le \sum_{|r_1|_*\le|r|_*} C_r^{r_1}\int\limits_\tau^{t_1} d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\partial_\xi^{r_1}\partial_x^q K_1(t,x;\beta,\eta+\xi)\partial_\xi^{r-r_1}K_{l_+}(\beta,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| d\eta$$

$$+\sum_{|q_1|_*\le|q|_*} C_q^{q_1}\int\limits_{t_1}^{t} d\beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\partial_x^{q_1}K_1(t,x;\beta,x-z)\partial_\xi^r\partial_x^{q-q_1}K_{l_+}(\beta,x-z;\tau,\xi)\right| dz$$

$$\le mc_*^2\left(\sum_{|r_1|_*\le|r|_*} C_r^{r_1}\int\limits_\tau^{t_1}(t-\beta)^{\alpha_0-\left(1+\frac{|r_1+q|_*}{h}\right)}\right.$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta_*\left(\left(\frac{\|x-\eta-\xi\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|\eta\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)} e^{-\frac{\delta}{r_*}\left(\frac{\|x-\eta-\xi\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{d\eta}{(t-\beta)^{\alpha n}}\,d\beta$$

$$+\sum_{|q_1|_*\le|q|_*} C_q^{q_1}\int\limits_{t_1}^{t}(t-\beta)^{\alpha_0-1}$$

$$\left.\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta_*\left(\left(\frac{\|z\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|x-z-\xi\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)} e^{-\frac{\delta}{r_*}\left(\frac{\|z\|}{(t-\beta)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \frac{dz}{(t-\beta)^{\alpha n}}\,d\beta\right)$$

$$\le mc_*^2 E e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\int\limits_\tau^t (t-\beta)^{\alpha_0-1}d\beta$$

$$\times\left(\left(\sum_{|r_1|_*\le|r|_*} C_r^{r_1}(t-t_1)^{-\frac{|r_1+q|_*}{h}}\right)+c_q\right)$$

$$\le mc_*^2 E e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}(t-\tau)^{\alpha_0}B(\alpha_0,1)$$

$$\times\left(\left(2^{\frac{|r+q|_*}{h}}\sum_{|r_1|_*\le|r|_*} C_r^{r_1}(t-\tau)^{-\frac{|r_1+q|_*}{h}}\right)+c_q\right)$$

$$\le m c_{r,q}^0 c_*^2 E(2T_0)^{\frac{|r+q|_*}{h}} B(\alpha_0,1)(t-\tau)^{\alpha_0-\frac{|r+q|_*}{h}} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$
$$c_{r,q}^0 := c_r + c_q.$$

Застосовуючи далі метод математичної індукції, переконуємося спочатку у правильності оцінки

$$\left|\partial_\xi^r K_{l_++l}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \le c_*(m c_r^0 c_* E(t-\tau)^{\alpha_0})^l e^{-\delta_*\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0,1+j\alpha_0)\right), \quad (2.22)$$

а, відтак і оцінки

$$\left|\partial_\xi^r \partial_x^q K_{l_++l}(t,x;\tau,\xi)\right| \le c_*\left(m c_{r,q}^0 c_* E(2T_0)^{\frac{|r+q|_*}{h}}\right)^l (t-\tau)^{l\alpha_0-\frac{|r+q|_*}{h}} \times e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0,1+j\alpha_0)\right), \quad (2.23)$$

при $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$ і $l\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Правильне наступне твердження.

Лема 2.2. *Матрична функція $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ на множині Π_T^2 є нескінченно диференційовною функцією за кожною із просторових змінних x і ξ, для похідних якої виконуються такі оцінки:*

$$\left|\partial_\xi^r \partial_x^q \Phi(t,x;\tau,\xi)\right| \le c_1 (t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n+\frac{|r+q|_*}{h})} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2, \quad (2.24)$$

$$\left|\partial_\xi^r \Phi(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right| \le c_2 (t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n)} e^{-\delta_*\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad 0\le\tau<t\le T,\ \{\eta,\xi\}\subset\mathbb{R}^n \quad (2.25)$$

(тут $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, а оціночні сталі c_1, c_2 і δ_* не залежать від t,τ,x,ξ та η).

Доведення. Зафіксуємо довільним способом точку $(x_0;\xi_0)$ із $\mathbb{R}^{2n}$ і розглянемо у цьому просторі кулю $\mathbb{K}_{(x_0;\xi_0)}^\delta$ з центром у точці $(x_0;\xi_0)$ та радіусом $\delta>0$. Тоді, зваживши на структуру (2.3) функції Φ та на нескінченну диференційовність повторних ядер K_l за просторовими змінними на $\mathbb{R}^{2n}$, приходимо до висновку, що для нескінченної диференційовності у точці $(x_0;\xi_0)$ матричної функції Φ необхідно встановити лише рівномірну збіжність за змінними x і ξ на множині $\mathbb{K}_{(x_0;\xi_0)}^\delta$,

$\delta > 0$, формально продиференційованого ряду (2.3) (при кожних фіксованих t і τ, $0 \le \tau < t \le T$):

$$\sum_{l=1}^{\infty} \partial_\xi^r \partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi) \quad (\forall \{r,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n). \tag{2.26}$$

Безпосередньо із оцінок (2.21) і (2.23) та рівності (2.14), для $\{r,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ і $(t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2$ маємо

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{l=1}^{\infty} \partial_\xi^r \partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)\Big| \\
&\quad \le \sum_{l=1}^{l_+} \big|\partial_\xi^r \partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)\big| + \sum_{l=l_++1}^{\infty} \big|\partial_\xi^r \partial_x^q K_l(t,x;\tau,\xi)\big| \\
&\quad \le c_* \Bigg(\sum_{l=1}^{l_+} (t-\tau)^{l\alpha_0 - (1+\alpha n + \frac{|r+q|_*}{h})} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \big(m c_{r,q}^0 c_* E(2T_0)^{\frac{|r+q|_*}{h}}\big)^l (t-\tau)^{l\alpha_0 - \frac{|r+q|_*}{h}} \\
&\quad \times \Bigg(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0, 1+j\alpha_0) \Bigg)\Bigg) e^{-\delta_* \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \\
&\quad \le c_1 (t-\tau)^{\alpha_0 - \left(1+\alpha n + \frac{|r+q|_*}{h}\right)} e^{-\delta_* \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.
\end{aligned}$$

Звідси вже дістаємо рівномірну збіжність стосовно x і ξ ряду (2.26), а, відтак і виконання оцінки (2.24).

Аналогічним способом, завдяки відповідним оцінкам (2.19) і (2.22), переконуємось у правильності оцінки (2.25).

Лему доведено. □

Теорема 2.1. *Матрична функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ є нескінченно диференційовною функцією за кожною із просторових змінних x і ξ на множині Π_T^2, причому*

$$\begin{gathered}
\exists\, \delta > 0 \ \forall \{r,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \ \exists\, c > 0 \ \forall (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2 : \\
|\partial_\xi^r \partial_x^q Z(t,x;\tau,\xi)| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+|r+q|_*+\gamma}{h}} e^{-\delta \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.
\end{gathered} \tag{2.27}$$

Доведення. Очевидно, що питання про диференційовність матричної функції Z за просторовими змінними зводиться до питання про можливість диференціювання за цими змінними під знаком інтеграла в об'ємному потенціалі W. Для забезпечення цієї можливості досить установити рівномірну стосовно змінних x і ξ, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, збіжність інтеграла

$$I_*(t,x;\tau,\xi) := \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^r \partial_x^q (G(t-\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi))\,dy,$$
$$0 \le \tau < t \le T,\ \{r,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n.$$

Оскільки

$$|I_*(t,x;\tau,\xi)|$$
$$\le m\int\limits_{\tau}^{t_1} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^q G(t-\beta;x-\eta-\xi)||\partial_\xi^r \Phi(\beta,\eta+\xi;\tau,\xi)|\,d\eta$$
$$+ m\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G(t-\beta;\eta)||\partial_{(x-\eta)}^q \partial_\xi^r \Phi(\beta,x-\eta;\tau,\xi)|\,d\eta,$$
$$t_1 := \tau + \frac{1}{2}(t-\tau),$$

то врахувавши оцінки (1.4), (2.24) і (2.25), а також (2.5), одержимо, що

$$|I_*(t,x;\tau,\xi)| \le c_3 (t-\tau)^{\alpha_0 - \frac{n+|r+q|_*+\gamma}{h}} e^{-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$
$$\{r,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n,\ (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2, \quad (2.28)$$

де c_3 — додатна стала, незалежна від t,τ,x і ξ.

Звідси дістаємо рівномірну стосовно змінних x і ξ збіжність інтеграла I_*, а, відтак і нескінченну диференційовність за цими змінними матричної функції $Z(t,x;\tau,\xi)$ на множині Π_T^2.

Щодо твердження (2.27), то воно стає очевидним, якщо зважити на оцінки (1.4) і (2.28) та нерівність

$$|\partial_x^r \partial_\xi^q W(t,x;\tau,\xi)| \le |I_*(t,x;\tau,\xi)|, \quad \{r,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n, (t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2.$$

Теорему доведено. □

Аналізуючи доведення теореми 2.1, переконуємось у правильності такого наслідку.

Наслідок 2.2. *Для всіх t і $\tau, 0 \leq \tau < t \leq T$, а також $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ виконується рівність*

$$\{P_0(i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\}W(t, x; \tau, \xi)$$
$$= \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \big(\{P_0(i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\}G(t - \beta; x - y)\big)\Phi(\beta, y; \tau, \xi)\, dy.$$

Наступні допоміжні твердження важливі при дослідженні властивостей функції $Z(t, x; \tau, \xi)$ стосовно змінних t і τ.

Лема 2.3. *Матрична функція $\Phi(\beta, x; \tau, \xi)$ є неперервною функцією за змінною β на проміжку $(\tau; T]$ при кожному фіксованому $\tau \in [0; T)$, $x \in \mathbb{R}^n$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$, причому*

$$|\Phi(\beta + \Delta, x; \tau, \xi) - \Phi(\beta, x; \tau, \xi)|$$
$$\leq \max\{|\Delta|, |\Delta|^{\alpha_0}\}c_0(\beta - \tau)^{\alpha_0 - (1 + \alpha n + \frac{p}{h})}e^{-\delta_0\left(\frac{\|x - \xi\|}{(\beta - \tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad (2.29)$$

при $0 < |\Delta| < (\beta - \tau)$, тут сталі c_0 і δ_0 не залежать від Δ, β, τ, x і ξ.

Доведення. Скориставшись структурою (2.3) матричної функції Φ та абсолютною збіжністю ряду $\sum_{l=1}^\infty K_l(\rho, x; \tau, \xi)$, $\rho > \tau$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, одержимо

$$|\Phi(\beta + \Delta, x; \tau, \xi) - \Phi(\beta, x; \tau, \xi)|$$
$$\leq \sum_{l=1}^\infty |K_l(\beta + \Delta, x; \tau, \xi) - K_l(\beta, x; \tau, \xi)|. \quad (2.30)$$

Оцінимо загальний член ряду із правої частини нерівності (2.30). Урахувавши структуру повторних ядер K_l, при $\Delta > 0$ маємо

$$|K_l(\beta + \Delta, x; \tau, \xi) - K_l(\beta, x; \tau, \xi)|$$
$$\leq \left|\int_\tau^\beta d\rho \int_{\mathbb{R}^n} (K_1(\beta + \Delta, x; \rho, y) - K_1(\beta, x; \rho, y))K_{l-1}(\rho, y; \tau, \xi)\, dy\right|$$
$$+ \left|\int_\beta^{\beta+\Delta} d\rho \int_{\mathbb{R}^n} K_1(\beta + \Delta, x; \rho, y)K_{l-1}(\rho, y; \tau, \xi)\, dy\right|$$
$$\equiv J_{1,l}^\Delta(\beta, x; \tau, \xi) + J_{2,l}^\Delta(\beta, x; \tau, \xi), \quad l > 1.$$

Зваживши тепер на диференційовність за часовою змінною фундаментального розв'язку G задачі Коші для системи (1.2), одержимо

$$
\begin{aligned}
&K_1(\beta+\Delta,x;\rho,y)-K_1(\beta,x;\rho,y)\\
&\qquad=\sum_{|k|_*\le p_1} i^{|k|_*}\{A_{1,k}(\beta+\Delta;x)\partial_x^k(G(\beta+\Delta-\rho;x-y)\\
&-G(\beta-\rho;x-y))+(A_{1,k}(\beta+\Delta;x)-A_{1,k}(\beta;x))\partial_x^k G(\beta-\rho;x-y)\}\\
&\qquad=\sum_{|k|_*\le p_1} i^{|k|_*}\{\Delta A_{1,k}(\beta+\Delta;x)\partial_x^k\partial_\eta G(\eta;x-y)\Big|_{\eta=\beta-\rho+\theta\Delta}\\
&\qquad\quad+(A_{1,k}(\beta+\Delta;x)-A_{1,k}(\beta;x))\partial_x^k G(\beta-\rho;x-y)\}\\
&=\sum_{|k|_*\le p_1} i^{|k|_*}\Bigg\{\Delta A_{1,k}(\beta+\Delta;x)\Bigg(\sum_{|r|_*\le p} i^{|r|_*}A_{0,r}\partial_{x-y}^{k+r}G(\beta-\rho+\theta\Delta;x-y)\Bigg)\\
&\qquad\quad+(A_{1,k}(\beta+\Delta;x)-A_{1,k}(\beta;x))\partial_x^k G(\beta-\rho;x-y)\Bigg\},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\theta\in(0;1),\ A_{0,r}:=(a_{0,r}^{lj})_{l,j=1}^m,
\end{aligned}
$$

а, відтак і таку оцінку першого члена ряду з (2.30):

$$
\begin{aligned}
&|K_1(\beta+\Delta,x;\tau,\xi)-K_1(\beta,x;\tau,\xi)|\\
&\qquad\le \Delta c_1(\beta-\tau)^{-\frac{n+\gamma+p+p_1}{h}}e^{-\delta_1\left(\frac{\|x-y\|}{(\beta-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\quad 0<\Delta<\beta-\tau
\end{aligned}
$$

(тут ураховано оцінку (1.4), а також неперервність за часовою змінною та обмеженість коефіцієнтів системи (1.1); при цьому додатні сталі c_1 і δ_1 не залежать від Δ).

Звідси, взявши до уваги нерівності (1.4), (2.7), (2.21) та умову B), прийдемо до таких оцінок:

$$
\begin{aligned}
&J_{1,l}^{\Delta}(\beta,x;\tau,\xi)\\
&\quad:=\left|\int_\tau^\beta d\rho\int_{\mathbb{R}^n}(K_1(\beta+\Delta,x;\rho,y)-K_1(\beta,x;\rho,y))K_{l-1}(\rho,y;\tau,\xi)\,dy\right|\\
&\qquad\le m^3\sum_{|k|_*\le p_1}\Bigg\{\Delta|A_{1,k}(\beta+\Delta;x)|\Bigg(\sum_{|r|_*\le p}|A_{0,r}|\\
&\quad\times\Bigg(\int_\tau^{\beta_1}d\rho\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_{x-y}^{k+r}G(\beta-\rho+\theta\Delta;x-y)||K_{l-1}(\rho,y;\tau,\xi)|\,dy
\end{aligned}
$$

$$+\int\limits_{\beta_1}^{\beta} d\rho \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_z^k G(\beta-\rho+\theta\Delta;z)|\,|\partial_z^r K_{l-1}(\rho,x-z;\tau,\xi)|\,dz\Big)\Big)$$

$$+|A_{1,k}(\beta+\Delta;x)-A_{1,k}(\beta;x)|\int\limits_{\tau}^{\beta} d\rho$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^k G(\beta-\rho;x-y)|\,|K_{l-1}(\rho,y;\tau,\xi)|\,dy\Big\}$$

$$\le \Delta\hat{c}(l,\varepsilon)\Big(\prod_{j=1}^{l-2} B(\alpha_0,j\alpha_0)\Big)\Big\{\int\limits_{\tau}^{\beta_1}(\beta-\rho+\theta\Delta)^{\alpha_0-(1+\frac{p}{h})}(\rho-\tau)^{(l-1)\alpha_0-1}$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(1-(l-2)\varepsilon)\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(\beta-\rho+\theta\Delta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|y-\xi\|}{(\rho-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}}$$

$$\times\frac{dy}{((\beta-\rho+\theta\Delta)(\rho-\tau))^{\alpha n}}\,d\rho$$

$$+\int\limits_{\beta_1}^{\beta}(\beta-\rho+\theta\Delta)^{\alpha_0-1}(\rho-\tau)^{(l-1)\alpha_0-(1+\frac{p}{h})}$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(1-(l-2)\varepsilon)\left\{\left(\frac{\|z\|}{(\beta-\rho+\theta\Delta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|x-z-\xi\|}{(\rho-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}}$$

$$\times\frac{dz}{((\beta-\rho+\theta\Delta)(\rho-\tau))^{\alpha n}}\,d\rho$$

$$+\int\limits_{\tau}^{\beta}(\beta-\rho)^{\alpha_0-1}(\rho-\tau)^{(l-1)\alpha_0-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(1-(l-2)\varepsilon)\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(\beta-\rho)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\left(\frac{\|y-\xi\|}{(\rho-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}}$$

$$\times\frac{dy}{((\beta-\rho)(\rho-\tau))^{\alpha n}}\,d\rho\Big\}$$

$$\le \Delta c(\varepsilon)\hat{c}(l,\varepsilon)\Big(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0,j\alpha_0)\Big)\Big\{(\beta-\tau+\theta\Delta)^{l\alpha_0-(1+\alpha n)}\Big((\beta-\beta_1+\theta\Delta)^{-\frac{p}{h}}$$

$$+(\beta_1-\tau)^{-\frac{p}{h}}\Big)e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(\beta-\tau+\theta\Delta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

$$+(\beta-\tau)^{l\alpha_0-(1+\alpha n)}e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(\beta-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\Big\},\quad (2.31)$$

в яких $\beta_1 := \tau+\frac{1}{2}(\beta-\tau)$, $\beta>\tau$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\varepsilon\in(0;1)$, $\theta\in(0;1)$,

$\Delta > 0$, $l > 1$, а вираз $\hat{c}(l,\varepsilon) > 0$ не залежить від Δ, β, τ, x і ξ.

Оскільки

$$\beta - \tau < \beta - \tau + \theta\Delta < 2(\beta - \tau), \quad \theta \in (0;1),\, 0 < \Delta < \beta - \tau,$$

а

$$(\beta - \beta_1 + \theta\Delta)^{-\frac{p}{h}} + (\beta_1 - \tau)^{-\frac{p}{h}} \le 2^{\frac{p}{h}+1}(\beta - \tau)^{-\frac{p}{h}}, \quad \theta > 0,\, \Delta > 0,$$

то з нерівностей (2.31) одержуємо існування додатних сталих c_0 і δ_0 таких, що для всіх $l > 1$, $\varepsilon \in (0;1)$, $\beta \in (\tau;T]$, $\tau \in [0;T)$, $\Delta \in (0;\beta-\tau)$ і $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ виконується оцінка

$$J_{1,l}^{\Delta}(\beta,x;\tau,\xi) \le \Delta c_0^l (\beta-\tau)^{l\alpha_0 - (1+\alpha n + \frac{p}{h})} \left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0, j\alpha_0)\right) e^{-\delta_0(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(\beta-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Скориставшись ще раз оцінками (2.4) і (2.7), одержимо

$$J_{2,l}^{\Delta}(\beta,x;\tau,\xi) \le \int\limits_{\beta}^{\beta+\Delta} d\rho \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K_1(\beta+\Delta,x;\rho,y)K_{l-1}(\rho,y;\tau,\xi)|\,dy$$

$$\le m^{l-1}c^l \left(\prod_{j=1}^{l-2} c_{(j\varepsilon)} B(\alpha_0, j\alpha_0)\right) \int\limits_{\beta}^{\beta+\Delta} (\beta-\rho+\Delta)^{\alpha_0-1}(\rho-\tau)^{(l-1)\alpha_0-1}$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(1-(l-2)\varepsilon)\left\{\left(\frac{\|x-y\|}{(\beta-\rho+\Delta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left(\frac{\|y-\xi\|}{(\rho-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}} \frac{dy}{((\beta-\rho+\Delta)(\rho-\tau))^{\alpha n}}\, d\rho$$

$$\le m^{l-1}c^l \left(\prod_{j=1}^{l-2} c_{(j\varepsilon)} B(\alpha_0, j\alpha_0)\right) c_{((l-1)\varepsilon)} (\beta-\tau+\Delta)^{-\alpha n}$$

$$\times\, e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(\beta-\tau+\Delta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \Delta^{\alpha_0} \int\limits_0^1 \chi^{\alpha_0-1}(\beta-\tau+\Delta(1-\chi))^{(l-1)\alpha_0-1} d\chi$$

$$\le \Delta^{\alpha_0}(2^{\alpha_0}m)^{l-1}c^l \left(\prod_{j=1}^{l-2} c_{(j\varepsilon)} B(\alpha_0, j\alpha_0)\right) c_{((l-1)\varepsilon)}$$

$$\times\, B(1,\alpha_0)(\beta-\tau)^{(l-1)\alpha_0-(1+\alpha n)} e^{-\delta_0(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(\beta-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

для $\varepsilon \in (0;1)$, $l > 1$, $0 \le \tau < \beta \le T$, $\Delta \in (0;\beta-\tau)$ і $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$.

Отже, існують такі додатні сталі c_1 і δ_0, що

$$|K_l(\beta+\Delta, x;\tau,\xi) - K_l(\beta, x;\tau,\xi)|$$
$$\le \max\{\Delta, \Delta^{\alpha_0}\} c_1^l (\beta-\tau)^{l\alpha_0 - (1+\alpha n+\frac{p}{h})} e^{-\delta_0(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(\beta-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$
$$l\in\mathbb{N},\ \varepsilon\in(0;1),\ \beta\in(\tau;T],\ \tau\in[0;T),\ \Delta\in(0;\beta-\tau),\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n \tag{2.32}$$

(тут ураховано нерівність $\alpha_0 \le \frac{p}{h}$).

Звідси переконуємося в існуванні такого номера $\hat{l}$, при якому

$$|K_{\hat{l}}(\beta+\Delta, x;\tau,\xi) - K_{\hat{l}}(\beta, x;\tau,\xi)|$$
$$\le \max\{\Delta, \Delta^{\alpha_0}\} c_1^{\hat{l}} e^{-\delta_0(1-(\hat{l}-1)\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(\beta-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \tag{2.33}$$

Далі, поклавши $l^+ := \max\{l_+, \hat{l}\}$, де l_+ — відповідний номер із (2.23), і вважаючи скрізь $\varepsilon = \frac{1}{r^* l^+}$, $r_* > 2$, подібним способом, використовуючи нерівності (1.4), (2.10), (2.13), (2.20), (2.23) і рівність (2.11), одержуємо оцінку приросту повторних ядер

$$|K_{l^++l}(\beta+\Delta, x;\tau,\xi) - K_{l^++l}(\beta, x;\tau,\xi)|$$
$$\le \max\{\Delta, \Delta^{\alpha_0}\} A^l (\beta-\tau)^{\alpha_0 l - \frac{p}{h}} (\Gamma((l-1)\alpha_0))^{-1} e^{-\delta^*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(\beta-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$
$$l\in\mathbb{N},\ 0\le\tau<\beta\le T,\ \Delta\in(0;\beta-\tau),\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n \tag{2.34}$$

(тут додатні сталі A і δ^* не залежать від Δ, l, β, τ, x і ξ).

На завершення зазначимо, що одержані оцінки (2.32)–(2.34) при додатному Δ забезпечують виконання нерівності (2.29).

У випадку $\Delta < 0$ нерівність (2.29) встановлюється аналогічним способом.

Лему доведено. □

Лема 2.4. *Матрична функція*

$$\tilde{V}_\beta(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t-\beta; x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)\,dy,$$
$$0\le\tau<\beta<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$

є неперервно диференційовною за змінною t на проміжку $(\beta;T]$, $\beta > \tau$, і неперервною за змінною β на інтервалі $(\tau;t)$, причому

$$\lim_{\beta\to t-0} \tilde{V}_\beta(t,x;\tau,\xi) = \Phi(t,x;\tau,\xi), \quad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2. \tag{2.35}$$

Доведення. Безпосередньо з оцінки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_t G(t-\beta; x-y)\Phi(\beta, y; \tau, \xi)|\, dy$$

$$\leq c^0 (t-\tau)^{-\alpha n}(t-\beta)^{\alpha n - \frac{n+p+\gamma}{h}}(\beta-\tau)^{\alpha_0 - 1} e^{-\delta_0 \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

$$0 \leq \delta < \beta < t \leq T, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.36)$$

яка легко одержується з огляду на нерівність (1.4) та твердження леми 2.1, а також на те, що матрична функція G є розв'язком системи (1.2), приходимо до диференційовності $\tilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi)$ за змінною t у кожній точці проміжку $(\beta; T]$, $\beta > \tau$, та до виконання такої рівності:

$$\partial_t \tilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_t G(t-\beta; x-y))\Phi(\beta, y; \tau, \xi)\, dy,$$

$$0 \leq \tau < \beta < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.37)$$

Зваживши на рівність

$$\partial_t G(t; z) = P_0(i\partial_z)G(t; z), \quad (t; z) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (2.38)$$

і скориставшись твердженням леми 2.2 та відомою теоремою Лагранжа про скінченні прирости, а також формулою інтегрування частинами, одержимо, що

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_{(t+\Delta)} G(t+\Delta-\beta; x-y) - \partial_t G(t-\beta; x-y))\Phi(\beta, y; \tau, \xi)\, dy\right|$$

$$= |\Delta| \Bigg| \sum_{|k|_* \leq p} \sum_{|r|_* \leq p} i^{|k+r|_*} A_{0,k} A_{0,r}$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial^r_{(x-y)} G(t+\theta\Delta-\beta; x-y))(\partial^k_{(x-y)}\Phi(\beta, y; \tau, \xi))\, dy \Bigg|,$$

$$0 < |\Delta| << 1,\ \theta \in (0; 1),$$
$$0 \leq \tau < \beta < t \leq T,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Звідси, врахувавши нерівності (1.4) і (2.24), дістанемо оцінку

$$|\partial_{(t+\Delta)} \tilde{V}_\beta(t+\Delta, x; \tau, \xi) - \partial_t \tilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi)|$$

$$\leq c_1 |\Delta| (t-\beta)^{-\frac{n+p+\gamma}{h}} (\beta-\tau)^{\alpha_0 - (1+\frac{p}{h})} e^{-\delta_1 \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

$$0 < |\Delta| < \frac{1}{2}(t-\beta), 0 \le \tau < \beta < t \le T, \{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$$

(тут додатні сталі c_1 і δ_1 не залежать від Δ, τ, β, t, x і ξ).

Таким чином, функція $\tilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi)$ є неперервно диференційовною за змінною t на множині $(\beta; T]$ при кожному фіксованому $\beta \in (\tau; T)$, $\tau \in [0; T)$, x і ξ з $\mathbb{R}^n$.

Далі, оскільки

$$\begin{aligned}
&\tilde{V}_{(\beta+\Delta)}(t, x; \tau, \xi) - \tilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi) \\
&\qquad = \Delta \int\limits_{\mathbb{R}^n} (P_0(i\partial_{(x-y)})G(t-\beta+\theta\Delta; x-y))\Phi(\beta+\Delta, y; \tau, \xi)\, dy \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\beta; x-y)(\Phi(\beta+\Delta, y; \tau, \xi) - \Phi(\beta, y; \tau, \xi))\, dy, \quad \theta \in (0; 1),
\end{aligned}$$

то згідно з твердженням леми 2.1 та оцінками (1.4) і (2.29) маємо

$$\begin{aligned}
&|\tilde{V}_{(\beta+\Delta)}(t, x; \tau, \xi) - \tilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi)| \\
&\qquad \le \max\{|\Delta|, |\Delta|^\alpha\}\tilde{c}_0\Big\{(t-\beta+\theta\Delta)^{\alpha n - \frac{n+p+\gamma}{h}}(\beta-\tau+\Delta)^{\alpha_0-1} \\
&\qquad\qquad + (t-\beta)^{\alpha n - \frac{n+\gamma}{h}}(\beta-\tau+\Delta)^{\alpha_0+(1+\frac{p}{h})}\Big\} \\
&\qquad\qquad \le \max\{|\Delta|, |\Delta|^{\alpha_0}\}\tilde{c}(t-\beta)^{\alpha n - \frac{n+p+\gamma}{h}}(\beta-\tau)^{\alpha_0-(1+\frac{p}{h})},
\end{aligned}$$

$$\theta \in (0; 1),\ 0 < |\Delta| < \frac{1}{2}\min\{(t-\beta),\ (\beta-\tau)\},$$
$$0 \le \tau < \beta < t \le T,\ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$$

(тут константа $\widetilde{c} > 0$ не залежить від Δ).

Одержані оцінки приросту функції $\tilde{V}_\beta$ стосовно змінної β гарантують неперервність цієї функції щодо β на інтервалі $(\tau; t)$.

Доведемо тепер виконання граничної рівності (2.35). Для цього скористаємось належністю $\tilde{V}_\beta(t, \cdot; \tau, \xi)$ до класу $\mathrm{P}(\mathbb{S})$, як згортки елементів цього класу, бо $\{G(t-\beta; \cdot);\ \Phi(\beta, \cdot; \tau, \xi)\} \subset \mathrm{P}(\mathbb{S})$, а

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\beta; \cdot - y)\Phi(\beta, y; \tau, \xi)\, dy = G(t-\beta; \cdot) * \Phi(\beta, \cdot; \tau, \xi),$$
$$0 \le \tau < \beta < t \le T,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Урахувавши рівність [9]

$$G(t; x) = F^{-1}[\theta_t(\xi)](t; x), \quad (t; x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2.39}$$

де $\theta_t(\cdot) := e^{tP_0(\cdot)}$, $P_0(\cdot) := (P_0^{lj}(\cdot))_{l,j=1}^m$, та властивості перетворення Фур'є F (див. п. 1), приходимо до висновку, що для доведення граничного співвідношення (2.35) досить установити виконання співвідношення

$$\theta_{(t-\beta)}(\cdot)F[\Phi(\beta,x;\tau,\xi)](\beta,\cdot;\tau,\xi) \underset{\beta\to t-0}{\longrightarrow} F[\Phi(t,x;\tau,\xi)](t,\cdot;\tau,\xi),$$
$$0 \le \tau < t \le T,\ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

у сенсі збіжності в класі $\mathrm{P}(\mathbb{S})$, тобто переконатись у правильності таких тверджень [10]:

I) при кожному фіксованому $\tau\in[0;T)$, $t\in(\tau;T]$ і $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$|\partial_\eta^k(\theta_{(t-\beta)}(\eta)\Psi(\beta,\eta;\tau,\xi)-\Psi(t,\eta;\tau,\xi))| \overset{\eta\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\underset{\beta\to t-0}{\rightrightarrows}} 0 \quad (\forall\, k\in\mathbb{Z}_+^n) \tag{2.40}$$

(тут йдеться про рівномірне прямування стосовно η на кожному компакті $\mathbb{K}$ із $\mathbb{R}^n$), де

$$\Psi(\beta,\cdot;\tau,\xi) := F[\Phi(\beta,x;\tau,\xi)](\beta,\cdot;\tau,\xi);$$

II) $\forall\,\tau\in[0;T)\ \forall\, t\in(\tau;T]\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n\ \forall\, p\in\mathbb{Z}_+\ \exists\, c_p>0\ \forall\, q\in\mathbb{Z}_+^n$, $|q|_*\le p$, $\forall\,\beta\in(\tau;t)$, $0<(t-\beta)\ll 1$, $\forall\,\eta\in\mathbb{R}^n$:

$$|\partial_\eta^q(\theta_{(t-\beta)}(\eta)\Psi(\beta,\eta;\tau,\xi))| \le \frac{c_p}{(1+\|\eta\|)^p}.$$

Оскільки

$$|\partial_\eta^k(\theta_{(t-\beta)}(\eta)\Psi(\beta,\eta;\tau,\xi)-\Psi(t,\eta;\tau,\xi))|$$
$$\le |\partial_\eta^k((\theta_{(t-\beta)}(\eta)-I)\Psi(\beta,\eta;\tau,\xi))|$$
$$+\,|\partial_\eta^k(\Psi(\beta,\eta;\tau,\xi))-\Psi(t,\eta;\tau,\xi)|,$$

то взявши до уваги належність $\Psi(\beta,\cdot;\tau,\xi)$ до класу $\mathrm{P}(\mathbb{S})$ при кожному $\beta\in(\tau;t)$, одержуємо, що (2.40) виконуватиметься, якщо виконуватимуться такі співвідношення:

$$|\partial_\eta^r(\theta_{(t-\beta)}(\eta)-I)| \overset{\eta\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\underset{\beta\to t-0}{\rightrightarrows}} 0; \quad |\partial_\eta^k(\Psi(\beta,\eta;\tau,\xi)-\Psi(t,\eta;\tau,\xi))| \overset{\eta\in\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}{\underset{\beta\to t-0}{\rightrightarrows}} 0. \tag{2.41}$$

З рівності

$$(\partial_\eta^r(\theta_{(t-\beta)}(\eta)-I)) = (t-\beta)\partial_\eta^r(P_0(\eta)\theta_{(\chi(t-\beta))}(\eta)), \quad \chi\in(0;1),$$

одержуємо також, що встановлення першого із співвідношень (2.41) зводиться до встановлення обмеженості $\sup_{0\le t<1,\ \eta\in\mathbb{K}} |\partial_\eta^k \theta_t(\eta)|$, $|k|_* \le |r|_*$.

Згідно із твердженням відповідної леми з [5, с. 78] та параболічністю системи (1.2), маємо

$$|\theta_t(\eta)| \le c_0(1+\|\eta\|^p)^{m-1} e^{-\delta_0 t\|\eta\|^h}, \quad \eta\in\mathbb{R}^n,\ t\in[0;T], \tag{2.42}$$

де c_0 і δ_0 — додатні сталі, не залежні від t і η; крім цього, для $\eta\in\mathbb{C}^n$

$$|\theta_t(\eta)| \le c_1 e^{\delta_1\|\eta\|^{p_0}}, \quad t\in[0;T]$$

(тут c_1 і δ_1 — додатні сталі, залежні лише від T).

Звідси використовуючи означення роду μ системи (1.2), розмірковуючи при цьому так, як при доведенні теорем 1–3 з [10, с. 252, 256, 259] у випадку додатного роду μ, а при $\mu=0$, застосовуючи відповідні теореми $1'$, $4'$ з [10, с. 256, 266], приходимо до існування додатних сталих c і B таких, що для всіх $t\in[0;T]$, $\eta\in\mathbb{R}^n$ і $k\in\mathbb{Z}_+^n$ виконується нерівність

$$|\partial_\eta^k \theta_t(\eta)| \le cB^{|k|_*}|k|_*^{(1-\alpha)|k|_*}(1+\|\eta\|^\gamma). \tag{2.43}$$

Оцінка (2.43) забезпечує вже обмеженість виразу

$$\sup_{\substack{0\le t<1,\\ \eta\in\mathbb{K}}} |\partial_\eta^r \theta_t(\eta)| \quad (\forall\, r\in\mathbb{Z}_+^n\ \forall\,\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n),$$

а, відтак і виконання першого граничного співвідношення з (2.41).

Щодо другого співвідношення з (2.41), то згідно з твердженням леми 2.3 маємо

$$\begin{aligned}
&|\partial_\eta^k(\Psi(\beta,\eta;\tau,\xi)-\Psi(t,\eta;\tau,\xi))|\\
&\qquad\le \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^{|k|_*}|\Phi(\beta,x;\tau,\xi)-\Phi(t,x;\tau,\xi)|\,dx\\
&\le \max\{(t-\beta),(t-\beta)^{\alpha_0}\}c_0(t-\tau)^{\alpha_0-(1+\alpha n+\frac{p}{h})}\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|^{|k|_*}e^{-\delta_0\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}dx\\
&\le \max\{(t-\beta),(t-\beta)^{\alpha_0}\}2^{|k|_*}c_0\sum_{l=0}^{|k|_*}\|\xi\|^{|k|_*-l}(t-\tau)^{\alpha_0+\alpha l-(1+\frac{p}{h})}\\
&\qquad\times\int_{\mathbb{R}^n}\|y\|^l e^{-\delta_0\|y\|^{\frac{1}{1-\alpha}}}\,dy,
\end{aligned}$$

$$0\le\tau<\beta<t\le T,\ (t-\beta)\ll 1,\ \{\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n,\ k\in\mathbb{Z}_+^n.$$

Таким чином, виконання твердження I) установлено.

Зазначимо, що

$$|\partial_\eta^k \Psi(t,\eta;\tau,\xi)| \le c_{k,l} \frac{(1+\|\xi\|)^{|k|_*}}{(1+\|\eta\|)^l} (t-\tau)^{\alpha_0 - (1+\frac{l}{h})},$$
$$(t,\eta;\tau,\xi) \in \Pi_T^2,\ k \in \mathbb{Z}_+^n,\ l \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.44)$$

де додатна стала $c_{k,l}$ залежить лише від k і l. Дійсно, з огляду на нерівність (2.24), для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $\tau \in [0;T)$, $t \in (\tau;T]$ і $\{\eta,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ маємо

$$|\eta^q \partial_\eta^k \Psi(t,\eta;\tau,\xi)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_x^q (x^k \Phi(t,x;\tau,\xi))|\, dx$$
$$\le c_{k,q} \sum_{|r|_*=0}^{\min\{|q|_*,|k|_*\}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x\|^{|k-r|_*} |\partial_x^{q-r} \Phi(t,x;\tau,\xi)|\, dx$$
$$\le c_1 c_{k,q} \sum_{|r|_*=0}^{\min\{|q|_*,|k|_*\}} (t-\tau)^{\alpha_0 - (1+\alpha n + \frac{|q-r|_*}{h})}$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\|x-\xi\| + \|\xi\|)^{|k-r|_*} e^{-\delta_* \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\, dx$$
$$\le \hat{c}_{k,q} (1+\|\xi\|)^{|k|_*} (t-\tau)^{\alpha_0 - (1+\frac{|q|_*}{h})},$$

де стала $\hat{c}_{k,q}$ не залежить від t, τ, ξ і η.

Використовуючи тепер оцінки (2.43), (2.44) і виділяючи скрізь залежність від t, β, τ, ξ і η, одержимо, що

$$|\partial_\eta^q (\theta_{(t-\beta)}(\eta) \Psi(\beta,\eta;\tau,\xi))| \le c_0 \frac{(1+\|\xi\|)^{|q|_*}}{(1+\|\eta\|)^l} (t-\tau)^{\alpha_0 - (1+(l+\gamma)/h)},$$

для всіх $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $\{\eta,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \le \tau < t \le T$ і $\beta > \tau$ таких, що $0 < t - \beta < \frac{1}{2}(t-\tau)$, причому константа $c_0 > 0$ не залежить від t, β, τ і η.

Отже, твердження II) також виконується.

Лему доведено. □

Лема 2.5. *Об'ємний потенціал W є диференційовною матричною функцією за змінною t на $(\tau;T]$ такою, що*

$$\partial_t W(t,x;\tau,\xi) = \Phi(t,x;\tau,\xi) + \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t-\beta;x-y) \Phi(\beta,y;\tau,\xi)\, dy,$$
$$(t,x;\tau,\xi) \in \Pi_T^2.$$

Доведення. Оскільки

$$\partial_t W(t,x;\tau,\xi) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\left\{\int\limits_{\tau}^{t+\Delta}\tilde{V}_\beta(t+\Delta,x;\tau,\xi)\,d\beta - \int\limits_{\tau}^{t}\tilde{V}_\beta(t,x;\tau,\xi)\,d\beta\right\},$$

то для доведення диференційовності $W(t,x;\tau,\xi)$ за змінною t необхідно встановити існування границі з правої частини цієї рівності. Проте зазначена границя існуватиме, якщо існуватимуть рівні між собою відповідні односторонні границі I_+ та I_-:

$$I_\pm := \lim_{\Delta\to +0}\frac{1}{\pm\Delta}\left\{\int\limits_{\tau}^{t\pm\Delta}\tilde{V}_\beta(t\pm\Delta,x;\tau,\xi)\,d\beta - \int\limits_{\tau}^{t}\tilde{V}_\beta(t,x;\tau,\xi)\,d\beta\right\}.$$

Переконаємося спочатку в існуванні I_+. Зазначимо, що

$$\frac{1}{\Delta}\left\{\int\limits_{\tau}^{t+\Delta}\tilde{V}_\beta(t+\Delta,x;\tau,\xi)\,d\beta - \int\limits_{\tau}^{t}\tilde{V}_\beta(t,x;\tau,\xi)d\beta\right\}$$
$$= \frac{1}{\Delta}\left\{\int\limits_{t}^{t+\Delta}\tilde{V}_\beta(t+\Delta,x;\tau,\xi)\,d\beta + \int\limits_{\tau}^{t}(\tilde{V}_\beta(t+\Delta,x;\tau,\xi) - \tilde{V}_\beta(t,x;\tau,\xi))\,d\beta\right\}.$$

Звідси, скориставшись твердженням леми 2.4 та властивістю про середнє значення інтеграла, одержимо

$$\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t}^{t+\Delta}\tilde{V}_\beta(t+\Delta,x;\tau,\xi)\,d\beta = \tilde{V}_{(t+\theta\Delta)}(t+\Delta,x;\tau,\xi)\underset{\Delta\to+0}{\longrightarrow}\Phi(t,x;\tau,\xi),$$

$$\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\tau}^{t}(\tilde{V}_\beta(t+\Delta,x;\tau,\xi) - \tilde{V}_\beta(t,x;\tau,\xi))\,d\beta$$
$$= \int\limits_{\tau}^{t}\partial_t\tilde{V}_\beta(t+\theta\Delta,x;\tau,\xi)\,d\beta, \quad \theta\in(0;1).$$

Таким чином, враховуючи неперервність похідної $\partial_t\tilde{V}_\beta(t,x;\tau,\xi)$ за змінною t (див. лему 2.4), а також рівність (2.37), для доведення граничного співвідношення

$$\lim_{\Delta\to+0}\frac{1}{\Delta}\int_\tau^t(\tilde V_\beta(t+\Delta,x;\tau,\xi)-\tilde V_\beta(t,x;\tau,\xi))\,d\beta$$
$$=\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_t G(t-\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)\,dy,$$

досить обґрунтувати граничний перехід у наступній рівності

$$\lim_{\Delta\to+0}\int_\tau^t\partial_t\tilde V_\beta(t+\Delta,x;\tau,\xi)\,d\beta=\int_\tau^t(\lim_{\Delta\to+0}\partial_t\tilde V_\beta(t+\Delta,x;\tau,\xi))\,d\beta. \quad (2.45)$$

Для цього оцінимо підінтегральний вираз із лівої частини цієї рівності. Скориставшись ще раз рівністю (2.37), а також (2.38) та оцінками (2.36), (1.4) і (2.24), виділяючи скрізь залежність від Δ, одержимо

$$\left|\int_\tau^t\partial_t\tilde V_\beta(t+\Delta,x;\tau,\xi)\,d\beta\right|$$
$$\le\left|\int_\tau^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{(t+\Delta)}G(t+\Delta-\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)\,dy\right|$$
$$+\left|\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_{(t+\Delta)}G(t+\Delta-\beta;z)\Phi(\beta,x-z;\tau,\xi)\,dz\right|$$
$$\le\int_\tau^{t_1}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_{(t+\Delta)}G(t+\Delta-\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)|\,dy$$
$$+\,m\sum_{|k|_*\le p}|A_{0,k}|\int_{t_1}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}|G(t+\Delta-\beta;z)\partial_z^k\Phi(\beta,x-z;\tau,\xi)|\,dz$$
$$\le c_0(t-\tau+\Delta)^{-\alpha n}\Bigg(\int_\tau^{t_1}(\beta-\tau)^{\alpha_0-1}(t-\beta+\Delta)^{\alpha n-\frac{n+p+\gamma}{h}}\,d\beta$$
$$+\int_{t_1}^{t}(t-\beta+\Delta)^{\alpha_0-1}(\beta-\tau)^{\alpha_0-(1+\frac{p}{h})}\,d\beta\Bigg)$$
$$\le c_0(t-\tau)^{-\alpha n}\big((t-t_1+\Delta)^{\frac{p_1-p}{h}}+(t_1-\tau)^{-\frac{p}{h}}\big)\int_\tau^{t+\Delta}((t-\beta+\Delta)(\beta-\tau))^{\alpha_0-1}\,d\beta$$

$$\leq c_0 B(\alpha_0, \alpha_0) 2^{2(1-\alpha_0)} T_0^{\frac{p_1}{h}} (t-\tau)^{2\alpha_0 - (1+\alpha n + \frac{p}{h})},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \ 0 < \Delta < \frac{1}{2}(t-\tau), \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Одержана оцінка характеризує рівномірну збіжність інтеграла з лівої частини рівності (2.45) та забезпечує виконання цієї рівності.

Отже, правостороння границя I_+ існує, причому

$$I_+ = \Phi(t, x; \tau, \xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t-\beta; x-y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi)\, dy,$$

$$(t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2.$$

Аналогічним способом, використовуючи зображення

$$\frac{1}{-\Delta} \left\{ \int_\tau^{t-\Delta} \tilde{V}_\beta(t-\Delta, x; \tau, \xi)\, d\beta - \int_\tau^t \tilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi)\, d\beta \right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \Big\{ \int_{t-\Delta}^t \tilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi)\, d\beta + \int_\tau^{t-\Delta} (\tilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi)$$

$$- \tilde{V}_\beta(t-\Delta, x; \tau, \xi)\, d\beta \Big\},$$

переконуємося в існуванні лівосторонньої границі I_-, значення якої збігається із I_+.

Лему доведено. ☐

Теорема 2.2. *Для кожного елемента $\varphi \in \mathbb{S}$ виконується граничне співвідношення*

$$\langle Z(t, x; \tau, \cdot), \varphi(\cdot) \rangle \underset{t \to \tau+0}{\longrightarrow} \varphi(x), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \ x \in \mathbb{R},$$

де $\langle (g_{lj}(\cdot))_{l,j=1}^m, \ \mathrm{col}(\varphi_1(\cdot); \ldots; \varphi_m(\cdot)) \rangle := \mathrm{col}\big(\sum_{j=1}^m \langle g_{1j}(\cdot), \varphi_j(\cdot) \rangle; \ldots; \sum_{j=1}^m \langle g_{mj}(\cdot), \varphi_j(\cdot) \rangle \big)$.

Доведення. Оскільки G — ФМРЗК, то

$$\langle G(t-\tau; x-\cdot), \varphi(\cdot) \rangle \underset{t \to \tau+0}{\longrightarrow} \varphi(x), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \ x \in \mathbb{R}, \ \varphi \in \mathbb{S}.$$

Тому для доведення теореми досить установити таке граничне співвідношення:

$$\langle W(t, x; \tau, \cdot), \varphi(\cdot) \rangle \underset{t \to \tau+0}{\longrightarrow} 0, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \ x \in \mathbb{R}, \ \varphi \in \mathbb{S}. \qquad (2.46)$$

Проте співвідношення (2.46) виконуватиметься, якщо існуватиме така додатна стала c_0, що для всіх $\beta \in [\tau; t],\ 0 \le \tau < t \le T$, і $y \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi(\beta, y; \tau, \xi)} \varphi(\xi)\, d\xi \right| \le c_0 \tag{2.47}$$

(тут риска зверху означає комплексну спряженість).

Дійсно, скориставшись оцінками (1.4) і (2.47) та відповідною теоремою Фубіні, одержимо

$$\begin{aligned}
&|\langle W(t, x; \tau, \cdot), \varphi(\cdot)\rangle| \\
&\quad = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\left(\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t-\beta; x-y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi)\, dy \right)} \varphi(\xi)\, d\xi \right| \\
&\quad = \left| \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{G(t-\beta; x-y)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi(\beta, y; \tau, \xi)} \varphi(\xi)\, d\xi \right) dy \right| \\
&\qquad \le m c_0 \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G(t-\beta; x-y)|\, dy \\
&\qquad \le m c c_0 \int\limits_{\tau}^{t} (t-\beta)^{-\frac{n+\gamma}{h}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta\left(\frac{\|x-y\|}{(t-\beta)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\, dy\, d\beta \\
&\qquad = \frac{m c c_0 h E}{p_1 + h\alpha_0} (t-\tau)^{\alpha_0 + \frac{p_1}{h}}, \quad 0 \le \tau < t \le T,\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Звідси приходимо до виконання співвідношення (2.46).

Отже, доведення вихідної теореми звелось до встановлення оцінки (2.47).

Переконаємося спочатку в існуванні для кожного $l \in \mathbb{N}$ додатної сталої c_l такої, що для всіх $\beta \in [\tau; t],\ 0 \le \tau < t \le T$, і $y \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$\big|J_l(\beta, \tau, y)\big| := \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K_l(\beta, y; \tau, \xi)} \varphi(\xi)\, d\xi \right| \le c_l, \quad \varphi \in \mathbb{S}. \tag{2.48}$$

Нехай $l = 1$, тоді

$$J_l(\beta, \tau, y) = \sum_{|k|_* \le p_1} \overline{A_{1,k}(\beta; y) i^{|k|_*}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{(\partial_\zeta^k G(\beta-\tau; \zeta))} \varphi(y-\zeta)\, d\zeta$$

$$= \sum_{|k|_* \le p_1} \overline{A_{1,k}(\beta; y) i^{|k|_*}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{G(\beta-\tau;\zeta)} (\partial^k_{(y-\zeta)} \varphi(y-\zeta))\, d\zeta$$

$$= \sum_{|k|_* \le p_1} \overline{A_{1,k}(\beta; y) i^{|k|_*}} \langle G(\beta-\tau;\zeta), \psi_k(y-\zeta)\rangle, \quad (2.49)$$

де $\psi_k(\cdot) := \partial^k \varphi(\cdot) \in \mathbb{S}$, $k \in \mathbb{Z}^n_+$.

Скориставшись рівністю (2.39), оцінкою (2.42), а також тим, що $F[S] = S$, дістанемо

$$|\langle G(\beta-\tau;\zeta), \psi_k(y-\zeta)\rangle| = (2\pi)^{-n} |\langle e^{(\beta-\tau)P_0(\xi)}, F[\psi_k(y-\zeta)]\rangle|$$

$$= (2\pi)^{-n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{e^{(\beta-\tau)P_0(\xi)} e^{-i(\xi,y)}} F[\psi_k](\xi) \right|$$

$$\le (2\pi)^{-n} m c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \|\xi\|^{p(m-1)}\right) |F[\psi_k](\xi)|\, d\xi = \widetilde{c_k} < +\infty,$$

$$y \in \mathbb{R}^n,\ k \in \mathbb{Z}^n_+,\ \beta \in [\tau; t],\ 0 \le \tau < t \le T.$$

Звідси, врахувавши рівність (2.49) та умову B), приходимо до оцінки (2.48) при $l = 1$.

У випадку $l = 2$ маємо

$$J_2(\beta,\tau,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\left(\int\limits_{\tau}^{\beta} d\beta_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} K_1(\beta, y; \beta_1, \zeta) K_1(\beta_1, \zeta; \tau, \xi) d\zeta \right)} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Змінивши згідно з теоремою Фубіні порядок інтегрування стосовно просторових змінних і скориставшись обмеженістю J_1 та оцінкою (2.4), одержимо

$$|J_2(\beta,\tau,y)| = \left| \int\limits_{\tau}^{\beta} d\beta_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K_1(\beta, y; \beta_1, \zeta)} J_1(\beta_1, \tau, \zeta)\, d\zeta \right| \le \frac{m c c_1 E}{\alpha_0} (\beta-\tau)^{\alpha_0},$$

для всіх $\beta \in [\tau; t],\ 0 \le \tau < t \le T,\ y \in \mathbb{R}^n$.

Таким чином, оцінка (2.48) виконується і при $l = 2$.

Застосовуючи тепер метод математичної індукції, використовуючи при цьому зображення

$$J_l(\beta,\tau,y) = \int\limits_{\tau}^{\beta} d\beta_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K_1(\beta, y; \beta_1, \zeta)} J_{l-1}(\beta_1, \tau, \zeta)\, d\zeta, \quad l > 2,$$

аналогічним способом переконуємось у правильності оцінки (2.48) для всіх натуральних l, більших за 2.

Зазначимо далі, що фактично при доведенні леми 2.1 було встановлено існування такого номера l_*, що

$$\left|\sum_{l=l_*+1}^{\infty} K_l(t,x;\tau,\xi)\right| \leq c_* e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,\ 0 \leq \tau < t \leq T$$

(тут додатні сталі c_* і δ_* не залежать від x, ξ, t і τ). Урахувавши цей факт, а також структуру (2.3) матричної функції Φ та оцінку (2.48), знаходимо, що для всіх $\varphi \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi(\beta,y;\tau,\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi\right| \\
&\qquad \leq \sum_{l=1}^{l_*} \left|J_l(\beta,\tau,y)\right| + m\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{l=l_*+1}^{\infty} K_l(\beta,y;\tau,\xi)\right| |\varphi(\xi)|\,d\xi \\
&\qquad\qquad \leq \sum_{l=1}^{l_*} c_l + mc_*\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|\,d\xi \equiv c_0 < +\infty, \\
&\qquad\qquad\qquad \beta \in [\tau;t],\ 0 \leq \tau < t \leq T,\ y \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

де константа c_0 не залежить від β, τ, t і y.

Отже, оцінка (2.47) також виконується.

Теорему доведено. □

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови* A) *і* B)*, тоді матрична функція Z, яка визначається рівністю* (2.1)*, є ФМРЗК для системи* (1.1).

Доведення. Зваживши на рівності (2.2), (2.38), лему 2.5 і наслідок 2.2, для всіх $(t;x) \in \Pi_{(\tau;0]}$, $\tau \in [0;T)$, і $\xi \in \mathbb{R}^n$ одержуємо

$$\begin{aligned}
\partial_t Z(t,x;\tau,\xi) &= \partial_t G(t-\tau;x-\xi) + \partial_t W(t,x;\tau,\xi) \\
&= P_0(i\partial_x)G(t-\tau;x-\xi) + \Phi(t,x;\tau,\xi) \\
&\quad + \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_t G(t-\beta;x-y)\big)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)\,dy
\end{aligned}$$

$$= \{P_0(i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\}G(t-\tau; x-\xi)$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\{P_0(i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\}G(t-\beta; x-y)\Phi(\beta, y; \tau, \xi)\, dy\big)$$

$$= \{P_0(i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\}G(t-\tau; x-\xi)$$

$$+ \{P_0(i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\}W(t, x; \tau, \xi)$$

$$= \{P_0(i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\}Z(t, x; \tau, \xi).$$

Таким чином, матрична функція $Z(t, x; \tau, \xi)$, як функція змінних $(t; x)$, на $\Pi_{(\tau;T]}$ є звичайним розв'язком системи (1.1) у кожній фіксованій точці $(\tau; \xi) \in \Pi_{[0;T)}$.

Якщо врахувати тепер твердження теореми 2.2, то прийдемо до висновку, що для зазначеної функції Z виконуються всі умови з означення ФМРЗК для системи (1.1).

Теорему доведено. $\square$

Зауваження 2.1. Відомо [5], що при $p = h$ рід μ системи (1.2) дорівнює 1, а $p_0 = h = 2b$, $b \in \mathbb{N}$. Тоді

$$h - n(1 - h\mu/p_0) - (m-1)(p-h) = 2b$$

і умова A) набуває вигляду $0 \le p_1 < 2b$. А це означає, що (1.1) є параболічною за І. Г. Петровським системою.

У цьому випадку одержані тут результати про ФМРЗК для системи (1.1) залишаються правильними і при змінних коефіцієнтах відповідної рівномірно параболічної системи (1.2), за умови, що ці коефіцієнти є рівномірно неперервними за t стосовно просторової змінної, для яких виконується умова B) (див., наприклад, [2, 3]).

Література

[1] И. Г. Петровский, *О проблеме Коши для систем уравнений с частными производными в области неаналитических функций* // Бюлл. МГУ. Математика и механика, **1** (1938), N 7, 1–72.

[2] С. Д. Эйдельман, *Параболические системы*, М.: Наука, 1964, 443 с.

[3] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, М.: Мир, 1968, 427 с.

[4] Г. Е. Шилов, *Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами* // Успехи мат. наук, **10** (1955), N 4, 89–101.

[5] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, М.: Физматгиз, 1958, 274 с.

[6] С. Д. Эйдельман, С. Д. Ивасишен, Ф. О. Порпер, *Теоремы Лиувилля для параболических в смысле Шилова систем* // Изв. вузов. Математика, (1961), N 6, 169–179.

[7] В. В. Городецкий, *Некоторые теоремы о стабилизации решений задачи Коши для параболических по Шилову систем в классах обобщенных функций* // Укр. мат. журн., **40** (1988), N 1, 43–48.

[8] У Хоу-синь, *Об определении параболичности систем уравнений в частных производных* // Успехи мат. наук., **15** (1960), N 6, 157–161.

[9] Я. И. Житомирский, *Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами* // Изв. АН СССР. Сер. матем., **23** (1959), 925–932.

[10] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, М.: Физматгиз, 1958, 307 с.

[11] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.* 2, М.: Наука, 1969, 800 с.

Відомості про авторів

Владислав Антонович Літовченко, Ірина Михайлівна Довжицька

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського 2,
58012, Чернівці
Україна
E-Mail: vladlit4@mail.ru,
ira nezvanova@mail.ru