Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 3, 409 – 433

Точная оценка приближения некоторых классов дифференцируемых функций свёрточными операторами

Виктор П. Заставный

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Получены явные формулы для вычисления величины приближения классов $\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,n}$ свёрточными операторами специального вида. Здесь $\beta \in \mathbb{Z}$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$, а $p = 1$ или $p = \infty$. Как частные случаи получаются явные формулы для величины приближения указанных классов обобщенными средними Абеля–Пуассона, бигармоническими операторами Пуассона, средними Рисса и Чезаро. В некоторых случаях для величины приближения указанных классов найдены асимптотические разложения по параметру. В случае натурального r некоторые результаты были получены в работах Никольского, Надя, Тимана, Теляковского, Баскакова, Фалалеева, Харкевича и других математиков.

2010 MSC. 42A10, 41A35, 41A36.

Ключевые слова и фразы. Теорема Никольского, приближение классов функций, средние Абеля–Пуассона, Рисса и Чезаро, бигармонические операторы Пуассона.

1. Введение

Пусть L_p — классы 2π-периодических вещественнозначных измеримых функций с конечной нормой $\|f\|_p = (\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\,dt)^{1/p}$ при $1 \le p < \infty$ и $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}$. Коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L_1$ определяются по формуле $\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)e^{-ikt}\,dt$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $\mathcal{T}_n = \{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt : \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}\}$ — множество тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$, $n \in \mathbb{N}$, $H_p^0 = \{\varphi \in L_p : \|\varphi\|_p \le 1\}$ — единичный шар в L_p, а

$$H_p^n = \left\{\varphi \in H_p^0 : \widehat{\varphi}(k) = 0,\ |k| \le n-1,\ k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Статья поступила в редакцию 12.04.2010

Очевидно $H_p^{s+1} \subset H_p^s$ при всех $s \in \mathbb{Z}_+$.

По функции $K \in L_1$ определим класс функций

$$\mathbf{W}_{p,n}(K) := \left\{ f = \varphi * K,\ \varphi \in H_p^n \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.1}$$

Здесь $(\varphi * K)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)K(t)\,dt$ — свёртка функций φ и K. Очевидно $\mathbf{W}_{p,s+1}(K) \subset \mathbf{W}_{p,s}(K)$ при всех $s \in \mathbb{Z}_+$. Известно, что $\mathbf{W}_{p,n}(K) \subset L_p$ при всех $1 \le p \le \infty$, а если $p = \infty$ или $K \in L_\infty$, то $\mathbf{W}_{p,n}(K) \subset C(\mathbb{R})$ (см., например, [1, Гл. 4]). Пусть

$$\psi_{r,\beta}(t) = \sum_{k \ne 0} \frac{e^{-i\beta\pi \operatorname{sign} k/2}}{|k|^r}\, e^{ikt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})}{k^r}, \quad r > 0,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Известно, что $\psi_{r,\beta} \in L_1$ (см., например, [2, гл. V] или [3, гл. 7]). В этом случае получаются хорошо известные классы $\mathbf{W}_{p,n}^{r,\beta} := \mathbf{W}_{p,n}(\psi_{r,\beta})$. В частных случаях, когда $n = 1$, $\beta = r$ или $\beta = r+1$, получаются классы $W_p^r := W_{p,1}^{r,r}$ и $\widetilde{W}_p^r := W_{p,1}^{r,r+1}$.

По функции $g \in L_1$ определим свёрточный оператор

$$G(f)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt, \quad f \in \mathbf{W}_{p,n}(\psi), \tag{1.2}$$

где $\psi \in L_1$, $n \in \mathbb{N}$ и $1 \le p \le \infty$. Очевидно

$$f(x) - G(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)K(t)\,dt, \quad f \in \mathbf{W}_{p,n}(\psi), \tag{1.3}$$

где φ — соответствующая функция из H_p^n (см. (1.1)), а

$$K(x) = \psi(x) - (\psi * g)(x) \in L_1; \quad K(x) \sim \sum_k \widehat{\psi}(k)(1 - \widehat{g}(k))e^{ikx}. \tag{1.4}$$

Очевидно $f - G(f) \in L_p$ для любой $f \in \mathbf{W}_{p,n}(\psi)$, а если $p = \infty$ или $\psi \in L_\infty$, то $f - G(f) \in C(\mathbb{R})$. Поэтому имеет смысл следующая величина (приближение класса $\mathbf{W}_{p,n}(\psi)$ оператором G)

$$E(\mathbf{W}_{p,n}(\psi); G)_p := \sup_{f \in \mathbf{W}_{p,n}(\psi)} \|f - G(f)\|_p = \sup_{f \in \mathbf{W}_{p,n}(K)} \|f\|_p. \tag{1.5}$$

В некоторых случаях величина, стоящая в правой части последнего равенства, явно выражается через коэффициенты Фурье функции K. В § 2 приведены без доказательств примеры таких ядер из работы автора [5] и формулы вычисления величины (1.5). Эти примеры используются в доказательствах теорем из § 3.

В § 3.1 сформулированы общие теоремы о вычислении величины $E(\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,n}; G)_p$ в случае, когда $\beta \in \mathbb{Z}$, $p = 1$ или $p = \infty$, а оператор $G = G_{\alpha,\delta}$ в (1.2) порожден функцией $g = g_{\alpha,\delta}$, ряд Фурье которой имеет вид

$$g_{\alpha,\delta}(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(|k|^\alpha \delta) e^{ikt}, \quad \alpha > 0,\ \delta > 0. \tag{1.6}$$

Здесь $h(t)$ некоторая функция, заданная при $t \ge 0$. Если $h(t) = e^{-t}$, то получаем операторы Абеля–Пуассона. Если $h(t) = (1-t)_+^\mu$, $\mu > 0$, то получаем средние Рисса.[1]

В § 3.2 сформулированы общие теоремы о вычислении величины $E(\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,n}; G)_p$ в случае, когда $\beta \in \mathbb{Z}$, $p = 1$ или $p = \infty$, а оператор $G = G_{\alpha,\delta,\gamma}$ в (1.2) порожден функцией $g = g_{\alpha,\delta,\gamma}$, ряд Фурье которой имеет вид

$$g_{\alpha,\delta,\gamma}(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k|^\alpha \delta\gamma) h(|k|^\alpha \delta) e^{ikt}, \quad \alpha > 0,\ \delta > 0,\ \gamma \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Если $h(t) = e^{-t}$, $\alpha = 1$, $\delta > 0$ и $\gamma = (1 - e^{-2\delta})/(2\delta)$, то получаем бигармонический оператор Пуассона.

В § 3.3 для $\beta \in \mathbb{Z}$, $p = 1$ или $p = \infty$, получены точные значения приближения классов $\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,n}$ операторами $G_{\alpha,\delta,\gamma}$, когда $h(t) = e^{-t}$, $h(t) = (1+t)^{-\mu}$, $h(t) = (1-t)_+^\mu$, $\mu > 0$. В первых двух случаях для величин $E(\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,n}; G_{\alpha,\delta})_p$ найдены асимптотические разложения по степеням δ. В § 3.4 для $\beta \in \mathbb{Z}$, $p = 1$ или $p = \infty$, получены точные значения приближения классов $\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,1}$ средними Чезаро σ^α_m, при $\alpha \ge 1$, а в § 3.5 получены точные значения приближения этих классов средними типа Рисса и Чезаро. В § 4 доказаны вспомогательные утверждения. В § 5 приведены доказательства теорем из § 3.1 и § 3.2. В случае натурального r некоторые результаты § 3.3 и 3.4 были получены в работах Никольского, Надя, Тимана, Теляковского, Баскакова, Фалалеева, Харкевича и других математиков.

2. Ядра с условием B_n^* и теорема Никольского

Определение 2.1. *Говорят, что функция $K \in L_1$ удовлетворяет условию Никольского A_n^*, $n \in \mathbb{N}$, если существуют натуральное $n_* \ge n$ и тригонометрический полином $T^* \in \mathcal{T}_n$ такие, что для функции $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}(K(t) - T^*(t))$ почти всюду*[2] *выполняется равенство $\varphi_*(t + \pi/n_*) = -\varphi_*(t)$.*

[1] Здесь и далее $t_+ = t$, если $t > 0$ и $t_+ = 0$, если $t \le 0$.

[2] Здесь и далее под *почти всюду* мы подразумеваем почти всюду относительно меры Лебега.

Пусть $E_n(f)_p = \inf_{T\in\mathcal{T}_n} \|f - T\|_p$, $n \in \mathbb{N}$, — наилучшее приближение функции $f \in L_p$ тригонометрическими полиномами.

Теорема 2.1 (Никольский (1946) [4]). *Пусть $p = 1$ или $p = \infty$. Если при некотором $n \in \mathbb{N}$ ядро $K \in L_1$ удовлетворяет условию A_n^* и полином $T^* \in \mathcal{T}_n$ из этого условия, то для всех $s = 0, 1, \ldots, n$ имеют место соотношения*

$$\sup_{f\in\mathbf{W}_{p,s}(K)} E_n(f)_p = \sup_{f\in\mathbf{W}_{p,n}(K)} \|f\|_p = \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1 = \frac{1}{2\pi} \|K - T^*\|_1. \tag{2.1}$$

Теореме Никольского предшествовали исследования Колмогорова, Фавара, Ахиезера, Крейна, Надя (более подробно см. [4]). Автором [5,6] теорема Никольского 2.1 доказана для ядер, удовлетворяющих более общему условию B_n^*.

Определение 2.2. *Мы говорим, что функция $K \in L_1$ удовлетворяет условию B_n^*, $n \in \mathbb{N}$, если существуют тригонометрический полином $T^* \in \mathcal{T}_n$, функция $\varphi_* \in L_\infty$ и натуральное $n_* \geq n$ такие, что почти всюду выполняются соотношения $|\varphi_*(t)| \leq 1$, $\varphi_*(t)(K(t) - T^*(t)) = |K(t) - T^*(t)|$ и $\varphi_*(t + \pi/n_*) = -\varphi_*(t)$.*

Если ядро K удовлетворяет A_n^* условию, то оно удовлетворяет и B_n^* условию. Примеры ядер, которые удовлетворяют условию B_n^*, но не удовлетворяют условию A_n^* приведены в [5,6]. Отметим, что в условии B_n^*, в отличии от условия A_n^*, нам не важно на каком множестве (нулевой или положительной меры) обращается в ноль разность $K(t) - T^*(t)$.

Ниже приведены примеры ядер, которые удовлетворяют условию B_n^* (доказательства см. в [5,6]). Пусть ядро $K \in L_1$ имеет вид

$$K(t) \sim \frac{\mu_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c(\mu_k \cos kt + \lambda_k \sin kt).$$

Пример 2.1. Если $\mu_k = 0$, $k \geq 0$, $p = 1$ или $p = \infty$, то равенство

$$\sup_{f\in\mathbf{W}_{p,n}(K)} \|f\|_p = \frac{1}{2\pi} E_n(K)_1 = \frac{2|c|}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{(2k+1)n}}{2k+1} \tag{2.2}$$

справедливо, по крайней мере, в следующих случаях:

i) $n \in \mathbb{N}$, а последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает к нулю и выпукла вниз, т.е. $\lambda_k - 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2} \geq 0$ (ядра Надя [4,7]).

ii) $n = 1$, а последовательность $\{k\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает и $\lambda_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$.

iii) $n = 1$, $\lambda_k = (1 - \nu_k)/k^r$, $k \in \mathbb{N}$, $r = 1$ или $r \geq 2$, а $\{\nu_k\}_{k=0}^{\infty}$ такая последовательность, что ряд $\nu_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \cos kt$ является рядом Фурье функции $S \in L_1$ и $S(t) \geq 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$ и $\nu_0 \leq 1$.

Пример 2.2. Если $\lambda_k = 0$, $k \geq 1$, $p = 1$ или $p = \infty$, то равенство

$$\sup_{f\in\mathbf{W}_{p,n}(K)} \|f\|_p = \frac{1}{2\pi}\, E_n(K)_1 = \frac{2|c|}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \mu_{(2k+1)n}}{2k+1} \tag{2.3}$$

справедливо, по крайней мере, в следующих случаях:

i) $n \in \mathbb{N}$, а последовательность $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает к нулю и при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $\Delta^2\mu_k := \mu_k - 2\mu_{k+1} + \mu_{k+2} \geq 0$ и $\Delta^3\mu_k := \mu_k - 3\mu_{k+1} + 3\mu_{k+2} - \mu_{k+3} \geq 0$ (ядра Надя [4, 7]).

ii) $n = 1$, последовательность $\{k^2\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает и $\mu_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$.

iii) $n = 1$, последовательность $\{k\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ убывает к нулю и выпукла вниз.

iv) $n = 1$, $\mu_k = (1 - \nu_k)/k^r$, $k \in \mathbb{N}$, $r = 2$ или $r \geq 3$, а $\{\nu_k\}_{k=0}^{\infty}$ такая последовательность, что ряд $\nu_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \cos kt$ является рядом Фурье функции $S \in L_1$ и $S(t) \geq 0$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$ и $\nu_0 \leq 1$.

Пример 2.3. i) Пусть при некотором значении $A \in \mathbb{R}$ функция $K \in L_1$ удовлетворяет условиям: $K(t) \geq A$ почти всюду на $(0, \pi)$ и $K(t) \leq A$ почти всюду на $(-\pi, 0)$. В этом случае равенство (2.2) справедливо при $n = 1$.

ii) Пусть при некотором значении $A \in \mathbb{R}$ функция $K \in L_1$ удовлетворяет условиям: $K(t) \geq A$ почти всюду на $(-\pi/2, \pi/2)$ и $K(t) \leq A$ почти всюду на $(-\pi, \pi) \setminus (-\pi/2, \pi/2)$. В этом случае равенство (2.3) справедливо при $n = 1$.

Замечание 2.1. Формулы (2.2) и (2.3) для ядер Надя получены в [4, 7]. Отметим, что пример 2.1(iii) при нечетных $r \in \mathbb{N}$, а пример 2.2(iv) при четных $r \in \mathbb{N}$ были получены другим методом в [8].

В следующей лемме приведены достаточные условия неотрицательности функции $S(t)$ из примеров 2.1(iii) и 2.2(iv). Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ (см., например, [9, § 6.2], [10]), если для любых $n \in \mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}$ и $\{c_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}$

выполняется неравенство $\sum_{k,j=1}^n c_k\bar{c}_j f(x_k-x_j)\ge 0$. Если $f\in C(\mathbb{R})\cap L(\mathbb{R})$, то положительная определенность функции f эквивалентна неотрицательности её преобразования Фурье.

Лемма 2.1 ([5, 6]). *Пусть функция f является положительно определенной и непрерывной на $\mathbb{R}$. Если ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)e^{ikt}$ является рядом Фурье функции $S\in L_1$, то $S(t)\ge 0$ при почти всех $t\in\mathbb{R}$.*

3. Приближение классов $\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,n}$

3.1. Случай операторов $G_{\alpha,\delta}$

Теорема 3.1. *Пусть для функции h выполнены следующие два условия:*

1. *Функция $\lambda(x)=(1-h(x))/x$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$.*
2. *При некоторых $\alpha\in(0,1]$ и $\delta>0$ ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(|k|^\alpha\delta)e^{ikt}$ является рядом Фурье некоторой функции $g_{\alpha,\delta}\in L_1$.*

Пусть $G_{\alpha,\delta}$ — оператор, порожденный функцией $g_{\alpha,\delta}\in L_1$ по формуле (1.2) и $p=1$ или $p=\infty$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. *Если $\beta+1\in 2\mathbb{Z}$, то при любых $n\in\mathbb{N}$ и $r\ge\alpha$ справедливы равенства*

$$E(\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,n};G_{\alpha,\delta})_p=\frac{4}{\pi n^r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-h((2k+1)^\alpha n^\alpha\delta)}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{3.1}$$

2. *Если $\beta\in 2\mathbb{Z}$, то для $n=1$ и любых $r\ge\alpha+1$ справедливы равенства*

$$E(\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,n};G_{\alpha,\delta})_p=\frac{4}{\pi n^r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-h((2k+1)^\alpha n^\alpha\delta)}{(2k+1)^{r+1}}(-1)^k. \tag{3.2}$$

Если дополнительно $\lambda(x)\in C^1(0,+\infty)$ и функция $-\lambda'(x)$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$, то равенства (3.2) справедливы при любых $n\in\mathbb{N}$ и $r\ge\alpha$.

Определение 3.1. *Обозначим через M_m, $m\in\mathbb{N}$, класс функций $h\in C^{m-1}(0,+\infty)$, для которых функция $(-1)^{m-1}h^{(m-1)}$ неотрицательна, убывает, выпукла вниз на интервале $(0,+\infty)$ и существует конечный предел $h(+\infty)\ge 0$.*

Замечание 3.1. Отметим, что $M_{m+1} \subset M_m$ и $fg \in M_m$ для любых $f, g \in M_m$ (см. [11]). В работе автора [12, следствие 1] доказано, что если $h \in M_{m+1}$ при некотором $m \in \mathbb{N}$ и существует конечный предел $h(+0) \leq 1$, то $\lambda(x) = (1 - h(x))/x \in M_k$ при всех $k = 1, \dots, m$.

Определение 3.2. *Для функции h, которая удовлетворяет неравенству $h(x) \leq 1$ при всех $x > 0$, определим величину $m(h)$ как точную нижнюю грань тех $\gamma \in \mathbb{R}$, для которых функция $(1 - h(x))/x^\gamma$ убывает на $(0, +\infty)$ Если такие $\gamma \in \mathbb{R}$ не существуют, то считаем, что $m(h) := +\infty$.*

Теорема 3.2. *Пусть для функции $h(x)$, $x \geq 0$, выполнены следующие два условия:*

1. *$h(x) \leq 1$ при $x > 0$ и $m(h) < +\infty$.*
2. *При некоторых $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(|k|^\alpha \delta) e^{ikt}$ является рядом Фурье некоторой функции $g_{\alpha,\delta} \in L_1$.*

Тогда $m(h) \geq 0$ и $m(h) > 0$, если $h(x_0) > 0$ в некоторой точке $x_0 > 0$. Пусть $G_{\alpha,\delta}$ — оператор, порожденный функцией $g_{\alpha,\delta} \in L_1$ по формуле (1.2) и $p = 1$ или $p = \infty$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. *Если $\beta + 1 \in 2\mathbb{Z}$, то равенство (3.1) справедливо для $n = 1$ и любых $r \geq \alpha m(h) + 1$.*
2. *Если $\beta \in 2\mathbb{Z}$, то равенство (3.2) справедливо для $n = 1$ и любых $r \geq \alpha m(h) + 2$.*

Замечание 3.2. Если функция h выпукла вниз на $(0, +\infty)$, $h(x) \leq 1$ при $x > 0$ и $h(x) \not\equiv \text{const}$ на $(0, +\infty)$, то из леммы 4.2 вытекает, что $m(h) \in (0, 1]$. Если дополнительно h' непрерывна в точке 0 справа, $h(0) = 1$ и $h'(0) \neq 0$, то $m(h) = 1$.

3.2. Случай операторов $G_{\alpha,\delta,\gamma}$

Определение 3.3. *Для функции $h \in M_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, с условиями $0 < h(+0) \leq 1$ и $h(+\infty) = 0$ определим величину $\gamma_m(\rho, h)$, $\rho \geq 1$, как точную верхнюю грань тех $\gamma \in \mathbb{R}$, для которых функция $\lambda_{\rho,\gamma}(x) \in M_m$, где*

$$\lambda_{\rho,\gamma}(x) = \frac{1 - (1 + \gamma x) h(x)}{x^\rho} = \frac{1 - h(x)}{x^\rho} - \gamma \frac{h(x)}{x^{\rho - 1}}. \qquad (3.3)$$

Замечание 3.3. В работе автора [12, лемма 1] доказано, что для любой функции $h \in M_{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, с условиями $0 < h(+0) \leq 1$ и $h(+\infty) = 0$, неравенство $0 \leq \gamma_m(\rho, h) < +\infty$ выполняется при любом $\rho \geq 1$.

Замечание 3.4. В работе [12] величина $\gamma_m(\rho, h)$ найдена в следующих случаях:

1) Если $h(t) = e^{-t}$ и $m \in \mathbb{N}$, то $\gamma_m(1, h) = \frac{1}{m+2}$, $\gamma_m(\rho, h) = 1$ при $\rho \geq 2$.

2) Если $h_\mu(t) = (1+t)^{-\mu}$, $\mu \geq 1$ и $m \in \mathbb{N}$, то $\gamma_m(\rho, h_\mu) = \mu$ при $\rho \geq 2$, $\gamma_m(1, h_\mu) = \frac{\mu+m+1}{m+2}$, $\gamma_m(\rho, h_1) = 1$ при $\rho \geq 1$.

3) Если $H_\mu(t) = (1-t)_+^\mu$, $\mu \geq m+1$, $m \in \mathbb{N}$, то $\gamma_m(1, H_\mu) = \frac{\mu-m-1}{m+2}$ и $\gamma_m(\rho, H_\mu) = \mu$ при $\rho \geq 2$.

Теорема 3.3. *Пусть для функции $h(x)$, $x \geq 0$, выполнены следующие два условия:*

1 *Функция $h \in M_2$ и $0 < h(+0) \leq 1$, $h(+\infty) = 0$.*

2. *При некоторых $\rho \geq 1$, $\gamma \leq \gamma_1(\rho, h)$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$ тригонометрический ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1 + |k|^\alpha \delta\gamma) h(|k|^\alpha \delta) e^{ikt}$ является рядом Фурье некоторой функции $g_{\alpha,\delta,\gamma} \in L_1$.*

Пусть $G_{\alpha,\delta,\gamma}$ — оператор, порожденный функцией $g_{\alpha,\delta,\gamma} \in L_1$ по формуле (1.2) и $p = 1$ или $p = \infty$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. *Если $\beta + 1 \in 2\mathbb{Z}$ и выполнено одно из двух условий:*

   i) $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1]$, $r \geq \alpha\rho$ или

   ii) $n = 1$, $\alpha > 1$, $r \geq \alpha\rho + 1$, то справедливы равенства

$$E(\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,n}; G_{\alpha,\delta,\gamma})_p = \frac{4}{\pi n^r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - (1 + (2k+1)^\alpha n^\alpha \delta\gamma) h((2k+1)^\alpha n^\alpha \delta)}{(2k+1)^{r+1}}. \quad (3.4)$$

2. *Если $\beta \in 2\mathbb{Z}$ и выполнено одно из двух условий:*

   i) $n = 1$, $\alpha \in (0, 1]$, $r \geq \alpha\rho + 1$ или *ii)* $n = 1$, $\alpha > 1$, $r \geq \alpha\rho + 2$, *то справедливы равенства*

$$E(\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,n}; G_{\alpha,\delta,\gamma})_p = \frac{4}{\pi n^r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-(1+(2k+1)^\alpha n^\alpha\delta\gamma)h((2k+1)^\alpha n^\alpha\delta))}{(2k+1)^{r+1}}. \tag{3.5}$$

Если дополнительно $h \in M_3$, $\gamma \leq \gamma_2(\rho, h)$ *и* $\alpha \in (0, 1]$, *то равенства* (3.5) *справедливы при любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $r \geq \alpha\rho$.

В следующей теореме рассмотрен случай положительных ядер, которые порождаются положительно определенными функциями.

Теорема 3.4. *Пусть для функции* $h(x)$, $x \geq 0$ *выполнены следующие условия:*

1. *При некоторых* $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\delta > 0$ *ряд*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1 + |k|^\alpha\delta\gamma)h(|k|^\alpha\delta)e^{ikt}$$

является рядом Фурье некоторой функции $g_{\alpha,\delta,\gamma} \in L_1$.

2. *Функция* $(1 + \gamma|t|^\alpha)h(|t|^\alpha)$ *является положительно определенной и непрерывной на* $\mathbb{R}$ *и* $h(0) \leq 1$.

Пусть $p = 1$ *или* $p = \infty$, *а* $G_{\alpha,\delta,\gamma}$ — *оператор, порожденный функцией* $g_{\alpha,\delta,\gamma}$ *по формуле* (1.2). *Тогда равенство* (3.4), *если* $\beta + 1 \in 2\mathbb{Z}$, *справедливо при* $n = 1$, $r = 1$ *или* $r \geq 2$, *а равенство* (3.5), *если* $\beta \in 2\mathbb{Z}$, *справедливо при* $n = 1$, $r = 2$ *или* $r \geq 3$.

3.3. Примеры операторов $G_{\alpha,\delta}$ и $G_{\alpha,\delta,\gamma}$

Пример 3.1. Пусть $h(t) = e^{-t}$. В этом случае $m(h) = 1$ (см. замечание 3.2). Второе условие в теоремах 3.1 и 3.2 очевидно выполнено для любых $\alpha > 0$ и $\delta > 0$. Очевидно $h \in M_m$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Учитывая замечание 3.1, получаем следующие результаты. Если $\alpha \in (0, 1]$, то равенства (3.1) и (3.2) выполняются при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \geq \alpha$ и $\delta > 0$. Если $\alpha > 1$, то равенство (3.1) выполняется при $n = 1$ и любых $r \geq \alpha + 1$ и $\delta > 0$, а равенство (3.2) выполняется при $n = 1$ и любых $r \geq \alpha + 2$ и $\delta > 0$. Соответствующие операторы $G_{\alpha,\delta}$ называются обобщенными операторами Абеля–Пуассона. Для операторов Абеля-Пуассона ($\alpha = 1$) результат был известен только при $n = 1$, $\beta = r \in \mathbb{N}$ (см. [13]) и при $n = 1$, $\beta - 1 = r \in \mathbb{N}$ (см. [14] при $r = 1$ и [15] при $r \geq 2$). Оба эти случая вытекают из теоремы 3.1.

Второе условие в теореме 3.3 выполнено для любых $\alpha > 0$, $\delta > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, а значения $\gamma_m(\rho, h)$ найдены в работе автора [12] (см. замечание 3.4). Поэтому теорема 3.3 справедлива, например, в следующих случаях: **1)** $\rho = 1$, $\gamma_1(1, h) = \frac{1}{3}$, $\gamma_2(1, h) = \frac{1}{4}$. **2)** $\rho = 2$, $\gamma_1(2, h) = \gamma_2(2, h) = 1$.

Так как функция $e^{-|t|^\alpha}$ является положительно определенной на $\mathbb{R} \iff 0 < \alpha \le 2$, то операторы $G_{\alpha,\delta,\gamma}$ при $\gamma = 0$ будут положительными при любых $0 < \alpha \le 2$ и $\delta > 0$. И наоборот, если при некотором $\alpha > 0$ операторы $G_{\alpha,\delta,0}$ будут положительными при любых $\delta > 0$, то $0 < \alpha \le 2$ (более подробно см., например, [16]). Нетрудно показать, что функция $(1+\gamma|x|)e^{-|x|}$ является положительно определенной на $\mathbb{R} \iff \gamma \in [-1, 1]$ (преобразование Фурье этой функции равно $2(1 + \gamma + (1 - \gamma)t^2)/(1 + t^2)^2$). Поэтому операторы $G_{1,\delta,\gamma}$ будут положительными при любых $\delta > 0 \iff \gamma \in [-1, 1]$. В силу теоремы 3.4 равенство (3.4) справедливо в следующих случаях: **1)** $n = 1$, $r = 1$ или $r \ge 2$, $\gamma = 0$, $0 < \alpha \le 2$. **2)** $n = 1$, $r = 1$ или $r \ge 2$, $\gamma \in [-1, 1]$, $\alpha = 1$. Отметим, что случай **1)** при $r = 1$ хорошо известен (см., например, [17–19]). Равенство (3.5) справедливо в следующих случаях: **1)** $n = 1$, $r = 2$ или $r \ge 3$, $\gamma = 0$, $0 < \alpha \le 2$. **2)** $n = 1$, $r = 2$ или $r \ge 3$, $\gamma \in [-1, 1]$, $\alpha = 1$.

Для бигармонических операторов Пуассона ($\alpha = 1$, $\delta > 0$ и $\gamma = (1 - e^{-2\delta})/(2\delta) \in (0, 1)$) результат был известен только при $n = 1$ и $r - 1 \in \mathbb{N}$ (см. [20]), который вытекает из теоремы 3.3 и при $n = r = \beta = 1$ (см. [21, 22]), который вытекает из теоремы 3.4.

В случае операторов Абеля–Пуассона ($\alpha = 1$) поиску полного асимптотического представления рядов (3.1) и (3.2) при $n = 1$, $\beta, r \in \mathbb{N}$ были посвящены работы [15,18,23,24]. Полное решение этой задачи было получено в работе автора [25]. В случае $\alpha = 2$, $n = 1$, $\beta = r = 1$ отметим работу [18]. В общем случае асимптотические разложения рядов (3.1), (3.2), (3.4) и (3.5) с явными коэффициентами легко вытекают из результатов работы автора [26]. Выпишем эти разложения при $\gamma = 0$.

Пусть $r > 0$, $\alpha > 0$. Тогда следующие асимптотические разложения справедливы соответственно в случаях, когда $r/\alpha \notin \mathbb{N}$ и $r/\alpha = p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\delta(2k+1)^\alpha}}{(2k + 1)^{r+1}} \underset{\delta\to+0}{\sim} -\frac{\Gamma\left(-r/\alpha\right)}{\alpha 2^{r+1}} \left(2^\alpha\delta\right)^{\frac{r}{\alpha}}$$
$$+ 2^{-r-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \zeta\left(-\alpha k + r + 1, 1/2\right) \left(2^\alpha\delta\right)^k, \quad (3.6)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-\delta(2k+1)^{\alpha}}}{(2k+1)^{r+1}}$$
$$\underset{\delta\to+0}{\sim}\frac{(-1)^{p+1}(2^{\alpha}\delta)^{p}}{2^{r+1}\Gamma(p+1)}\left(-\frac{\ln(2^{\alpha}\delta)}{\alpha}+\frac{\Gamma'(p+1)}{\alpha\Gamma(p+1)}-\frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)}\right)$$
$$+\,2^{-r-1}\sum_{k=1,k\neq p}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\,\zeta\left(-\alpha k+r+1,1/2\right)\,(2^{\alpha}\delta)^{k}. \quad (3.7)$$

Если $0<\alpha<1$, то в (3.6) и (3.7) имеет место знак равенства при всех $\delta>0$. Если $\alpha=1$, то в (3.6) и (3.7) имеет место знак равенства при всех $\delta\in(0,\pi)$. Здесь $\zeta(s,a)$ – функция Гурвица с параметром $a>0$, равная при $\operatorname{Re}s>1$ сумме $\sum_{k=0}^{\infty}(k+a)^{-s}$. Эта функция аналитически продолжается в $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Пусть $r+1>0$, $\alpha>0$. Тогда имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-e^{-\delta(2k+1)^{\alpha}}}{(2k+1)^{r+1}}(-1)^{k}$$
$$\underset{\delta\to+0}{\sim}2^{-r-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\,\widetilde{\zeta}\left(-\alpha k+r+1,1/2\right)\,(2^{\alpha}\delta)^{k}. \quad (3.8)$$

Если $0<\alpha<1$, то в (3.8) имеет место знак равенства при всех $\delta>0$. Если $\alpha=1$, то в (3.8) имеет место знак равенства при всех $\delta\in(0,\pi/2)$. Здесь $\widetilde{\zeta}(s,a)$ — целая функция по $s\in\mathbb{C}$, равная при $\operatorname{Re}s>0$ сумме $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(k+a)^{-s}$, $a>0$.

Пример 3.2. Пусть $h(t)=(t+1)^{-\mu}$, $\mu>0$. В этом случае $m(h)=1$ (см. замечание 3.2). Второе условие в теоремах 3.1 и 3.2 выполнено для любых $\alpha>0$ и $\delta>0$. Это вытекает из того, что функция $h(t^{\alpha}\delta)$ убывает к нулю и выпукла вниз на $(t_{\alpha,\mu,\delta},+\infty)$ при некотором $t_{\alpha,\mu,\delta}>0$. Очевидно $h\in M_m$ при любом $m\in\mathbb{N}$. Учитывая замечание 3.1, получаем следующие результаты. Если $\alpha\in(0,1]$, то равенства (3.1) и (3.2) выполняются при любых $n\in\mathbb{N}$, $r\geq\alpha$ и $\delta>0$. Если $\alpha>1$, то равенство (3.1) выполняется при $n=1$ и любых $r\geq\alpha+1$ и $\delta>0$, а равенство (3.2) выполняется при $n=1$ и любых $r\geq\alpha+2$ и $\delta>0$.

Второе условие в теореме 3.3 выполнено для любых $\mu>1$, $\alpha>0$, $\delta>0$ и $\gamma\in\mathbb{R}$. Это вытекает из того, что функция $t^{\alpha}h(t^{\alpha}\delta)$ убывает к нулю и выпукла вниз на $(t_{\alpha,\mu,\delta},+\infty)$ при некотором $t_{\alpha,\mu,\delta}>0$. Значения $\gamma_m(\rho,h)$ найдены в работе [12] (см. замечание 3.4). Поэтому теорема 3.3 справедлива в следующих случаях: **1)** $\rho=1$, $\gamma_1(1,h)=(\mu+2)/3$, $\gamma_2(1,h)=(\mu+3)/4$, $\mu>1$. **2)** $\rho=2$, $\gamma_1(2,h)=\gamma_2(2,h)=\mu$, $\mu>1$.

Функция $(|t|^\alpha+1)^{-\mu}$, $\alpha>0$, $\mu>0$, является положительно определенной на $\mathbb{R}$ $\iff$ $0<\alpha\le 2$. Достаточность вытекает из того, что функция $(t+1)^{-\mu}$, $\mu>0$, является вполне монотонной на $(0,+\infty)$. Необходимость вытекает из того, что среди положительно определенных функций только постоянная функция имеет в нуле нулевую производную второго порядка. Поэтому операторы $H_{\alpha,\mu,\delta,\gamma}=G$ при $\gamma=0$ будут положительными при любых $0<\alpha\le 2$, $\mu>0$ и $\delta>0$. И наоборот, если при некоторых $\alpha>0$, $\mu>0$ операторы $H_{\alpha,\mu,\delta,0}$ будут положительными при любых $\delta>0$, то $0<\alpha\le 2$ (более подробно см., например, [16]). В силу теоремы 3.4 равенство (3.4) справедливо в следующем случае: $n=1$, $r=1$ или $r\ge 2$, $\gamma=0$, $0<\alpha\le 2$, $\mu>0$. Равенство (3.5) справедливо в следующем случае: $n=1$, $r=2$ или $r\ge 3$, $\gamma=0$, $0<\alpha\le 2$, $\mu>0$.

Асимптотические разложения рядов (3.1), (3.2), (3.4) и (3.5) с явными коэффициентами легко вытекают из результатов работы [26]. Выпишем эти разложения при $\gamma=0$. Если $r>0$, $\alpha>0$, $\mu>0$, то следующие асимптотические разложения справедливы соответственно в случаях, когда $r/\alpha\notin\mathbb{N}$ и $r/\alpha=p\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-((2k+1)^\alpha\delta+1)^{-\mu}}{(2k+1)^{r+1}}\underset{\delta\to+0}{\sim}-\frac{\Gamma\left(-\frac{r}{\alpha}\right)\,\Gamma\left(\mu+\frac{r}{\alpha}\right)}{\alpha\,2^{r+1}\Gamma(\mu)}\,(2^\alpha\delta)^{\frac{r}{\alpha}}$$
$$+\,2^{-r-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\,\frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}\,\zeta\left(-\alpha k+r+1,1/2\right)\,(2^\alpha\delta)^k,\quad (3.9)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-((2k+1)^\alpha\delta+1)^{-\mu}}{(2k+1)^{r+1}}\underset{\delta\to+0}{\sim}\frac{\Gamma(\mu+p)(-1)^{p+1}(2^\alpha\delta)^p}{2^{r+1}\Gamma(\mu)\Gamma(p+1)}$$
$$\times\left(-\frac{\ln(2^\alpha\delta)}{\alpha}+\frac{\Gamma'(p+1)}{\alpha\,\Gamma(p+1)}-\frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)}-\frac{\Gamma'(\mu+p)}{\alpha\,\Gamma(\mu+p)}\right)$$
$$+\,2^{-r-1}\sum_{\substack{k=1,\\ k\ne p}}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\,\frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}\,\zeta(-\alpha k+r+1,1/2)\,(2^\alpha\delta)^k.\quad (3.10)$$

Если $r+1>0$, $\alpha>0$ и $\mu>0$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-((2k+1)^\alpha\delta+1)^{-\mu}}{(2k+1)^{r+1}}(-1)^k$$
$$\underset{\delta\to+0}{\sim}2^{-r-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\,\frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}\,\widetilde{\zeta}(-\alpha k+r+1,1/2)\,(2^\alpha\delta)^k.\quad (3.11)$$

Пример 3.3. Пусть $h(t) = (1-t)_+^\mu$, $\mu > 0$. Второе условие в теоремах 3.1 и 3.2 очевидно выполнено для любых $\alpha > 0$ и $\delta > 0$. Если $\mu \geq 1$, то $m(h) = 1$ (см. замечание 3.2). Очевидно $h \in M_m$, $m \in \mathbb{N}$ $\iff$ $\mu \geq m$. Учитывая замечание 3.1, получаем следующие результаты. Если $\alpha \in (0,1]$ и $\mu \geq 2$, то равенство (3.1) выполняется при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \geq \alpha$ и $\delta > 0$, а равенство (3.2) выполняется при $n = 1$ и любых $r \geq \alpha + 1$, $\delta > 0$. Если $\alpha \in (0,1]$ и $\mu \geq 3$, то равенство (3.2) выполняется при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \geq \alpha$ и $\delta > 0$. Если $\alpha > 1$ и $\mu \geq 1$, то равенство (3.1) выполняется при $n = 1$ и любых $r \geq \alpha + 1$ и $\delta > 0$, а равенство (3.2) выполняется при $n = 1$ и любых $r \geq \alpha + 2$ и $\delta > 0$. Соответствующие операторы $R_\delta^{\alpha,\mu} = G$ называются средними Рисса. При $\alpha = \mu = 1$, $1/\delta \in \mathbb{N}$ получаются средние арифметические.

Второе условие в теореме 3.3 выполнено для любых $\alpha > 0$, $\delta > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, а значения $\gamma_m(\rho, h)$ найдены в работе [12] (см. замечание 3.4). Поэтому теорема 3.3 справедлива, например, в следующих случаях: **1)** $\rho = 1$, $\gamma_1(1,h) = (\mu-2)/3$ (если $\mu \geq 2$), $\gamma_2(1,h) = (\mu-3)/4$ (если $\mu \geq 3$). **2)** $\rho = 2$, $\gamma_1(2,h) = \mu$ (если $\mu \geq 2$), $\gamma_2(2,h) = \mu$ (если $\mu \geq 3$).

Функция $(1-|t|^\alpha)_+^\mu$, $\alpha > 0$, $\mu > 0$, является положительно определенной на $\mathbb{R}$ $\iff$ $0 < \alpha < 2$ и $\mu \geq \lambda(\alpha)$, где $\lambda(\alpha)$ — функция Кутнера, которая положительна, возрастает на $(0,2)$, $\lambda(+0) > 0$, $\lambda(1) = 1$ и $\lambda(2-0) = +\infty$ (более подробно см., например, [16]). Поэтому операторы $R_\delta^{\alpha,\mu,\gamma} = G$ при $\gamma = 0$ будут положительными при любых $0 < \alpha < 2$, $\mu \geq \lambda(\alpha)$ и $\delta > 0$. И наоборот, если при некоторых $\alpha > 0$, $\mu > 0$ операторы $R_\delta^{\alpha,\mu,0}$ будут положительными при любых $\delta > 0$, то $0 < \alpha < 2$, $\mu \geq \lambda(\alpha)$. Известно также, что функция $(1+\gamma|x|)(1-|x|)_+$ является положительно определенной на $\mathbb{R}$ $\iff$ $\gamma \in [-3, 0]$ (см. [27, теорема 9]). Поэтому положительно определенной на $\mathbb{R}$ будет и функция $(1+\gamma|x|)(1-|x|)_+^{\mu+1}$ при любых $\gamma \in [-3,0]$ и $\mu \geq 1$. В силу теоремы 3.4 равенство (3.4) справедливо в следующих случаях: **1)** $n = 1$, $r = 1$ или $r \geq 2$, $\gamma = 0$, $0 < \alpha < 2$, $\mu \geq \lambda(\alpha)$. **2)** $n = 1$, $r = 1$ или $r \geq 2$, $\gamma \in [-3,0]$, $\alpha = 1$, $\mu = 1$ или $\mu \geq 2$. Равенство (3.5) справедливо в следующих случаях: **1)** $n = 1$, $r = 2$ или $r \geq 3$, $\gamma = 0$, $0 < \alpha < 2$, $\mu \geq \lambda(\alpha)$. **2)** $n = 1$, $r = 2$ или $r \geq 3$, $\gamma \in [-3,0]$, $\alpha = 1$, $\mu = 1$ или $\mu \geq 2$.

В случае средних арифметических ($\alpha = \mu = 1$, $1/\delta \in \mathbb{N}$) для классов W_p^r, $r \in \mathbb{N}$, и $\widetilde{W}_p^r$, $r-1 \in \mathbb{N}$, для которых параметр $n = 1$, равенства (3.1) и (3.2) при $p = \infty$ доказаны в работах Надя [28, 29], а в работе Теляковского [30] доказано совпадение величин приближения указанных классов при $p = 1$ и $p = \infty$. В этих же случаях асимптотическое разложение при $\delta \to +0$ соответствующих рядов (3.1) и (3.2) найдено в работах Теляковского и Баскакова [31, 32].

3.4. Приближение средними Чезаро

Числа Чезаро A_n^α, $n \in \mathbb{Z}_+$, порядка $\alpha \in \mathbb{R}$, определяются с помощью следующей производящей функции:

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n, \quad |x| < 1. \tag{3.12}$$

Очевидно $A_0^\alpha = 1$, $A_k^0 = 1$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, и $A_n^\alpha = (\alpha+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+n)/n!$ при $n \in \mathbb{N}$. Естественно считать, что $A_n^\alpha = 0$ при $-n \in \mathbb{N}$. Для любых $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства (см., например, [2, гл. III, § 1])

$$A_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha-1}; \quad A_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-\gamma} A_k^{\gamma-1}. \tag{3.13}$$

Для заданной последовательности s_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, чезаровские суммы S_n^α порядка α и чезаровские средние σ_n^α порядка $\alpha > -1$ определяются по формулам

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} s_k, \quad \sigma_n^\alpha = \frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.14}$$

Очевидно $S_n^0 = s_n$ и $S_n^1 = s_0 + \cdots + s_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Нетрудно показать, что для любых $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ справедливы равенства (см., например, [2, гл. III, § 1])

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-\gamma-1} S_k^\gamma, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.15}$$

Если в качестве исходной последовательности взять $s_n = D_n(x) := \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu x}$ — ядра Дирихле, то чезаровские суммы $S_n^\alpha(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для этой последовательности будут равны

$$S_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} D_k(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} e^{i\nu x} \sum_{k=|\nu|}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} = \sum_{\nu=-n}^{n} A_{n-|\nu|}^{\alpha} e^{i\nu x}. \tag{3.16}$$

Формула (3.15) в этом случае будет иметь вид

$$S_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-\gamma-1} S_k^\gamma(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ \alpha, \gamma, x \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Средние Чезаро порядка $\alpha > -1$ функции $f \in L_1$ определяются по формуле

$$\sigma_n^\alpha(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{A_{n-|k|}^\alpha}{A_n^\alpha} \widehat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n^\alpha(x-t)\,dt;$$
$$K_n^\alpha(x) = \frac{1}{A_n^\alpha} \cdot S_n^\alpha(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.18}$$

Теорема 3.5. *Пусть $\beta \in \mathbb{Z}$, $p = 1$ или $p = \infty$, $\alpha \geq 1$ и $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда равенство*

$$E(\mathbf{W}_{p,1}^{r,\beta}; \sigma_m^\alpha)_p = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(\beta+1)}}{(2k+1)^{r+1}} \Big(1 - \frac{A_{m-(2k+1)}^\alpha}{A_m^\alpha}\Big) \tag{3.19}$$

справедливо, по крайней мере, в следующих случаях: **1)** *$\beta + 1 \in 2\mathbb{Z}$, $r = 1$ или $r \geq 2$;* **2)** *$\beta \in 2\mathbb{Z}$, $r = 2$ или $r \geq 3$. Кроме того, в указанных двух случаях для любых $\alpha, \gamma \geq 1$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства*

$$E(\mathbf{W}_{p,1}^{r,\beta}; \sigma_m^\alpha)_p = \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{\alpha-\gamma-1} A_k^\gamma \, E(\mathbf{W}_{p,1}^{r,\beta}; \sigma_k^\gamma)_p. \tag{3.20}$$

Доказательство. Так как

$$S_m^1(x) = D_0(x) + \cdots + D_m(x) = \frac{\sin^2 \frac{(m+1)x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R},$$

то из (3.17) при $\gamma = 1$ вытекает, что для любых $\alpha > 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $S_m^\alpha(x) > 0$. Ряд Фурье для ядра $K \in L_1$ (см. (1.4)) в нашем случае имеет вид

$$K(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - \frac{A_{m-k}^\alpha}{A_m^\alpha})}{k^r} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big).$$

В случае $\beta+1 \in 2\mathbb{Z}$ надо применить пример 2.1 (iii), а в случае $\beta \in 2\mathbb{Z}$ надо применить пример 2.2 (iv), в которых $\nu_k = A_{m-k}^\alpha / A_m^\alpha$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $|c| = 2$. При этом надо учесть, что $\nu_0 = 1$ и

$$\frac{\nu_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \cos kt = \frac{1}{2A_m^\alpha} \cdot S_m^\alpha(t) \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+,\ \alpha \geq 1,\ t \in \mathbb{R}.$$

Равенство (3.19) в указанных двух случаях доказано. Докажем теперь, что в этих же случаях справедливы равенства (3.20).

Для фиксированных параметров $\beta \in \mathbb{Z}$ и $r > 0$ зададим две последовательности $s_m = s_m(\beta, r)$ и $E_m^\alpha = E_m^\alpha(\beta, r)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, по следующему правилу:

$$s_{2k} = 0, \quad s_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k(\beta+1)}}{(2k+1)^{r+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+;$$
$$E_m^\alpha = SA_m^\alpha - S_m^{\alpha+1}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

где S_m^α — чезаровские суммы последовательности s_m, $m \in \mathbb{Z}_+$, а $S = \sum_{k=0}^\infty s_k$. Из (3.15) сразу получаются равенства

$$\sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{\alpha-\gamma-1} E_k^\gamma = E_m^\alpha, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.21}$$

Кроме того, из (3.14) вытекает, что при $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$E_m^\alpha = \sum_{k=0}^\infty s_k(A_m^\alpha - A_{m-k}^\alpha) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^{k(\beta+1)}}{(2k+1)^{r+1}} (A_m^\alpha - A_{m-(2k+1)}^\alpha).$$

Если $p = 1$ или $p = \infty$, а параметры $\beta \in \mathbb{Z}$ и $r > 0$ такие, для которых выполняется одно из двух указанных в теореме условий, то по доказанному при любых $\alpha \geq 1$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство (3.19), т.е. $E_m^\alpha = A_m^\alpha E(\mathbf{W}_{p,1}^{r,\beta}; \sigma_m^\alpha)_p$. В этих случаях равенство (3.20) вытекает из равенства (3.21). Теорема 3.5 доказана. □

Замечание 3.5. Для классов W_p^r, $r \in \mathbb{N}$, и $\widetilde{W}_p^r$, $r - 1 \in \mathbb{N}$, равенства (3.19) для $\alpha \in \mathbb{N}$ при $p = \infty$ доказаны в работах Надя [28, 29], а в работе Теляковского [30] доказано совпадение при $p = 1$ и $p = \infty$ величин приближения указанных классов средними Чезаро.

Замечание 3.6. Пусть $K^{r,\beta} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^{k(\beta+1)}}{(2k+1)^r}$. Если $\beta \in \mathbb{Z}$, а $p = 1$ или $p = \infty$, то для средних Фейера равенство

$$E(\mathbf{W}_{p,1}^{r,\beta}; \sigma_m^1)_p = \frac{K^{r,\beta}}{m+1} + O\Big(\frac{1}{(m+1)^r}\Big) \tag{3.22}$$

справедливо, по крайней мере, в следующих случаях: **1)** $\beta + 1 \in 2\mathbb{Z}$, $r \geq 2$; **2)** $\beta \in 2\mathbb{Z}$, $r = 2$ или $r \geq 3$. Для $r - 1 \in \mathbb{N}$ это доказано Никольским [33, 34], а для остальных указанных r равенство (3.22) получается из равенства (3.19) методом, изложенным в работе Теляковского и Баскакова [32]. Из (3.22) и равенства (3.20) при $\gamma = 1$ вытекает, что при $\alpha > 1$ и указанных выше значениях p, β, r справедливо равенство $E(\mathbf{W}_{p,1}^{r,\beta}; \sigma_m^\alpha)_p = K^{r,\beta}\alpha/(\alpha + m) + o(1/m)$. Последнее соотношение при $p = \infty$ и $r - 1 \in \mathbb{N}$ другим методом доказано Фалалеевым [35]. В этой же работе [35] для $\alpha - 1 \in \mathbb{N}$ приведены шесть первых членов в асимптотике для величины $E(W^1_\infty; \sigma^\alpha_m)_\infty$.

3.5. Приближение средними типа Рисса и Чезаро целого порядка

Пусть $Q(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^{\mu_k}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $a_k, \mu_k > 0$. Так как $Q(0) = 0$ и $Q(x) > 0$ при $x > 0$, то для любых $\alpha, u > 0$ имеет смысл оператор

$$G^{\alpha,Q}_u(f)(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{Q\left((u - |k|^\alpha)_+\right)}{Q(u)} \widehat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) K^{\alpha,Q}_u(x-t)\,dt, \quad f \in L_1, \tag{3.23}$$

$$K^{\alpha,Q}_u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{Q\left((u - |k|^\alpha)_+\right)}{Q(u)} e^{ikx}.$$

Если $Q(x) = x^\mu$, $\mu > 0$, то получаем средние Рисса. Если $Q(x) = \prod_{k=1}^{\mu}(x+k-1)$, $\mu \in \mathbb{N}$, то при $\alpha = 1$, $m \in \mathbb{Z}_+$, получаем $G^{1,Q}_{m+1} = \sigma^\mu_m$ — средние Чезаро (см. § 3.4).

Для той же функции Q и для любых $\alpha, \delta > 0$ определим следующие операторы

$$\widetilde{G}^{\alpha,Q}_\delta(f)(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{Q\left((1 - |k|^\alpha\delta)_+\right)}{Q(1)} \widehat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \widetilde{K}^{\alpha,Q}_\delta(x-t)\,dt, \quad f \in L_1, \tag{3.24}$$

$$\widetilde{K}^{\alpha,Q}_\delta(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{Q\left((1 - |k|^\alpha\delta)_+\right)}{Q(1)} e^{ikx}.$$

Теорема 3.6. *Пусть $Q(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^{\mu_k}$, где $n \in \mathbb{N}$, $a_k > 0$ и $\mu_k \geq 1$. Пусть $\beta \in \mathbb{Z}$, $p = 1$ или $p = \infty$, $0 < \alpha \leq 1$ и $u, \delta > 0$. Тогда равенства*

$$E(\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,1}; G^{\alpha,Q}_u)_p = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(\beta+1)}}{(2k+1)^{r+1}}\Big(1 - \frac{Q\left((u - (2k+1)^\alpha)_+\right)}{Q(u)}\Big), \tag{3.25}$$

$$E(\mathbf{W}^{r,\beta}_{p,1}; \widetilde{G}^{\alpha,Q}_\delta)_p = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(\beta+1)}}{(2k+1)^{r+1}}\Big(1 - \frac{Q\left((1 - (2k+1)^\alpha\delta)_+\right)}{Q(1)}\Big) \tag{3.26}$$

справедливы, по крайней мере, в следующих случаях: **1)** $\beta+1\in 2\mathbb{Z}$, $r=1$ *или* $r\ge 2$; **2)** $\beta\in 2\mathbb{Z}$, $r=2$ *или* $r\ge 3$.

Доказательство. Рассмотрим случай операторов $G_u^{\alpha,Q}$. Если $u>0$, $0<\alpha\le 1$, $\mu\ge 1$, то функция $g(t)=(u-|t|^\alpha)_+^\mu$ является положительно определенной на $\mathbb{R}$ (более подробно см., например, [16]). Поэтому при любых $u>0$, $0<\alpha\le 1$, положительно определенной на $\mathbb{R}$ будет и функция $f(t)=Q((u-|t|^\alpha)_+)$. По лемме 2.1 при всех $t\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $K_u^{\alpha,Q}(t)\ge 0$. Ряд Фурье для ядра $K\in L_1$ (см. (1.4)) в нашем случае имеет вид

$$K(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(1-\frac{Q((u-|k|^\alpha)_+)}{Q(u)})}{k^r}\cos\Big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\Big).$$

В случае $\beta+1\in 2\mathbb{Z}$ надо применить пример 2.1 (iii), а в случае $\beta\in 2\mathbb{Z}$ надо применить пример 2.2 (iv), в которых $\nu_k=Q\left((u-k^\alpha)_+\right)/Q(u)$, $k\in\mathbb{Z}_+$ и $|c|=2$. При этом надо учесть, что $\nu_0=1$ и

$$\frac{\nu_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k\cos kt=\frac{1}{2}\cdot K_u^{\alpha,Q}(t)\ge 0,\quad u>0,\ 0<\alpha\le 1,\ t\in\mathbb{R}.$$

Точно так же рассматривается и случай операторов $\widetilde{G}_\delta^{\alpha,Q}$. Теорема 3.6 доказана. $\square$

4. Вспомогательные утверждения

4.1. Свойства выпуклых функций и величины $m(h)$

Отметим следующие два свойства выпуклых функций.

1. Если обе функции f и g неотрицательны, убывают и выпуклы вниз на $(0,+\infty)$, то такой же функцией будет и произведение fg (доказательство вытекает из определения выпуклой функции и очевидного неравенства $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\ge 0$ при всех $x,y>0$).

2. Если функция f неотрицательна, убывает и выпукла вниз на $(0,+\infty)$, а функция g положительна, возрастает и выпукла вверх на $(0,+\infty)$, то функция $f(g(x))$ неотрицательна, убывает и выпукла вниз на $(0,+\infty)$ (доказательство легко получается из определения выпуклой функции). В частности, при любом $\varepsilon\in(0,1]$ функция $f(x^\varepsilon)$ неотрицательна, убывает и выпукла вниз на $(0,+\infty)$.

Лемма 4.1. *Пусть функция $\lambda(x)$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$ и $\lambda(t_k)\to 0$ для некоторой последовательности $t_k\to+\infty$. Тогда при любых $\varepsilon\in(0,1]$, $\gamma\geq 0$ функция $\lambda(x^\varepsilon)x^{-\gamma}$ убывает к нулю и выпукла вниз на $(0,+\infty)$. Если дополнительно $\lambda(x)\in C^1(0,+\infty)$ и функция $-\lambda'(x)$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$, то при любых $\varepsilon\in(0,1]$, $\gamma\geq 0$ функция $-f'(x)$ монотонно убывает к нулю и выпукла вниз на $(0,+\infty)$, где $f(x)=\lambda(x^\varepsilon)x^{-\gamma}$.*

Доказательство. Пусть функция λ выпукла вниз на $(0,+\infty)$. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{\lambda(x_2)-\lambda(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{\lambda(x_3)-\lambda(x_1)}{x_3-x_1}\leq\frac{\lambda(x_3)-\lambda(x_2)}{x_3-x_2},\ 0<x_1<x_2<x_3. \tag{4.1}$$

Если в неравенстве (4.1) взять $x_3=t_k$ и перейти к пределу при $k\to\infty$, то получим, что функция $\lambda(x)$ убывает на $(0,+\infty)$ и, значит, $\lim_{x\to+\infty}\lambda(x)=\lim_{k\to+\infty}\lambda(t_k)=0$. Поэтому при любых $\varepsilon\in(0,1]$, $\gamma\geq 0$ функция $\lambda(x^\varepsilon)x^{-\gamma}$ убывает к нулю и выпукла вниз на $(0,+\infty)$.

Пусть дополнительно $\lambda(x)\in C^1(0,+\infty)$ и функция $-\lambda'(x)$ выпукла вниз на интервале $(0,+\infty)$. Из равенства $\lambda(+\infty)=0$ вытекает сходимость интеграла $\int_1^{+\infty}\lambda'(x)\,dx$. Но функция $\lambda'(x)$ монотонна на интервале $(x_0,+\infty)$ при некотором $x_0\geq 0$. Поэтому $\lambda'(+\infty)=0$ и, значит, функция $-\lambda'(x)$ убывает к нулю на $(0,+\infty)$. Тогда при любых $\varepsilon\in(0,1]$, $\gamma\geq 0$ функция $-f'(x)=\varepsilon(-\lambda'(x^\varepsilon))x^{-(\gamma+1-\varepsilon)}+\gamma\lambda(x^\varepsilon)x^{-\gamma-1}$ монотонно убывает к нулю и выпукла вниз на $(0,+\infty)$. Лемма 4.1 доказана. □

В следующей лемме установлены свойства величины $m(h)$ (см. определение 3.2).

Лемма 4.2. *Пусть $h(x)\leq 1$ при $x>0$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $m(h)<+\infty$ и $h(x_0)=1$ при некотором $x_0>0$, то $h(x)=1$ при всех $x\geq x_0$.*
2. $m(h)=-\infty \iff h(x)\equiv 1$ *на* $(0,+\infty)$.
3. *Если $-\infty<m(h)<+\infty$, то функция $(1-h(x^\varepsilon))x^{-\gamma}$, $\varepsilon>0$, убывает по $x\in(0,+\infty) \iff \gamma\geq\varepsilon m(h)$.*
4. *Если $h(+0)=1$ и $h(x)\not\equiv 1$ на $(0,+\infty)$, то $m(h)>0$.*
5. *Если $h(x_k)\to q<1$ для некоторой последовательности $x_k\to+\infty$, то $m(h)\geq 0$. Если, дополнительно, $h(x_0)>q$ в некоторой точке $x_0>0$, то $m(h)>0$.*

6. *Если* h' *непрерывна в точке* 0 *справа,* $h(0) = 1$ *и* $h'(0) \neq 0$, *то* $m(h) \geq 1$.

7. *Если функция* h *выпукла вниз на* $(0, +\infty)$ *и* $h(x) \not\equiv \mathrm{const}$ *на* $(0, +\infty)$, *то* $m(h) \in (0, 1]$.

8. *Пусть* $x_0 > 0$ *такая точка, что* $h(x) < 1$ *при* $0 < x < x_0$ *и* $h(x) = 1$ *при* $x \geq x_0$, *а если* $h(x) < 1$ *при всех* $x > 0$, *то считаем* $x_0 := +\infty$. *Если функция* h *дифференцируема на* $(0, x_0)$, *то* $m(h) = \sup\{h'(x)\, x/(h(x) - 1) : 0 < x < x_0\}$.

Доказательство. Если $m(h) < +\infty$, то при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = (1 - h(x))x^{-\gamma}$ убывает и неотрицательна на $(0, +\infty)$. Поэтому, если $f(x_0) = 0$ при некотором $x_0 > 0$, то $f(x) = 0$ при всех $x \geq x_0$. Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Пусть $m(h) = -\infty$. Тогда при всех $\gamma \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = (1 - h(x))x^{-\gamma}$ убывает на $(0, +\infty)$. Поэтому функция f, а, значит, и функция h дифференцируемы при почти всех $x \in (0, +\infty)$. В тех точках $x \in (0, +\infty)$, где дифференцируема функция h, при всех $\gamma \in \mathbb{R}$ будет выполняться неравенство $f'(x) = -x^{-\gamma-1}\,(xh'(x) + \gamma(1 - h(x))) \leq 0$, которое эквивалентно условию

$$xh'(x) + \gamma(1 - h(x)) \geq 0. \tag{4.2}$$

Обе части последнего неравенства делим на $|\gamma| \neq 0$ и переходим к пределу при $\gamma \to -\infty$. Получаем, что $h(x) \geq 1$, и, значит, $h(x) = 1$ во всех точках $x \in (0, +\infty)$, где дифференцируема функция h. Так как множество таких точек всюду плотно на $(0, +\infty)$, то учитывая утверждение 1, получаем, что $h(x) \equiv 1$ на $(0, +\infty)$. Необходимость в утверждении 2 доказана. Достаточность очевидна.

Докажем утверждение 3. Если $-\infty < m(h) < +\infty$, то очевидно функция $(1-h(x^\varepsilon))x^{-\gamma}$, $\varepsilon > 0$, убывает по $x \in (0, +\infty) \iff$ функция $(1 - h(x))x^{-\gamma/\varepsilon}$ убывает по $x \in (0, +\infty) \iff \gamma/\varepsilon \geq m(h)$.

Докажем утверждение 4. Если $m(h) \leq 0$, то функция $1 - h(x)$ убывает на $(0, +\infty)$. Поэтому $0 \leq 1 - h(x) \leq 1 - h(+0) = 0$ при всех $x > 0$, что противоречит условию $h(x) \not\equiv 1$ на $(0, +\infty)$.

Докажем утверждение 5. Если при некотором $\gamma < 0$ функция $\lambda(x) = (1 - h(x))x^{-\gamma}$ убывает на $(0, +\infty)$, то существует конечный предел $\lambda(+\infty)$, но $\lambda(x_k) \to +\infty$. Поэтому $m(h) \geq 0$. Если функция $1 - h(x)$ убывает на $(0, +\infty)$, то функция $h(x)$ возрастает и, значит, $h(x) \leq h(+\infty) = q$ при $x > 0$. Поэтому, если дополнительно $h(x_0) > q$ в некоторой точке $x_0 > 0$, то $m(h) > 0$. Утверждение 5 доказано.

Докажем утверждение 6. Пусть при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = (1 - h(x))x^{-\gamma}$ убывает на $(0, +\infty)$. Из условия вытекает, что при некотором $x_0 > 0$ неравенство (4.2) выполняется при всех $x \in (0, x_0)$. Неравенство (4.2) делим на $x > 0$ и переходим к пределу при $x \to +0$. Получим неравенство $h'(0)(1-\gamma) \geq 0$. Так как $h'(0) \neq 0$, то $h'(0) < 0$ (иначе $h(x) > h(0) = 1$ при малых $x > 0$, что противоречит условию). Поэтому $\gamma \geq 1$ и, значит, $m(h) \geq 1$. Утверждение 6 доказано.

Докажем утверждение 7. Пусть функция h выпукла вниз на интервале $(0, +\infty)$. Так как функция h ограничена сверху, то из неравенства $\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{h(x_3)-h(x_1)}{x_3-x_1}$, $0 < x_1 < x_2 < x_3$, вытекает, что функция h убывает на $(0, +\infty)$ и, значит, существует конечный предел $h(+0) \leq 1$. Если в этом неравенстве перейти к пределу при $x_1 \to +0$, то получим, что функция $(h(+0) - h(x))/x$ убывает на $(0, +\infty)$. Следовательно убывает на $(0, +\infty)$ и функция $(1 - h(x))/x$. Поэтому $m(h) \leq 1$. Если $m(h) \leq 0$, то функция $1 - h(x)$ убывает на $(0, +\infty)$, т.е. $h(x)$ возрастает и, значит, $h(x) \equiv \mathrm{const}$ на $(0, +\infty)$, что противоречит условию. Поэтому $m(h) > 0$. Утверждение 7 доказано.

Докажем утверждение 8. При любом $\gamma \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = (1 - h(x))x^{-\gamma}$ неотрицательна на $(0, +\infty)$ и $f(x) = 0$ при $x \geq x_0$ (если $x_0 < +\infty$). Поэтому функция f убывает на $(0, +\infty)$ $\iff$ f убывает на $(0, x_0)$ $\iff$ при всех $x \in (0, x_0)$ выполняется неравенство (4.2) $\iff$ $\gamma \geq \sup\{h'(x)\, x/(h(x) - 1) : 0 < x < x_0\}$. Утверждение 8 доказано. Лемма 4.2 полностью доказана. □

5. Доказательство теорем

5.1. Доказательство теоремы 3.1

Ряд Фурье для ядра $K \in L_1$ (см. (1.4)) в нашем случае имеет вид

$$K(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - h(k^\alpha \delta))}{k^r} \cos\Big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\Big). \tag{5.1}$$

1) Если $\beta = 2p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$, то

$$(-1)^p K(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - h(k^\alpha \delta))}{k^r} \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin kt. \tag{5.2}$$

К функции $\lambda(x)$ применяем лемму 4.1 при $t_k = k^\alpha\delta$ (последовательность $h(|k|^\alpha\delta)$, как коэффициенты Фурье интегрируемой функции $g_{\alpha,\delta}$, стремится к нулю). Так как $\alpha \in (0, 1]$, то при $r \geq \alpha$ функция $f(x) = 2\delta\lambda(x^\alpha\delta)x^{\alpha-r}$ убывает к нулю и выпукла вниз на $(0, +\infty)$. Поэтому последовательность $\lambda_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}$, монотонно убывает к нулю и выпукла вниз. В силу примера 2.1 (i) равенство (2.2) справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$. Первое утверждение в теореме 3.1 доказано.

2) Если $\beta = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$, то

$$(-1)^p K(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - h(k^\alpha \delta))}{k^r} \cos kt = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cos kt. \tag{5.3}$$

Так как $\alpha \in (0,1]$, то при $r \geq \alpha+1$ последовательность $k\mu_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}$, где $f(x) = 2\delta\lambda(x^\alpha\delta)x^{\alpha+1-r}$, монотонно убывает к нулю и выпукла вниз. В силу примера 2.2 (iii) равенство (2.3) справедливо при $n = 1$.

Пусть дополнительно $\lambda(x) \in C^1(0,+\infty)$ и функция $-\lambda'(x)$ выпукла вниз на интервале $(0,+\infty)$. Так как $\alpha \in (0,1]$, то при $r \geq \alpha$ последовательность $\mu_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}$, убывает к нулю и выпукла вниз, где $f(x) = 2\delta\lambda(x^\alpha\delta)x^{\alpha-r}$ и функция $-f'(x)$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$ (см. лемму 4.1). Поэтому $\Delta^3\mu_k = \int_k^{k+1}(2f'(x+1) - f'(x) - f'(x+2))\,dx \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В силу примера 2.2 (**i**) равенство (2.3) справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$. Теорема 3.1 доказана.

5.2. Доказательство теоремы 3.2

Неравенства $m(h) \geq 0$ и $m(h) > 0$, если $h(x_0) > 0$ при некотором $x_0 > 0$, вытекают из утверждения 5 в лемме 4.2 при $x_k = k^\alpha\delta$, $k \in \mathbb{N}$, и $q = 0$ (последовательность $h(|k|^\alpha\delta)$, как коэффициенты Фурье интегрируемой функции $g_{\alpha,\delta}$, стремится к нулю).

1) Пусть $\beta = 2p+1$, $p \in \mathbb{Z}$ и $r \geq \alpha m(h) + 1$. В этом случае для ядра $K \in L_1$ имеет место (5.2), где $\lambda_k \geq 0$ и последовательность $k\lambda_k$ убывает (см. утверждение 3 в лемме 4.2). В силу примера 2.1 (ii) равенство (2.2) справедливо при $n = 1$.

2) Пусть $\beta = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$ и $r \geq \alpha m(h) + 2$. В этом случае для ядра $K \in L_1$ имеет место (5.3), где $\mu_k \geq 0$ и последовательность $k^2\mu_k$ убывает (см. утверждение 3 в лемме 4.2). В силу примера 2.2 (ii) равенство (2.3) справедливо при $n = 1$. Теорема 3.2 доказана.

5.3. Доказательство теоремы 3.3

Ряд Фурье для ядра $K \in L_1$ (см. (1.4)) в нашем случае имеет вид

$$K(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - (1 + k^\alpha\delta\gamma)h(k^\alpha\delta))}{k^r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{5.4}$$

1) Если $\beta = 2p+1$, $p \in \mathbb{Z}$, то

$$(-1)^p K(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - (1 + k^\alpha\delta\gamma)h(k^\alpha\delta))}{k^r} \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin kt. \tag{5.5}$$

Здесь $\lambda_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}$, где $f(x) = 2\delta^\rho \lambda_{\rho,\gamma}(x^\alpha \delta) x^{\alpha\rho - r}$, $x > 0$, а функция $\lambda_{\rho,\gamma}(x)$ определена равенством (3.3). Если $\alpha \in (0,1]$ и $r \geq \alpha\rho$, то функция $f(x)$ убывает к нулю и выпукла вниз на $(0,+\infty)$. Поэтому последовательность $\lambda_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}$, монотонно убывает к нулю и выпукла вниз. В силу примера 2.1 (i) равенство (2.2) справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\alpha > 1$ и $r \geq \alpha\rho + 1$, то функция $xf(x)$ убывает к нулю на $(0,+\infty)$. Поэтому последовательность $\lambda_k = kf(k)$, $k \in \mathbb{N}$, монотонно убывает к нулю. В силу примера 2.1 (ii) равенство (2.2) справедливо при $n = 1$. Первое утверждение в теореме 3.3 доказано.

2) Если $\beta = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$, то

$$(-1)^p K(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - (1 + k^\alpha \delta\gamma) h(k^\alpha \delta))}{k^r} \cos kt = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cos kt. \quad (5.6)$$

Здесь $\mu_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}$, где $f(x) = 2\delta^\rho \lambda_{\rho,\gamma}(x^\alpha \delta) x^{\alpha\rho - r}$, $x > 0$. Если $\alpha \in (0,1]$ и $r \geq \alpha\rho + 1$, то функция $xf(x)$, монотонно убывает к нулю и выпукла вниз. Поэтому последовательность $k\mu_k$, $k \in \mathbb{N}$, монотонно убывает к нулю и выпукла вниз. В силу примера 2.2 (iii) равенство (2.3) справедливо при $n = 1$. Если $\alpha > 1$ и $r \geq \alpha\rho + 2$, то функция $x^2 f(x)$, монотонно убывает к нулю. Поэтому последовательность $k^2\mu_k$, $k \in \mathbb{N}$, монотонно убывает и неотрицательна. В силу примера 2.2 (ii) равенство (2.3) справедливо при $n = 1$.

Если $\alpha \in (0,1]$ и $r \geq \alpha\rho$, то функция $f(x) = 2\delta^\rho \lambda_{\rho,\gamma}(x^\alpha \delta) x^{\alpha\rho - r}$ убывает к нулю и выпукла вниз на $(0,+\infty)$ (см. лемму 4.1). Поэтому последовательность $\mu_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}$, монотонно убывает к нулю и выпукла вниз. Если дополнительно $h \in M_3$ и $\gamma \leq \gamma_2(\rho, h)$, то функция $-\lambda'_{\rho,\gamma}(x)$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$ и, значит, функция $-f'(x)$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$ (см. лемму 4.1). Поэтому $\Delta^3 \mu_k = \int_k^{k+1} (2f'(x+1) - f'(x) - f'(x+2))\, dx \geq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В силу примера 2.2 (**i**) равенство (2.3) справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$. Теорема 3.3 доказана.

5.4. Доказательство теоремы 3.4

Функция $f(x) := (1 + \gamma|t|^\alpha \delta) h(|t|^\alpha \delta)$ является положительно определенной и непрерывной на $\mathbb{R}$. Мы рассматриваем случай (5.5), где $\lambda_k = 2(1 - \nu_k)/k$, $k \in \mathbb{N}$, и $\nu_k = f(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. В силу леммы 2.1 и примера 2.1 (iii) равенство (2.2) справедливо при $n = 1$, $r = 1$ и $r \geq 2$. В случае (5.6), где $\mu_k = 2(1 - \nu_k)/k$, $k \in \mathbb{N}$, и $\nu_k = f(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ из примера 2.2 (iv) получаем, что равенство (2.3) справедливо при $n = 1$, $r = 2$ и $r \geq 3$. Теорема 3.4 доказана.

Литература

[1] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Москва, Наука, 1976.

[2] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Москва, Мир, 1965.

[3] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*, т. 1, Москва, Мир, 1985.

[4] С. М. Никольский, *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем* // Изв. АН СССР, сер. мат., **10** (1946), 207–256.

[5] В. П. Заставный, *Теорема Никольского для ядер, удовлетворяющих более общему условию, чем A_n^** // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины, **20** (2010), 75–85.

[6] V. P. Zastavnyi, *Exact estimation of an approximation of some classes of differentiable functions by convolution operators*, http://arxiv.org/abs/1003.4973 (2010).

[7] B. Nagy, *Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen* // Ber. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-phys. Kl., **90** (1938), 103–134.

[8] P. Pych, *Approximation of function in L- and C-metrics* // Ann. Soc. Math. Pol., **1** (1967), N 11, 61–76.

[9] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Boston, Dordrecht, London, Kluwer-Springer, 2004.

[10] Н. И. Ахиезер, *Лекции об интегральных преобразованиях*, Харьков, Вища школа, Изд. при Харьк. ун-те, 1984.

[11] R. E. Williamson, *Multiply monotone functions and their Laplace transforms* // Duke Math. J., **23** (1956), 189–207.

[12] В. П. Заставный, *О величинах, связанных с кратно монотонными функциями* // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины, **19** (2009), 94–100.

[13] А. Ф. Тиман, *Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона* // Докл. АН СССР, **74** (1950), N 1, 17–20.

[14] B. Nagy, *Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson* // Acta Math. Acad. Sci Hungar., **1** (1950), 183–188.

[15] К. М. Жигалло, Ю. И. Харкевич, *Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона* // Укр. мат. журн., **54** (2002), N 1, 43–52.

[16] V. P. Zastavnyi, *On positive definiteness of some functions* // Journal of Multivariate Analysis, **73** (2000), 55–81.

[17] Л. И. Баусов, *О приближении функций класса Z_α положительными методами суммирования рядов Фурье* // УМН, **16** (1961), N 3, 143—149.

[18] В. А. Баскаков, *О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля-Пуассона* // Матем. заметки, **17** (1975), N 2, 169–180.

[19] Л. П. Фалалеев, *О приближении функций обобщенными операторами Абеля-Пуассона* // Сиб. мат. журн., **42** (2001), N 4, 926–936.

[20] К. М. Жигалло, Ю. И. Харкевич, *Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона* // Укр. мат. журн., **54** (2002), N 9, 1213–1219.

[21] Л. П. Фалалеев, *Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip 1 от одного сингулярного оператора*, Теоремы вложения и их приложения: Материалы Всесоюз. симп., Алма-Ата: Наука КазССР, 1976, 163–167.

[22] К. М. Жигалло, Ю. И. Харкевич, *Про наближення функцій класу Гельдера бігармонійними інтегралами Пуассона* // Укр. мат. журн., **52** (2000), N 7, 971–974.

[23] Л. В. Малей, *Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона* // Докл. АН БССР. Сер. физ.-техн., **3** (1961), 25–32.

[24] Э. Л. Штарк, *Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip 1 от сингулярного интеграла Абеля–Пуассона* // Матем. заметки, **13** (1973), N 1, 21–28.

[25] В. П. Заставный, *О рядах, возникающих при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона* // Матем. заметки, **86** (2009), N 4, 497–511.

[26] В. П. Заставный, *Асимптотические разложения некоторых рядов и их применения* // Український математичний вісник, **6** (2009), N 4, 553–573.

[27] В. П. Заставный, Р. М. Тригуб, *Положительно определённые сплайны специального вида* // Мат. Сборник, **193** (2002), N 12, 41–68.

[28] B. Nagy, *Függvények megközelitése Fourier-sorok számtani közepeivel* // Math. Fiz. Lapok, **49** (1942), 123–138.

[29] B. Nagy, *Approximation der Funktionen durch die aritchmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen* // Acta Sci. Math., Szeged, **11** (1946), 71–84.

[30] С. А. Теляковский, *О приближении функций средними Чезаро второго порядка* // Analysis Mathematica, **8** (1982), 305–319.

[31] С. А. Теляковский, *О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера* // Укр. мат. журн., **21** (1969), N 3, 334–343.

[32] В. А. Баскаков, С. А. Теляковский, *О приближении дифференцируемых функций суммами Фейера* // Матем. заметки, **32** (1982), N 2, 129—140.

[33] С. М. Никольский, *Оценка остатка сумм Фейера для периодических функций, имеющих ограниченную производную* // Докл. АН СССР, **31** (1941), N 3, 210–214.

[34] С. М. Никольский, *Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами* // Тр. Матем. ин-та АН СССР, **15** (1945), 76 с.

[35] Л. П. Фалалеев, *К 75-летию профессора С. А. Теляковского. О методах Чезаро и Рисса* // Математический журнал, Алматы, **7** (2007), N 4, 82–86.

Сведения об авторах

Виктор П. Заставный

Донецкий национальный университет,
Университетская 24,
Донецк, 34001,
Украина
E-Mail: zastavn@rambler.ru