Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 4, 453 – 466

# О функциях с заданными шаровыми средними на симметрических пространствах

Виталий В. Волчков

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

**Аннотация.** Изучается проблема обращения локального преобразования Помпейю на симметрических пространствах $X$ некомпактного типа ранга один. Получено восстановление функции в шаре $B_R \subset X$, если известны ее средние по всем шарам двух фиксированных радиусов из $B_R$.

**2010 MSC.** 26B15, 43A85, 44A15, 53C65, 53C35.

**Ключевые слова и фразы.** Преобразование Помпейю, теоремы о двух радиусах, симметрические пространства.

## Введение

Пусть $X$ — евклидово или симметрическое пространство некомпактного типа ранга один [1, гл. 1, § 4, п. 3], $G$ — группа изометрий $X$, $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i=1}^s$ — заданное семейство распределений с компактным носителем в $X$. При фиксированном $g \in G$ рассмотрим распределение $gT_i$, действующее на $C^\infty(X)$ по правилу $\langle gT_i, f\rangle = \langle T_i, f \circ g^{-1}\rangle$, $f \in C^\infty(X)$. Для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset X$ такого, что каждое из множеств $\Lambda(\mathcal{U}, T_i) = \{g \in G\colon \operatorname{supp} gT_i \subset \mathcal{U}\}$, $i = 1, \dots, s$, непусто, преобразование Помпейю $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}$ отображает $C^\infty(\mathcal{U})$ в декартово произведение $C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, T_1)) \times \dots \times C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, T_s))$ следующим образом: $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}(f) = (f_1, \dots, f_s)$, где $f_i(g) = \langle gT_i, f\rangle$, $g \in \Lambda(\mathcal{U}, T_i)$, $i = 1, \dots, s$. Для заданных $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ возникают следующие проблемы (см., например, [2, § 3]):

(i) *выяснить, является ли преобразование $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}$ инъективным, и если не является , то описать его ядро*;

(ii) *если $\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{U}}$ инъективно, то найти обратное отображение.*

*Статья поступила в редакцию* 9.11.2010

Помимо самостоятельного интереса, эти задачи имеют глубокие связи с периодичностью в среднем, теорией гармонических функций, рядами экспонент, теорией аппроксимации, микролокальным анализом, с оценками плотности упаковок в комбинаторной геометрии, а также различными вопросами комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории отображений, сохраняющих меру, и теории графов (см. обзоры [2–6], а также [7]).

Следуя классическим работам Минковского, Функа, Радона и Помпейю (см., например, [8, Приложение, п. 6], [2, § 3]), многие авторы изучали проблемы (i), (ii), когда $T_i$ равно $\chi_{r_i}$ или $\sigma_{r_i}$, где $\chi_{r_i}$ является индикатором открытого шара $B_{r_i}$ радиуса $r_i$, а $\sigma_{r_i}$ — поверхностная дельта-функция сферы $\partial B_{r_i}$, $i = 1, \dots, s$. Однако, даже в этих модельных случаях полное решение сформулированных задач далеко от завершения и известно лишь при $s = 1$ [7, часть 2], [9]. Большой интерес представляет изучение случая $\mathcal{F} = \{\chi_{r_1}, \chi_{r_2}\}$ и $\mathcal{U} = B_R$. Необходимые и достаточные условия инъективности $\mathcal{P}_{\{\chi_{r_1},\chi_{r_2}\},B_R}$ уже получены и состоят в следующем [7, часть 2], [9]: преобразование $\mathcal{P}_{\{\chi_{r_1},\chi_{r_2}\},B_R}$ инъективно в том и только том случае, когда $R \geqslant r_1 + r_2$ и множество $N(r_1, r_2)$ общих положительных нулей сферических преобразований индикаторов $\chi_{r_i}$ является пустым. Проблема обращения $\mathcal{P}_{\{\chi_{r_1},\chi_{r_2}\},B_R}$ является более сложной и была решена лишь для классических пространств $X$ [10–14]. В данной работе мы рассматриваем случай произвольного симметрического пространства некомпактного типа ранга один. Отметим, что в отличие от работ [10–14] принципиальную роль при этом играет техника, развитая автором в [15, часть 1]. В частности, мы существенно используем реализации $X$, найденные в [15, часть 1, гл. 2]. Кроме того, в наших построениях важное значение имеет интерпретация неприводимых компонент квазирегулярного представления групп, транзитивных на сферах, полученная в [15, часть 1, гл. 4], а также явные представления для интегралов Эйзенштейна из [15, часть 1, гл. 5].

## 1. Обозначения

В работе используются следующие стандартные обозначения: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ — соответственно множества вещественных, комплексных, натуральных, целых и целых неотрицательных чисел; $[t]$ — целая часть числа $t \in \mathbb{R}$; $\overline{\lambda}$ — комплексное сопряжение к числу $\lambda \in \mathbb{C}$; $(\lambda)_l$ — символ Похгаммера ($(\lambda)_0 = 1$ и $(\lambda)_l = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+l-1)$ при $l \in \mathbb{N}$); $\delta_0$ — дельта-функция в нуле; $\Gamma$ — гамма-функция; $F(a, b; c; z)$ —

гипергеометрическая функция Гаусса;

$$\varphi_{\lambda}^{(\alpha,\beta)}(t) = F((\alpha+\beta+1+i\lambda)/2, (\alpha+\beta+1-i\lambda)/2; \alpha+1; -(\operatorname{sh} t)^2).$$

Пусть $X$ — симметрическое пространство некомпактного типа ранга один. Дальнейшие построения опираются на классификацию пространств $X$ и их реализации. Как известно (см. [1, гл. 1, § 4, п. 3]), все такие пространства состоят из гиперболических пространств $\mathbb{H}^n_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K}$ обозначает поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, или тело кватернионов $\mathbb{Q}$) и гиперболической плоскости Кэли $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$. Будем считать, что максимум секционной кривизны $X$ равен $-1$. Тогда $X$ можно рассматривать как риманово многообразие $(\mathcal{D}, ds^2)$, где область $\mathcal{D}$ и риманова метрика $ds^2$ задаются следующим образом (см. [15, часть 1, гл. 2]):

1) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, $ds^2 = (1-|x|^2)^{-2}|dx|^2$;

2) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$,
$ds^2 = (1-|z|^2)^{-1}|dz|^2 + (1-|z|^2)^{-2}\mathfrak{F}_1(z, dz)$,
где
$$\mathfrak{F}_1(z, dz) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{z}_i z_j \, dz_i \, d\overline{z}_j;$$

3) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{Q}}$: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^{2n} : |z| < 1\}$,
$ds^2 = (1-|z|^2)^{-1}|dz|^2 + (1-|z|^2)^{-2}\mathfrak{F}_2(z, dz)$,
где
$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_2(z, dz) = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\big(\overline{z}_i z_j + z_{n+i}\overline{z}_{n+j}\big)\, dz_i\, d\overline{z}_j \\ + \big(\overline{z}_i z_{n+j} - z_{n+i}\overline{z}_j\big)\, dz_i\, d\overline{z}_{n+j} + \big(\overline{z}_{n+i} z_j - z_i \overline{z}_{n+j}\big)\, dz_{n+i}\, d\overline{z}_j \\ + \big(z_i\overline{z}_j + \overline{z}_{n+i} z_{n+j}\big)\, dz_{n+i}\, d\overline{z}_{n+j}\Big);\end{aligned}$$

4) $X = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^{16} : |x| < 1\}$,
$ds^2 = (1-|x|^2)^{-1}|dx|^2 + 2^{-1}(1-|x|^2)^{-2}\mathfrak{F}_3(x, dx)$,
где
$$\mathfrak{F}_3(x, dx) = \sum_{i,j=1}^{16} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\big(\Phi(x,y)\big)\, dx_i\, dx_j,$$

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) = 2\big(p_1(x)p_1(y) + \cdots + p_8(x)p_8(y)\big) \\ + p_9(x)p_9(y) + p_{10}(x)p_{10}(y),\end{aligned}$$

$$p_1(x) = x_1x_2 - x_3x_4 - x_5x_6 - x_7x_8 - x_9x_{10} - x_{11}x_{12} - x_{13}x_{14} - x_{15}x_{16},$$

$$p_2(x) = x_1x_4 - x_9x_{12} - x_5x_8 - x_{13}x_{16} + x_3x_2 + x_{11}x_{10} + x_7x_6 + x_{15}x_{14},$$

$$p_3(x) = x_1x_6 - x_9x_{14} + x_5x_2 + x_{13}x_{10} + x_3x_8 + x_{11}x_{16} - x_7x_4 - x_{15}x_{12},$$

$$p_4(x) = x_1x_8 + x_9x_{16} + x_5x_4 - x_{13}x_{12} - x_3x_6 + x_{11}x_{14} + x_7x_2 - x_{15}x_{10},$$

$$p_5(x) = x_1x_{10} + x_9x_2 + x_5x_{14} - x_{13}x_6 + x_3x_{12} - x_{11}x_4 - x_7x_{16} + x_{15}x_8,$$

$$p_6(x) = x_1x_{12} + x_9x_4 - x_5x_{16} + x_{13}x_8 - x_3x_{10} + x_{11}x_2 - x_7x_{14} + x_{15}x_6,$$

$$p_7(x) = x_1x_{14} + x_9x_6 - x_5x_{10} + x_{13}x_2 + x_3x_{16} - x_{11}x_8 + x_7x_{12} - x_{15}x_4,$$

$$p_8(x) = x_1x_{16} - x_9x_8 + x_5x_{12} + x_{13}x_4 - x_3x_{14} - x_{11}x_6 + x_7x_{10} + x_{15}x_2,$$

$$p_9(x) = x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_{15}^2, \quad p_{10}(x) = x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{16}^2.$$

Отметим, что многочлены $p_1, \dots, p_8$ и форма $\Phi(x, y)$ наглядно интерпретируются в терминах чисел Кэли (см. [15, часть 1, гл. 1, п. 1.1]).

Расстояние на $X$ в указанных выше моделях определяется равенством

$$d(0, x) = \operatorname{arth}|x|, \quad x \in X \tag{1.1}$$

и условием инвариантности $d$ относительно группы изометрий $G$ пространства $X$. Пусть $a_X$ — вещественная размерность $X$. Соотношение (1.1) показывает, что геодезический шар $B_R = \{x \in X : d(0, x) < R\}$ совпадает с открытым евклидовым шаром из $\mathbb{R}^{a_X}$ с центром в нуле и радиусом $\operatorname{th} R$.

Положим $\alpha_X = -1 + a_X/2$, а $\beta_X = n/2 - 1$, 0, 1, 3, соответственно, в каждом из следующих четырех случаев:

1) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$;

2) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$;

3) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{Q}}$;

4) $X = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$.

Риманова мера на $X$ имеет вид

$$d\mu(x) = (1 - |x|^2)^{-\rho_X - 1} dx, \tag{1.2}$$

где $dx$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^{a_X}$, $\rho_X = \alpha_X + \beta_X + 1$. Площадь сферы радиуса $r$ в $X$ равна

$$A_X(r) = b_X (\operatorname{sh} r)^{2\alpha_X + 1} (\operatorname{ch} r)^{2\beta_X + 1}, \quad \text{где } b_X = \frac{2\pi^{a_X/2}}{\Gamma(a_X/2)}.$$

## 2. Формулировка основного результата

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$ и $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$, где

$$M_X(k) = \begin{cases} 0, & X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} \\ [k/2], & X \neq \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}. \end{cases}$$

Определим $\mathcal{H}^{k,m}_X = \mathcal{H}^k_{a_X}$ в случае $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ и

$$\mathcal{H}^{k,m}_X = \left\{ f \in \mathcal{H}^k_{a_X} : (Lf)(x) = 4(\beta_X - m)(k-m)(1-|x|^2)f(x) \right\}$$

в случае $X \neq \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, где $\mathcal{H}^k_{a_X}$ — пространство однородных гармонических многочленов степени $k$ в $\mathbb{R}^{a_X}$, $L$ — оператор Лапласа–Бельтрами на $X$. Обозначим через $\mathrm{O}(a_X)$ ортогональную группу в $\mathbb{R}^{a_X}$. После отождествления $\mathcal{H}^{k,m}_X$ с пространством сужений его элементов на сферу $\mathbb{S}^{a_X-1} = \{x \in \mathbb{R}^{a_X} : |x| = 1\}$, $\mathcal{H}^{k,m}_X$ становится инвариантным подпространством квазирегулярного представления $\mathfrak{T}(\tau)$ группы $K = G \cap \mathrm{O}(a_X)$ на $L^2\left(\mathbb{S}^{a_X-1}\right)$. Если $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$ — сужение $\mathfrak{T}(\tau)$ на $\mathcal{H}^{k,m}_X$, то $\mathfrak{T}(\tau)$ является ортогональной прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$ (см. [15, часть 1, гл. 4]).

Произвольная точка $x \in \mathbb{R}^{a_X} \setminus \{0\}$ представима в виде $x = \varrho\sigma$, где $\varrho = |x|$, $\sigma = x/|x|$. Всякой функции $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d^{k,m}_X} f_{k,m,j}(\varrho) Y^{k,m}_j(\sigma), \tag{2.3}$$

где $d^{k,m}_X$ — размерность $\mathcal{H}^{k,m}_X$, $\{Y^{k,m}_j\}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{k,m}_X$ относительно поверхностной меры $d\omega$ на $\mathbb{S}^{a_X-1}$ и

$$f_{k,m,j}(\varrho) = \int\limits_{\mathbb{S}^{a_X-1}} f(\varrho\sigma)\overline{Y^{k,m}_j(\sigma)}\, d\omega(\sigma). \tag{2.4}$$

Далее будем считать, что $Y^{0,0}_1 = 1/\sqrt{b_X}$. Если $f \in C^\infty(B_R)$, то ряд (2.3) сходится к $f$ в пространстве $C^\infty(B_R)$. Таким образом, восстановление функции $f$ сводится к нахождению коэффициентов $f_{k,m,j}$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

**Теорема 2.1.** *Пусть $r_1, r_2 > 0$, $N(r_1, r_2) = \varnothing$ и $r_1 + r_2 < R$. Тогда для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \{0, \dots, M_X(k)\}$, $j \in \{1, \dots, d^{k,m}_X\}$ и $r \in (0, R)$ существуют распределения $\{\mathcal{V}_{l,i}\}$ $(l \in \mathbb{N}, i = 1, 2)$ с компактными носителями в $B_{R-r_i}$ такие, что для произвольной функции $f \in C^\infty(B_R)$*

*имеет место равенство*

$$f_{k,m,j}(\operatorname{th} r) = \lim_{l\to\infty} \left(\langle \mathcal{V}_{l,1}, f \times \chi_{r_1}\rangle + \langle \mathcal{V}_{l,2}, f \times \chi_{r_2}\rangle\right),$$

*где символ* $\times$ *обозначает свертку на* $X$.

Сделаем несколько замечаний. Построение распределений $\mathcal{V}_{l,i}$ является довольно сложным. Их явный вид содержится в доказательстве теоремы 2.1 (см. § 4 ниже). Поскольку $f \times \chi_r$ является средним по шару радиуса $r$, в теореме 2.1 содержится конструкция восстановления функции по ее шаровым средним на $X$. Отметим также, что метод доказательства теоремы 2.1 позволяет получить подобные утверждения и для других семейств распределений на $X$ (см. [14]).

## 3. Вспомогательные утверждения

Пусть $T$ — распределение (соответственно, радиальное распределение) с компактным носителем на $X$. Как обычно, обозначим через $\widetilde{T}$ его преобразование Фурье (соответственно, сферическое преобразование) (см. [15, часть 2, гл. 10]).

**Лемма 3.1.** *Пусть*

$$T_{r,k,m}(x) = \begin{cases} h\left(\frac{\operatorname{th}^2 r - |x|^2}{1-|x|^2}\right)\chi_r(x), & \text{если } k\in\mathbb{N} \\ \sigma_r(x), & \text{если } k=0, \end{cases}$$

*где*

$$h(t) = \frac{2\Gamma(\alpha_X+k+1)}{\Gamma(k)\Gamma(\alpha_X+1)}(\operatorname{th} r)t^{k-1}F(k-m+\beta_X, m; k; t).$$

*Тогда*

$$\widetilde{T}_{r,k,m}(\lambda) = b_X(\operatorname{sh} r)^{2\alpha_X+2k+1}(\operatorname{ch} r)^{2\beta_X+1-2m}\varphi_\lambda^{(\alpha_X+k,\beta_X+k-2m)}(r). \quad (3.5)$$

*Доказательство.* При $k=0$ соотношение (3.5) легко следует из определения сферического преобразования. Предположим теперь, что $k\in\mathbb{N}$. В этом случае мы имеем (см. [16, 2.9 (3)])

$$\widetilde{T}_{r,k,m}(\lambda) = \int\limits_{B_r} h\left(\frac{\operatorname{th}^2 r - |x|^2}{1-|x|^2}\right)(1-|x|^2)^{\nu_X(\lambda)} \times F(\nu_X(\lambda), \nu_X(\lambda)-\beta_X; \alpha_X+1; |x|^2)\, d\mu(x)$$

$$= b_X\int\limits_0^r h\left(\frac{\operatorname{th}^2 r - \operatorname{th}^2 t}{1-\operatorname{th}^2 t}\right) F(\nu_X(\lambda), \nu_X(-\lambda); \alpha_X+1; -\operatorname{sh}^2 t) \times (\operatorname{sh} t)^{2\alpha_X+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta_X+1}dt, \quad (3.6)$$

где $\nu_X(\lambda) = (\rho_X + i\lambda)/2$. Делая в (3.6) замену $u = \operatorname{sh}^2 t/\operatorname{sh}^2 r$, получаем

$$\widetilde{T}_{r,k,m}(\lambda) = \frac{b_X(\operatorname{sh} r)^{2\alpha_X+2}}{2}\int_0^1 h((1-u)\operatorname{th}^2 r)$$
$$\times F(\nu_X(\lambda), \nu_{\mathcal{X}}(-\lambda); \alpha_X+1; \varepsilon u)u^{\alpha_X}(1-\varepsilon u)^{\beta_X}\,du,$$

где $\varepsilon = -\operatorname{sh}^2 r$. Отсюда и из [16, 2.9 (2), 2.8 (22)] имеем

$$\widetilde{T}_{r,k,m}(\lambda) = \frac{b_X(\operatorname{sh} r)^{2\alpha_X+2}}{2}\int_0^1 F(\nu_X(\lambda)-\beta_X, \nu_X(-\lambda)-\beta_X; \alpha_X+1; \varepsilon u)$$
$$\times h((1-u)\operatorname{th}^2 r)u^{\alpha_X}\,du = \frac{b_X(\operatorname{sh} r)^{2\alpha_X+2}}{2(\alpha_X+1)_{k-m}}\int_0^1 h((1-u)\operatorname{th}^2 r)\Big(\frac{d}{du}\Big)^{k-m}$$
$$\times \big(u^{\alpha_X+k-m}F(\nu_X(\lambda)-\beta_X, \nu_X(-\lambda)-\beta_X; \alpha_X+k-m+1; \varepsilon u)\big)\,du. \tag{3.7}$$

Поскольку $F(-\alpha, \beta; \beta; -\lambda) = (1+\lambda)^\alpha$, повторное интегрирование по частям в (3.7) и применение [16, 2.8 (22)] дает при $m \geqslant 1$ и $m = 0$, соответственно, следующие равенства

$$\widetilde{T}_{r,k,m}(\lambda) = \frac{b_X\Gamma(\alpha_X+k+1)}{\Gamma(m)\Gamma(\alpha_X+k-m+1)}(\operatorname{sh} r)^{2\alpha_X+2k+1}$$
$$\times (\operatorname{ch} r)^{2\beta_X+1-2m}\int_0^1 u^{\alpha_X+k-m}(1-u)^{m-1}(1-\varepsilon u)^{-k+m-\beta_X}$$
$$\times F(\nu_X(\lambda)-\beta_X, \nu_X(-\lambda)-\beta_X; \alpha_X+k-m+1; \varepsilon u)\,du,$$

$$\widetilde{T}_{r,k,m}(\lambda) = b_X(\operatorname{sh} r)^{2\alpha_X+2k+1}(\operatorname{ch} r)^{1-2k}$$
$$\times F(\nu_X(\lambda)-\beta_X, \nu_X(-\lambda)-\beta_X; \alpha_X+k+1; -\operatorname{sh}^2 r).$$

Теперь используя [16, 2.9 (2), 2.4 (2)], мы завершаем доказательство. $\square$

**Лемма 3.2.** *При $H \in \mathcal{H}_X^{k,m}$ имеет место равенство*

$$\widetilde{H(\partial)\delta_0}(\lambda, \xi) = (-2)^k(\nu_X(\lambda))_{k-m}(\nu_X(\lambda)-\beta_X)_m H(\xi). \tag{3.8}$$

*Доказательство.* По определению преобразования Фурье на $X$

$$\widetilde{H(\partial)\delta_0}(\lambda,\xi) = (-1)^k H(\partial)((1-|x|^2)^{-\rho_X-1}e_{X,\lambda,\xi}(x))|_{x=0}, \qquad (3.9)$$

где $e_{X,\lambda,\xi}$ — "экспонента" на $X$ (см. [15, часть 1, гл. 5]). Ввиду [15, часть 1, гл. 5, лемма 5.1], равенство (3.9) можно переписать в виде $\widetilde{H(\partial)\delta_0}(\lambda,\xi) = (H(\partial)e_{X,\lambda,\xi})(0)(-1)^k$. Соотношение (3.8) теперь следует из [15, часть 1, леммы 5.2–5.6]. □

**Лемма 3.3.** *Если $H \in \mathcal{H}_X^{k,m}$, то*

$$H\sigma_r = \frac{1}{(-2)^k(\alpha_X+1)_k}(H(\partial)\delta_0)\times T_{r,k,m}. \qquad (3.10)$$

*Доказательство.* Из определения преобразования Фурье и [15, часть 1, формулы (5.21), (5.23), (5.40), (5.42)] имеем

$$\begin{aligned}
&\widetilde{H\sigma_r}(\lambda,\xi)\\
&\quad= \int\limits_{\mathbb{S}^{a_X-1}} H((\operatorname{th} r)\eta)e_{X,\lambda,\xi}((\operatorname{th} r)\eta)\,d\omega(\eta)(\operatorname{sh} r)^{2\alpha_X+1}(\operatorname{ch} r)^{2\beta_X+1}\\
&\qquad= \frac{b_X}{(\alpha_X+1)_k}(\nu_X(\lambda))_{k-m}(\nu_X(\lambda)-\beta_X)_m(\operatorname{sh} r)^{2\alpha_X+2k+1}\\
&\qquad\qquad\times(\operatorname{ch} r)^{2\beta_X+1-2k}(1-\operatorname{th}^2 r)^{\nu_X(\lambda)}\\
&\times F(\nu_X(\lambda)+k-m, \nu_X(-\lambda)+m-\beta_X; \alpha_X+k+1; \operatorname{th}^2 r)H(\xi). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Отсюда (см. [16, 2.9 (3)])

$$\begin{aligned}
\widetilde{H\sigma_r}(\lambda,\xi) &= \frac{b_X}{(\alpha_X+1)_k}(\nu_X(\lambda))_{k-m}(\nu_X(\lambda)-\beta_X)_m\\
&\times(\operatorname{sh} r)^{2\alpha_X+2k+1}(\operatorname{ch} r)^{2\beta_X+1-2m}\varphi_\lambda^{(\alpha_X+k,\beta_X+k-2m)}(r)H(\xi). \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Комбинируя (3.12), (3.5) и (3.8), получаем

$$\begin{aligned}
\widetilde{H\sigma_r}(\lambda,\xi) &= \frac{1}{(-2)^k(\alpha_X+1)_k}\widetilde{H(\partial)\delta_0}(\lambda,\xi)\widetilde{T}_{r,k,m}(\lambda)\\
&= \frac{1}{(-2)^k(\alpha_X+1)_k}(H(\partial)\delta_0\times T_{r,k,m})^{\sim}(\lambda,\xi).
\end{aligned}$$

Это доказывает (3.10). □

**Следствие 3.1.** *Пусть $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда*

$$f_{k,m,j}(\operatorname{th} r) = \frac{(\operatorname{sh} r)^{-2\alpha_X-k-1}(\operatorname{ch} r)^{k-1-2\beta_X}}{(-2)^k(\alpha_X+1)_k}\langle(\overline{Y_j^{k,m}}(\partial)\delta_0)\times T_{r,k,m}, f\rangle. \qquad (3.13)$$

*Доказательство.* Требуемое соотношение выводится из (2.4), (3.10) с помощью простых преобразований. □

**Лемма 3.4.** *Функция* $\varphi_\lambda^{(\alpha_X+k,\beta_X+k-2m)}(r)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi_\lambda^{(\alpha_X+k,\beta_X+k-2m)}(r)| \leqslant \frac{(\alpha_X+1)_k}{(\operatorname{sh} r)^k(\operatorname{ch} r)^{k-2m}} \frac{e^{(\rho_X+|\operatorname{Im}\lambda|)r}}{|(\nu_X(\lambda))_{k-m}(\nu_X(\lambda)-\beta_X)_m|}. \tag{3.14}$$

*Доказательство.* Возьмем $H \in \mathcal{H}_X^{k,m} \setminus \{0\}$ и выберем $\zeta \in \mathbb{S}^{a_X-1}$ так, что $\max\{|H(\eta)| : \eta \in \mathbb{S}^{a_X-1}\} = |H(\zeta)|$. Сравнивая (3.11) с (3.12), имеем

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^{(\alpha_X+k,\beta_X+k-2m)}&(r)\\ &= \frac{(\alpha_X+1)_k}{b_X(\operatorname{sh} r)^k(\operatorname{ch} r)^{k-2m}} \frac{1}{(\nu_X(\lambda))_{k-m}(\nu_X(\lambda)-\beta_X)_m}\\ &\qquad\times \int\limits_{\mathbb{S}^{a_X-1}} e_{X,\lambda,\eta}((\operatorname{th} r)\zeta)\frac{H(\eta)}{H(\zeta)}\,d\omega(\eta).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Используя определение $e_{X,\lambda,\xi}$, легко проверить, что

$$|e_{X,\lambda,\xi}(x)| \leqslant e^{(\rho_X+|\operatorname{Im}\lambda|)\operatorname{arth}|x|}, \quad x \in X,\ \xi \in \mathbb{S}^{a_X-1}. \tag{3.16}$$

Соотношения (3.15) и (3.16) влекут (3.14). □

**Лемма 3.5.** *Пусть*

$$\varphi(\lambda) = \varphi_\lambda^{(\alpha_X+1,\beta_X+1)}(a_1)\varphi_\lambda^{(\alpha_X+1,\beta_X+1)}(a_2)\varphi_\lambda^{(\alpha_X+k,\beta_X+k-2m)}(a_3),$$

*где $a_1$, $a_2$, $a_3$ — положительные числа. Тогда существуют положительные константы $c_1$ и $c_2$, не зависящие от $\lambda$, со следующими свойствами:*

1) *если $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant 1$ и $|\lambda| \geqslant c_2$, то*

$$|\varphi(\lambda)| \geqslant \frac{c_1}{|\lambda|^{3\alpha_X+k+7/2}} e^{(a_1+a_2+a_3)|\in\lambda|}; \tag{3.17}$$

2) *для любого целого $l \geqslant c_2$ существует $\varrho_l \in (l, l+1)$ такое, что оценка (3.17) справедлива на окружности $|\lambda| = \varrho_l$.*

*Кроме того, если $\delta > 0$ и $a_1, a_2, a_3 \in [\delta, \delta^{-1}]$ , то $c_1, c_2$ можно выбрать зависящими только от $\delta, k, m, \alpha_X, \beta_X$.*

*Доказательство.* Достаточно установить 1) и 2) при $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$, поскольку функция $\varphi$ является четной. В этом случае мы имеем

$$\varphi(\lambda) = c\lambda^{-3\alpha_X-k-7/2}\cos(a_1\lambda - \frac{\pi}{4}(2\alpha_X+3))\cos(a_2\lambda - \frac{\pi}{4}(2\alpha_X+3))$$
$$\times\cos(a_3\lambda - \frac{\pi}{4}(2\alpha_X+2k+1)) + O(|\lambda|^{-3\alpha_X-k-9/2}e^{(a_1+a_2+a_3)|\operatorname{Im}\lambda|}),$$

где

$$c = \frac{2^{3\alpha_X+k+\frac{7}{2}}\Gamma(\alpha_X+k+1)(\Gamma(\alpha_X+2))^2}{\pi^{\frac{3}{2}}(\operatorname{ch}a_1\operatorname{ch}a_2)^{\rho_X+2}(\operatorname{ch}a_3)^{\rho_X+2k-2m}(\operatorname{th}a_1\operatorname{th}a_2)^{\alpha_X+\frac{3}{2}}(\operatorname{th}a_3)^{\alpha_X+k+\frac{1}{2}}}$$

(см. [16, 2.3 (17)]). Теперь применяя неравенство Лоясевич (см., например, [10]), нетрудно получить требуемое утверждение. □

**Лемма 3.6.** *Пусть $r_1, r_2 > 0$, $N(r_1,r_2)=\varnothing$, $r_1+r_2<R$, $\{\varepsilon_M\}_{M=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел с пределом $R/(r_1+r_2)-1$, $R_M=(r_1+r_2)(1+\varepsilon_M), R_0=0$. Тогда для любых $k\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\{0,\dots,M_X(k)\}$, $M\in\mathbb{N}$ и $r\in[R_{M-1},R_M)$ существуют две последовательности радиальных распределений $\{\mu_{l,1}\},\{\mu_{l,2}\}$ со следующими свойствами:*

1) $\operatorname{supp}\mu_{l,i}\subset\overline{B}_{R_M-r_i}$, $i=1,2$;

2) *существуют положительные константы $c_3=c_3(k,m,r_1,r_2,R,\varepsilon_1,\alpha_X,\beta_X)$ и $c_4=c_4(r_1,r_2,R,\varepsilon_1,\alpha_X,\beta_X)$, зависящие от указанных параметров, такие, что для всех $l\geqslant c_3$*

$$|G_{k,m}(\lambda,r)-G_{1,0}(\lambda,r_1)\widetilde{\mu}_{l,1}(\lambda)-G_{1,0}(\lambda,r_2)\widetilde{\mu}_{l,2}(\lambda)|$$
$$\leqslant\frac{c_4}{l}\frac{1}{(\operatorname{sh}r)^k(\operatorname{ch}r)^{k-2m}}\frac{\|\lambda\|^s e^{R_M|\operatorname{Im}\lambda|}}{|(\nu_X(\lambda))_{k-m}(\nu_X(\lambda)-\beta_X)_m|},\quad(3.18)$$

*где $G_{k,m}(\lambda,r)=\varphi_\lambda^{(\alpha_X+k,\beta_X+k-2m)}(r)/\Gamma(\alpha_X+k+1)$,*
*$\|\lambda\|=\max(1,|\lambda|)$, $s=[3\alpha_X+9/2]$.*

*Доказательство.* Будем использовать обозначения из леммы 3.5 при $a_1=r_1$, $a_2=r_2$, $a_3=\varepsilon'_M=(r_1+r_2)\varepsilon_M$. Рассмотрим четную целую функцию

$$h_l(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho_l}\frac{G_{k,m}(\zeta,r)}{\zeta^{s+1}\theta(\zeta)}\frac{\zeta^{s+1}\theta(\zeta)-\lambda^{s+1}\theta(\lambda)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta,\quad l\geqslant c_2,\quad(3.19)$$

где $\theta(\lambda)=\varphi(\lambda)/\big(\Gamma(\alpha_X+k+1)\Gamma^2(\alpha_X+2)\big)$. По формуле Коши

$$h_l(\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\lambda^{s+1}\theta(\lambda)\int\limits_{|\zeta|=\rho_l}\frac{G_{k,m}(\zeta,r)}{\zeta^{s+1}\theta(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda}=\begin{cases}G_{k,m}(\lambda,r), & |\lambda|<\rho_l\\ 0, & |\lambda|>\rho_l.\end{cases}\tag{3.20}$$

Используя (3.19), (3.20), (3.14) и (3.17), находим положительные константы $c_3=c_3(k,m,r_1,r_2,R,\varepsilon_1,\alpha_X,\beta_X)$ и $c_4=c_4(r_1,r_2,R,\varepsilon_1,\alpha_X,\beta_X)$ такие, что

$$|h_l(\lambda)-G_{k,m}(\lambda,r)|\leqslant\frac{c_4}{l}\frac{1}{(\operatorname{sh}r)^k(\operatorname{ch}r)^{k-2m}}\frac{\|\ \lambda\ \|^s\ e^{R_M|\operatorname{Im}\lambda|}}{|(\nu_X(\lambda))_{k-m}(\nu_X(\lambda)-\beta_X)_m|}\tag{3.21}$$

для всех $l\geqslant c_3$. Теперь достаточно показать, что $h_l$ можно представить в виде $h_l(\lambda)=G_{1,0}(\lambda,r_1)\widetilde{\mu}_{l,1}(\lambda)+G_{1,0}(\lambda,r_2)\widetilde{\mu}_{l,2}(\lambda)$, где $\mu_{l,i}$ — некоторые радиальные распределения с носителем в шаре $\overline{B}_{R_M-r_i}$, $i=1,2$. Положим

$$h_{l,1}(\lambda)=\sum_{\substack{\alpha\in E_1,\\|\alpha|<\rho_l}}\frac{G_{k,m}(\lambda,\varepsilon'_M)G_{k,m}(\alpha,r)}{(\lambda-\alpha)\alpha^{s+1}G_{1,0}(\lambda,r_1)G_{1,0}(\lambda,r_2)}\times\left(\frac{d}{d\zeta}\left(G_{k,m}(\zeta,\varepsilon'_M)\right)\Big|_{\zeta=\alpha}\right)^{-1},$$

$$h_{l,i}(\lambda)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{\alpha\in E_i,\\|\alpha|<\rho_l}}\frac{G_{1,0}(\lambda,r_{i-1})G_{k,m}(\alpha,r)}{(\lambda-\alpha)\alpha^{s+1}G_{1,0}(\alpha,r_{4-i})G_{k,m}(\alpha,\varepsilon'_M)}\Big(\frac{d}{d\zeta}(G_{1,0}(\zeta,r_{i-1}))|_{\zeta=\alpha}\Big)^{-1}, & i=2,3\\ \displaystyle\sum_{\substack{\alpha\in E_i,\\|\alpha|<\rho_l}}G_{1,0}(\lambda,r_{i-3})G_{k,m}(\lambda,\varepsilon'_M)\frac{d}{d\zeta}\Big(\frac{(\zeta-\alpha)^2G_{k,m}(\zeta,r)}{\zeta^{s+2}\theta(\zeta)(\lambda-\zeta)}\Big)|_{\zeta=\alpha}, & i=4,5,\end{cases}$$

где

$$E_1=\mathcal{N}(\alpha_X+k,\beta_X+k-2m,\varepsilon'_M)\backslash(\mathcal{N}(\alpha_X+1,\beta_X+1,r_1)\cup\mathcal{N}(\alpha_X+1,\beta_X+1,r_2)),$$

$$E_i=\begin{cases}\mathcal{N}(\alpha_X+1,\beta_X+1,r_{i-1})\backslash\mathcal{N}(\alpha_X+k,\beta_X+k-2m,\varepsilon'_M), & i=2,3\\ \mathcal{N}(\alpha_X+1,\beta_X+1,r_{i-3})\cap\mathcal{N}(\alpha_X+k,\beta_X+k-2m,\varepsilon'_M), & i=4,5\end{cases}$$

и $\mathcal{N}(\alpha,\beta,t)$ — множество нулей $\lambda$ функции $\varphi_\lambda^{\alpha,\beta}(t)$. По теореме о вычетах

$$h_l(\lambda) = G_{1,0}(\lambda,r_1)f_1(\lambda) + G_{1,0}(\lambda,r_2)f_2(\lambda),$$

где $f_1(\lambda) = \lambda^{s+1}(G_{k,m}(\lambda,\varepsilon'_M)h_{l,3}(\lambda) + G_{1,0}(\lambda,r_2)h_{l,1}(\lambda) + h_{l,5}(\lambda)),$

$$\begin{aligned} f_2(\lambda) = (G_{k,m}(\lambda,\varepsilon'_M)h_{l,2}(\lambda) + h_{l,4}(\lambda))\lambda^{s+1} + G_{1,0}(\lambda,r_1)G_{k,m}(\lambda,\varepsilon'_M)\\ \times\ \operatorname{Res}\big(G_{k,m}(\zeta,r)(\zeta^{s+1}\theta(\zeta))^{-1}(\lambda^s+\lambda^{s-1}\zeta+\dots+\zeta^s)\big)\big|_{\zeta=0}. \end{aligned}$$

Определяя по теореме Винера–Пэли $\mu_{l,i}$ соотношением $\widetilde{\mu}_{l,i}(\lambda) = f_i(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, получаем требуемое представление. Таким образом, лемма 3.6 доказана. □

## 4. Доказательство теоремы 2.1

Рассмотрим радиальные распределения $\mu_{l,i}$ из (3.18). Положим

$$\mathcal{V}_{l,i} = \gamma_i(\overline{Y_j^{k,m}}(\partial)\delta_0)\times\mu_{l,i},$$

где $\gamma_i = (\operatorname{sh} r)^k(\operatorname{ch} r)^{k-2m}(2^{k-1}(\operatorname{sh} r_i)^{2\alpha_X+2}(\operatorname{ch} r_i)^{2\beta_X+2})^{-1}(-1)^k$. Используя (3.13), находим

$$f_{k,m,j}(\operatorname{th} r) - \langle\mathcal{V}_{l,1}, f\times\chi_{r_1}\rangle - \langle\mathcal{V}_{l,2}, f\times\chi_{r_2}\rangle = \langle(\overline{Y_j^{k,m}}(\partial)\delta_0)\times\mathcal{U}_l, f\rangle, \quad (4.22)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_l = (\operatorname{sh} r)^{-2\alpha_X-k-1}(\operatorname{ch} r)^{k-2\beta_X-1}(-2)^{-k}((\alpha_X+1)_k)^{-1}T_{r,k,m}\\ - \gamma_1\,\mu_{l,1}\times\chi_{r_1} - \gamma_2\,\mu_{l,2}\times\chi_{r_2}.\end{aligned}$$

Из (3.5) и (3.18) имеем

$$|\widetilde{\mathcal{U}}_l(\lambda)| \leqslant \frac{\pi^{\alpha_X+1}}{2^{k-1}}\frac{c_4}{l}\frac{\|\lambda\|^s e^{R_M|\operatorname{Im}\lambda|}}{|(\nu_X(\lambda))_{k-m}(\nu_X(\lambda)-\beta_X)_m|} \quad (4.23)$$

при $l\geqslant c_3$. Рассмотрим радиальную функцию $\psi_M$ со следующими свойствами (см., например, [17, гл. 4, п. 4.5]):

1) $\psi_M\in C^\infty(X)$;

2) $\psi_M = 1$ в $\overline{B}_{\frac{1}{3}R+\frac{2}{3}R_M}$;

3) $\operatorname{supp}\psi_M = \overline{B}_{R'_M}$;

4) $\max|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\psi_M(p)| \leqslant \frac{c_j(R)}{(R-R_M)^j}$ при $x\in B_{R'_M}$ и $|\alpha|\leqslant j$.

Применим к $\psi_M f$ формулу обращения для преобразования Фурье на $X$ (см. [15, часть 2, гл. 10]) и используем (3.8), (4.22) и (4.23). Тогда получим, что для $l \geqslant c_3$ и любой функции $f \in C^\infty(B_R)$ имеет место оценка

$$|f_{k,m,j}(\operatorname{th} r) - \langle \mathcal{V}_{l,1}, f \times \chi_{r_1} \rangle - \langle \mathcal{V}_{l,2}, f \times \chi_{r_2} \rangle| \\ \leqslant \frac{c_5}{l} \frac{1}{(R - R_M)^{2N}} \max \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f(x) \right|,$$

где $N = [1 + [5\alpha_X + 13/2]/2], R'_M = (2R + R_M)/3$, максимум берется по $x \in B_{R'_M}$ и $|\alpha| \leqslant 2N$, а константа $c_5$ зависит только от $r_1, r_2, R, \varepsilon_1, \alpha_X, \beta_X$. Отсюда получаем утверждение теоремы 2.1.

## Литература


[1] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987.

[2] К. А. Беренстейн, Д. Струппа, *Комплексный анализ и уравнения в свёртках* // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. направления, ВИНИТИ, М., **54** (1989), 5–111.

[3] L. Zalcman, *A bibliographic survey of the Pompeiu problem* // Approximation by solutions of partial differential equations (ed. Fuglede B. et. al), Kluwer, Dordrecht, (1992), 185–194.

[4] L. Zalcman, *Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem"* // Contemp. Math. / Radon Transform and Tomography, **278** (2001), 69–74.

[5] I. Netuka, J. Vesely, *Mean value property and harmonic functions* // Classical and modern potential theory and applications, Kluwer, Dordrecht, (1994), 359–398.

[6] В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, *Экстремальные задачи интегральной геометрии* // Математика сегодня, **12** (2001), 51—79.

[7] V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer, Dordrecht, 2003.

[8] С. Хелгасон, *Преобразование Радона*, Мир, М., 1983.

[9] В. В. Волчков, *Локальная теорема о двух радиусах на симметрических пространствах* // Матем. сб., **198**:11 (2007), 21–46.

[10] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Yger, *Inversion of the local Pompeiu transform* // J. Analyse Math., **54** (1990), 259–287.

[11] M. El Harchaoui, *Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules)* // J. Analyse Math., **67** (1995), 1–37.

[12] M. Berkani, M. El Harchaoui, R. Gay, *Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternique — Cas des deux boules // J. Complex Variables*, **43** (2000), 29–57.

[13] Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова, *Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве* // Докл. РАН, **379**:5 (2001), 587–590.

[14] Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова, *Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве* // Алгебра и анализ, **15**:5 (2003), 169–197.

[15] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer-Verlag, London, 2009.

[16] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, I, II: Наука, М., 1973.

[17] Г. Бремерман, *Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье*, Мир, М., 1968.

## Сведения об авторах

**Виталий Владимирович Волчков**

Донецкий национальный университет
Университетская 24,
Донецк, 34001,
Украина
*E-Mail:* valeriyvolchkov@gmail.com