Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 3, 400 – 408

О группах, все собственные подгруппы которых имеют черниковские коммутанты

Николай Н. Семко, Оксана А. Яровая

(*Представлена И. В. Протасовым*)

Аннотация. Изучены группы, у которых коммутанты всех собственных подгрупп являются черниковскими подгруппами при условии, что они имеют нормальную систему, факторы которой локально ступенчатые.

2010 MSC. 20F19, 20F24, 16P20.

Ключевые слова и фразы. Группы с черниковским коммутантом, локально ступенчатая группа, нормальная система подгрупп, нормальное замыкание, условие минимальности.

Группы, все собственные подгруппы которых имеют некоторое фиксированное свойство ρ, стали предметом изучения очень давно. Эта область теории групп берет свое начало с классических работ Г. Миллера и Х. Морено [1], где были рассмотрены конечные группы, все собственные подгруппы которых абелевы, и О. Ю. Шмидта [2], где были рассмотрены конечные группы, все собственные подгруппы которых нильпотентны. В дальнейшем эта область теории групп развивалась весьма интенсивно как для конечных, так и бесконечных групп. Этой тематике было посвящено большое число работ, где было получено много важных и интересных результатов. В ней работали многие известные математики. Мы не будем делать здесь детального описания основных результатов, это было сделано в некоторых обзорах, например, в обзоре О. Д. Артемовича и Л. А. Курдаченко [3]. Отметим результаты, относящиеся к тематике данной работы. В работах В. М. Беляева и Н. Ф. Сесекина [4, 5] были рассмотрены

Статья поступила в редакцию 28.10.2009

группы, все собственные подгруппы которых имеют конечный коммутант. Поскольку естественным обобщением конечных групп являются черниковские группы, то естественным расширением групп с конечным коммутантом являются группы с черниковским коммутантом. В работе [6] Х. Отал и М. Пенья начали рассматривать группы, в которых все собственные подгруппы имеют черниковские коммутанты. Они показали, что при дополнительном условии локальной ступенчатости всякая такая группа сама имеет черниковский коммутант. Напомним, что группа G называется *локально ступенчатой*, если всякая ее конечно порожденная подгруппа имеет собственную подгруппу конечного индекса. Данная работа посвящена обобщению этого результата. Именно доказана.

Теорема. *Пусть G — группа, все собственные подгруппы которой имеют черниковские коммутанты. Если G имеет нормальную систему, факторы которой локально ступенчатые, то ее коммутант $[G, G]$ является черниковской подгруппой.*

Заметим, что определение нормальной системы введено в классической работе А. Г. Куроша и С. Н. Черникова в 1947 году.

Следствие 1. *Пусть G — группа, все собственные подгруппы которой имеют черниковские коммутанты. Если G имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп, факторы которой локально ступенчатые, то ее коммутант $[G, G]$ является черниковской подгруппой.*

Следствие 2. *Пусть G — группа, все собственные подгруппы которой имеют черниковские коммутанты. Если G имеет убывающий ряд нормальных подгрупп, факторы которой локально ступенчатые, то ее коммутант $[G, G]$ является черниковской подгруппой.*

А. Ю. Ольшанский построил серию экзотических примеров простых бесконечных групп, все собственные подгруппы которых абелевы (см. [7, §28]). Эти примеры показывают, что утверждение теоремы не может быть расширено на произвольные группы, все собственные подгруппы которых имеют черниковский коммутант.

Мы начнем со следующего небольшого обобщения леммы Дицмана.

Лемма 1. *Пусть G — группа и F — ее конечная подгруппа. Если F имеет конечное множество сопряженных, то ее нормальное замыкание F^G конечно.*

Доказательство. Поскольку F имеет конечное множество сопряженных, то ее нормализатор $N_G(F)$ имеет конечный индекс в группе G.

Тогда F — конечная нормальная подгруппа $H = N_G(F)$. Отсюда вытекает, что подгруппа $C_H(\mathrm{x})$ имеет в H конечный индекс для любого элемента $\mathrm{x} \in F$. Так как индекс $|G : H|$ конечен, то конечным будет и индекс $|G : C_G(\mathrm{x})|$ для любого элемента $\mathrm{x} \in F$. Из леммы Дицмана (см., например, [8, лемма II.1.1]) получаем тогда конечность подгруппы $\langle \mathrm{x} \rangle^G$ для любого элемента $\mathrm{x} \in F$. Так как подгруппа F конечна и порождается подгруппами $\langle \mathrm{x} \rangle^G$, $\mathrm{x} \in F$, то отсюда вытекает конечность F^G. $\square$

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Будем писать $\mathfrak{X} = \mathbf{S}\mathfrak{X}$, если всякая подгруппа в каждой $\mathfrak{X}$-группе сама принадлежит классу $\mathfrak{X}$. Будем писать $\mathfrak{X} = \mathbf{Q}\mathfrak{X}$, если всякая фактор-группа каждой $\mathfrak{X}$-группы сама принадлежит классу $\mathfrak{X}$. Будем писать $\mathfrak{X} = \mathbf{N_0}\mathfrak{X}$, если всякая группа, являющаяся произведением конечного множества нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп, сама принадлежит классу $\mathfrak{X}$.

Предложение 1. *Пусть G — группа и H — ее подгруппа. Пусть, далее, $\mathfrak{X}$ — класс групп, удовлетворяющий следующим условиям: $\mathfrak{X} = \mathbf{S}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} = \mathbf{N_0}\mathfrak{X}$ и всякое расширение $\mathfrak{X}$-группы с помощью конечной группы принадлежит классу $\mathfrak{X}$. Если H имеет конечное множество сопряженных, то ее нормальное замыкание H^G принадлежит классу $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Поскольку H имеет конечное множество сопряженных, то ее нормализатор $N_G(H)$ имеет конечный индекс в группе G. Пусть $\{H_0 = H, H_1, \ldots, H_n\}$ — система всех сопряженных с H подгрупп. Тогда и подгруппа $L_j = N_G(Hj)$ имеет в G конечный индекс, $0 \leq j \leq n$. Отметим, что если $H_j = \mathrm{x}^{-1}H\mathrm{x}$, то и

$$L_j = N_G(H_j) = N_G(H^{\mathrm{x}}) = N_G(H)^{\mathrm{x}}, \ 0 \leq j \leq n,$$

так что семейство $\{L_0, L_1, \ldots, L_n\}$ составит класс сопряженных подгрупп. Из конечности индекса $|G : L_j|$, $0 \leq j \leq n$, получаем, что и пересечение $K = \cap_{0 \leq j \leq n} L_j$ имеет в G конечный индекс. Кроме того, подгруппа уже нормальна в группе G. Из включения $K \leq N_G(H_j)$ получаем равенство $H_j^y = H_j$ для любого элемента $y \in K$, $0 \leq j \leq n$. Положим $T_j = H_j \cap K$, тогда

$$T_j^y = (H_j \cap K)^y = H_j^y \cap K^y = H_j \cap K = T_j$$

для любого элемента $y \in K$, $0 \leq j \leq n$. Иначе говоря, подгруппа T_j нормальна в K при любом j, $0 \leq j \leq n$. Так как $\mathfrak{X} = \mathbf{S}\mathfrak{X}$, то $T_j \in \mathfrak{X}$, $0 \leq j \leq n$. Так как $\mathfrak{X} = \mathbf{N_0}\mathfrak{X}$, то $T_1 \cdots T_n \in \mathfrak{X}$. Очевидно, что семейство $\{T_0, T_1, \ldots, T_n\}$ будет классом сопряженных подгрупп.

Поэтому их произведение $T = T_1 \cdots T_n$ является нормальной в G подгруппой.

Имеем теперь $HT/T \cong H/(H \cap T)$. Далее $T_0 = H \cap K \leq H$ и $T_0 \leq T$, так что $T_0 \leq H \cap T$. Поскольку K нормальна в G, то $H \cap K$ нормальна в H. Из изоморфизма $H/(H \cap K) \cong HK/K$ и конечности G/K получаем, что $H \cap K$ имеет конечный индекс в H. Включение $H \cap K \leq H \cap T$ доказывает конечность HT/T. Итак HT/T — конечная подгруппа G/T, имеющая конечное множество сопряженных. Из леммы 1 получаем, что $(HT/T)^{G/T} = H^G T/T$ конечна. Очевидно включение $T \leq H^G$, так что $H^G T = H^G$. Конечность H^G/T и $T \in \mathfrak{X}$ вместе с условиями предложения дают $H^G \in \mathfrak{X}$. $\square$

Следствие 3. *Пусть G — группа и H — ее черниковская подгруппа. Если H имеет конечное множество сопряженных, то ее нормальное замыкание H^G является черниковской подгруппой.*

Очевидно класс черниковских групп удовлетворяет всем условиям предложения 1.

Следствие 4. *Пусть G — группа и H — ее почти полициклическая подгруппа. Если H имеет конечное множество сопряженных, то ее нормальное замыкание H^G является почти полициклической подгруппой.*

Очевидно класс почти полициклических групп удовлетворяет всем условиям предложения 1.

Лемма 2. *Пусть G — почти разрешимая группа. Если всякая собственная подгруппа G имеет черниковский коммутант, то и коммутант всей группы G будет черниковской подгруппой.*

Доказательство. Обозначим через S максимальную нормальную разрешимую подгруппу G. Если $S = G$, то из следствия леммы 2 работы [9] получаем, что коммутант группы G будет черниковской подгруппой. Поэтому допустим, что $S \neq G$. Пусть L/S — произвольная собственная подгруппа G/S. Тогда L — собственная подгруппа G, а потому подгруппа $[L, L]$ будет черниковской. Из конечности индекса $|G : L|$ и того факта, что $[L, L]$ нормальна в L, вытекает конечность индекса $|G : N_G([L, L])|$. Иначе говоря, подгруппа $[L, L]$ имеет в группе G конечное множество сопряженных. Из следствия 3 получаем, что $[L, L]^G$ будет черниковской. Пусть $\mathfrak{M}$ — семейство всех собственных подгрупп G/S. Поскольку G/S конечна, это семейство также конечно. Поэтому конечным будет и семейство $\mathfrak{D} = \{[L, L] | L \geq S$ и $L/S \in \mathfrak{M}\}$. Положим $C =< [L, L]^G | [L, L] \in \mathfrak{D}$. Из доказанного выше вытекает, что замыкание всякой подгруппы из семейства $\mathfrak{D}$ является черниковской подгруппой, поэтому из конечности $\mathfrak{D}$ вытекает, что подгруппа будет черниковской. Далее, $[S,S] \in \mathfrak{D}$, поэтому $[S,S] \leq C$, а значит, $[S,S] \leq S \cap C$. Из изоморфизма $SC/C \cong S/(S \cap C)$ получаем теперь, что SC/C абелева. В частности, если $G = CS$, то все доказано. Поэтому предположим, что $G \neq CS$. Если L/SC — собственная подгруппа G/SC, то L/S — собственная подгруппа G/S. Отсюда вытекает, что $[L,L] \leq C$, в частности, L/SC — абелева подгруппа G/SC. Таким образом, всякая собственная подгруппа G/S является абелевой. Но тогда G/S разрешима (см., например, [10, теорема A.10.7]). Итак, G/C — разрешимая группа. Снова используя лемму 2 работы [9] получаем, что коммутант K/C группы G/C будет черниковской подгруппой. Поскольку C — черниковская подгруппа, то и K будет черниковской. Из очевидного включения $[G,G] \leq K$ получаем, что $[G,G]$ — черниковская подгруппа. $\square$

Следующий результат известен, но поскольку мы не нашли соответствующей ссылки, то приводим его здесь.

Предложение 2. *Пусть G — локально ступенчатая группа. Если G удовлетворяет условию минимальности, то G — черниковская группа.*

Доказательство. Так как G удовлетворяет условию минимальности, то G — периодическая группа. Пусть F — произвольная конечно порожденная подгруппа G. Допустим, что она бесконечна. Будучи конечно порожденной, F включает в себя собственную подгруппу F_1 конечного индекса. Из конечности индекса $|F : F_1|$ вытекает, что подгруппа F_1 также конечно порождена. Поэтому, в свою очередь, F_1 включает в себя собственную подгруппу F_2 конечного индекса. Рассуждая подобным образом, мы построим строго убывающую цепочку подгрупп, что противоречит нашему условию. Полученное противоречие доказывает конечность подгруппы F. Таким образом, G — локально конечная. Но локально конечная группа с условием минимальности является черниковской (см., например, [11, теорема 5.8]). $\square$

Лемма 3. *Пусть G — локально ступенчатая группа, все собственные подгруппы которой имеют черниковские коммутанты. Если подгруппа $[G,G]$ не является черниковской, то G — счетная группа.*

Доказательство. Предположим, что $[G,G]$ не является черниковской подгруппой. Из предложения 2 получаем, что она не удовлетворяет условию минимальности. Но тогда $[G,G]$ имеет строго убывающую систему подгрупп

$$H_1 > H_2 > \cdots > H_n > \cdots .$$

Выберем элементы $\mathrm{x}_1 \in H_1 \backslash H_2$, $\mathrm{x}_2 \in H_2\ H_3, \ldots, \mathrm{x}_n \in H_n \backslash H_{n-1}, \ldots$. Положим теперь $X_n = \langle \mathrm{x}_j |\ j \geq n \rangle$, $n \in N$. Эти подгруппы также составят строго убывающую систему

$$X_1 > X_2 > \cdots > X_n > \cdots .$$

Это означает, что подгруппа $X = X_1$ не является черниковской. Так как каждый элемент x_j принадлежит $[G, G]$, то найдется такое конечное подмножество M_j, что $\mathrm{x}_j \in [T_j, T_j]$, где $T_j = \langle M_j \rangle$, $j \in N$. Положим $T = \langle M_j |\ j \in N \rangle$. Тогда T — счетная подгруппа и $\mathrm{x}_j \in [T, T]$, $j \in N$. Иначе говоря, $X \leq [T, T]$. Отсюда получаем, что $[T, T]$ не является черниковской подгруппой. В свою очередь, это означает, что T не может быть собственной подгруппой. Итак, $T = G$, так что G — счетна. □

Лемма 4. *Пусть G — бесконечная группа, всякая собственная подгруппа которой имеет черниковский коммутант. Предположим, что G имеет такую систему собственных подгрупп*

$$< 1 >= G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n \leq G_{n+1} \leq \cdots ,$$

что $\cup_{n \in N} G_n = G$. Тогда $[G, G]$ — черниковская подгруппа.

Доказательство. Положим $D_n = [G_n, G_n], n \in N$. Поскольку D_n является черниковской подгруппой, D_n имеет максимальную нормальную делимую черниковскую подгруппу K_n, $n \in N$. Из включения $G_n \leq G_{n+1}$ вытекает, очевидно, что $K_n \leq K_{n+1}$, при любом $n \in N$. В свою очередь это влечет за собой тот факт, что $\cup_{n \in N} K_n = K$ — подгруппа группы G. Очевидно эта подгруппа является периодической абелевой и делимой. Если $G = K$, то G — абелева, и все доказано. Поэтому предположим, что — собственная подгруппа. В этом случае она будет делимой черниковской. Все последующие рассмотрения мы будем проводить в фактор-группе G/K. Поэтому, чтобы не вводить новых обозначений, будем считать подгруппу единичной. Как будет видно из последующего доказательства, это не отразится на общности рассуждений.

Наше допущение влечет за собой тот факт, что подгруппа D_n конечна при любом $n \in N$. Из включения $G_n \leq G_{n+1}$ вытекает, очевидно, что $D_n \leq D_{n+1}$, при любом $n \in N$. В свою очередь это влечет за собой тот факт, что $\cup_{n \in N} D_n = D$ — подгруппа группы G. Очевидно эта подгруппа является локально конечной. Если $G \neq D$, то

D — черниковская нормальная подгруппа, фактор-группа по которой — абелева, и все доказано. Поэтому предположим, что $G = D$. Иначе говоря, группа G будет счетной и локально конечной. Если G включает в себя собственную подгруппу конечного индекса, то наше утверждение вытекает из леммы 2. Предположим, что G — простая группа. Из теоремы 4.8 книги [11] и наличия классификации конечных простых групп вытекает, что G не может быть линейной. В этом случае G включает в себя такую подгруппу Y, что центральная фактор-группа $Y/\zeta(Y)$ изоморфна $\mathbf{PSL}_2(K)$ или $\mathbf{Sz}(K)$ для некоторого локально конечного поля K [12]. Однако это противоречит основному результату работы [13]. Полученное противоречие доказывает непростоту группы G.

Итак G включает в себя собственную неединичную нормальную подгруппу A_1. Фактор-группа G/A_1 снова бесконечна и не простая, а потому включает в себя собственную неединичную нормальную подгруппу A_2/A_1, и т.д. Рассуждая таким образом, получим, что G обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп

$$\langle 1\rangle < A_1 < A_2 < \cdots A_\alpha < A_{\alpha+1} < \cdots A_\gamma = G,$$

где γ — счетное предельное порядковое число. Каждая из нормальных подгрупп A_α имеет черниковский коммутант D_a. Обозначим через K_a делимую часть D_α. Поскольку K_α порождается конечными G-инвариантными подгруппами, а группа G не имеет собственных подгрупп конечного индекса, то $K_a \leq \zeta(G)$ для любого $\alpha < \gamma$. Фактор-группа D_α/K_α конечна, поэтому $D_\alpha/K_\alpha \leq \zeta(G/K_\alpha)$ для любого $\alpha < \gamma$. Отсюда вытекает, что второй гиперцентр группы G включает в себя $[G, G]$, так что G — нильпотентная группа. Остается применить лемму 2 работы [9]. $\square$

Следствие 5. *Пусть G — локально ступенчатая группа, все собственные подгруппы которой имеют черниковские коммутанты. Тогда и ее коммутант $[G, G]$ является черниковской подгруппой.*

Доказательство. Если G конечно порождена, то она включает в себя собственную подгруппу конечного индекса. В этом случае имеется черниковский коммутант, а потому группа G будет почти разрешимой, и мы можем использовать лемму 2. Если же G не имеет конечной системы порождающих элементов, то она будет объединением счетной возрастающей последовательности своих собственных подгрупп, и мы можем использовать лемму 4. $\square$

Доказательство теоремы. Пусть σ — нормальная система группы G, факторы которой локально ступенчатые. Если система σ имеет максимальный элемент $H \neq G$, то фактор-группа G/H будет фактором системы σ, а потому G/H является локально ступенчатой. Это означает, что G/H имеет черниковский коммутант ввиду следствия леммы 4. В частности, G/H — почти разрешимая группа. Так как и имеет черниковский коммутант, то она также почти разрешима. Отсюда получаем, что и вся группа будет почти разрешимой, и можно применить лемму 2. В частности, мы можем допустить, что G не включает в себя собственных подгрупп конечного индекса.

Из только что доказанного получаем, что σ не имеет максимальных элементов. Иначе говоря, для любой подгруппы $L \in \sigma$ в системе σ существует такая подгруппа R, что $L < R$. Пусть L — произвольная подгруппа системы σ. Будучи собственной, она имеет черниковский коммутант $[L, L]$. Из включения $L \leq R$ вытекает, что $[L, L] \leq [R, R]$. Поэтому система подгрупп $\{[L, L] |\, L \in \sigma\}$, как и система σ, будет линейно упорядоченной. Из равенства $G = \cup_{L\in\sigma} L$ вытекает, что $K = \cup_{L\in\sigma}[L, L]$ — нормальная подгруппа, включающая коммутант группы G. Обозначим через $\mathbf{d}(L)$ делимую часть черниковской подгруппы $[L, L]$. Из включения $L \leq R$ вытекает, что $\mathbf{d}(L) \leq \mathbf{d}(R)$. Поэтому система подгрупп $\{\mathbf{d}(L) |\, L \in \sigma\}$, как и система σ, будет линейно упорядоченной. Поэтому $D = \cup_{L\in\sigma}\mathbf{d}(L)$ будет подгруппой G. Поскольку $\mathbf{d}(L)$ порождается конечными G-инвариантными подгруппами, а группа G не имеет собственных подгрупп конечного индекса, то $\mathbf{d}(L) \leq \zeta(G)$ для любой подгруппы $L \in \pm$. Отсюда вытекает, что и $D \leq \zeta(G)$. Отметим, что D будет периодической абелевой делимой подгруппой. В фактор-группе G/D рассмотрим систему $\sigma = \{LD/D |\, L \in \sigma\}$. Так как $\mathbf{d}(L) \leq D$, то $[L, L]/([L, L] \cap D) \cong [L, L]D/D$ — конечна. Снова используя тот факт, что G не имеет собственных подгрупп конечного индекса, получим включение $[L, L]D/D \leq \zeta(G/D)$ для любой подгруппы $L \in \Sigma$. Отсюда вытекает, что второй гиперцентр группы G включает в себя K. Выше отмечалось включение $[G, G] \leq K$, которое показывает, что G — нильпотентная группа. Остается применить лемму 2 работы [9]. □

Литература

[1] G. A. Miller, H. C. Moreno, *Non-abelian groups in which every subgroup is abelian* // Trans. Amer. Math. Soc., **4** (1903), 398–404.

[2] О. Ю. Шмидт, *Группы, все подгруппы которых специальные* // Мат. сб., **31** (1924), 366–372.

[3] О. Артемович, Л. Курдаченко, *Групи, багатi X-пiдгрупами* // Вiсник Львiвського ун-ту, Серiя мех.-мат., **61** (2003), 218–237.

[4] В. В. Беляев, Н. Ф. Сесекин, *О бесконечных группах типа Миллера–Морено* // Acta. Math. Acad. Scient. Hungarical, **26** (1975), N 3–4, 369–376.

[5] В. В. Беляев, *Группы типа Миллера–Морено* // Сиб. матем. ж., **19** (1978), N 3, 509–514.

[6] J. Otal, J. M. Pena, *Groups, in which every proper subgroups is Chernikov–by–nilpotent or nilpotent–by–Chernikov* // Archiv Math., **51** (1988), 193–197 (S. 138).

[7] А. Ю. Ольшанский, *Геометрия определяющих соотношений в группах*, Наука: Москва, 1989, 447 с.

[8] Ю. М. Горчаков, *Группы с конечными классами сопряженных элементов*, Наука: Москва, 1978, 120 с.

[9] О. А. Яровая, *О группах, все собственные подгруппы которых близки к абелевым* // Вiсник Київського унiверситету. Сер. фiз.-мат. наук, **4** (2008), 36–39.

[10] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*. Walter De Gruyter: Berlin, 1992, 891 p.

[11] O. H. Kegel, B. A. F. Wehrfritz, *Locally finite groups*, North Holland: Amsterdam, 1973, 210 p.

[12] G. Shute, *Unions of Chevalley groups* // Abstracts Amer. Math. Soc., **3** (1982), 260.

[13] J. Otal, J. M. Pena, *Infinite locally finite groups of type $PSL(2, K)$ or $Sz(K)$ are not minimal under certain conditions* // Communications Publicacions Matematiques, **32** (1988), 43–47.

Сведения об авторах

Николай Николаевич Семко, Оксана Анатолиевна Яровая

Национальный университет
государственной налоговой
службы Украины,
ул. К. Маркса 31,
Ирпень, Киевская область, 08200
Украина
E-Mail: `n_semko@mail.ru`,
`R_Sazonov@mail.ru`