Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 3, 301 – 330

Существование гладкого интерфейса в эволюционной эллиптической задаче Маскета–Веригина с нелинейным источником

Сергей П. Дегтярев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. В работе изучена двухфазная задача Маскета–Веригина со свободной границей для эллиптических уравнений с нелинейными источниками. С применением параболической регуляризации условия на свободной границе локально по времени доказано существование гладкого решения и гладкой свободной границы.

2010 MSC. 35R35, 35K65.

Ключевые слова и фразы. Свободная граница, задача Маскета–Веригина, классическое решение, гладкий интерфейс.

1. Постановка задачи и основной результат

Настоящая статья посвящена изучению краевой задачи с неизвестной границей, описывающей процесс многомерной нестационарной фильтрации двух флюидов в пористой среде [1–6] в предположении, что плотности этих флюидов практически не зависят от давления и, следовательно, являются постоянными величинами. Именно такова ситуация при рассмотрении, например, процесса фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей (нефть, вода), при вытеснении жидкости силикатным раствором и т.д.

Математической моделью такой задачи является эволюционная задача со свободной границей для эллиптических уравнений.

Трехмерная задача такого рода в отсутствии объемных источников бала рассмотрена в статье [6]. Целью данной работы является обобщить результаты [6] на случай пространства произвольной размерности и учесть влияние нелинейных объемных источников. При этом в данной статье для исследования соответствующей линеаризованной задачи применяется в отличие от [6] метод параболической

Статья поступила в редакцию 10.02.2010

регуляризации условия на свободной границе, заимствованный нами из [7], и применявшийся также к данной задаче в [8, 9].

Отметим, что задача Маскета–Веригина для параболических уравнений была подробно исследована в [10], а также рассмотрена в [11], и, кроме того, с учетом условия Гиббса–Томсона задача Маскета-Веригина для параболических уравнений была рассмотрена в [12–14].

Отметим также, что в случае двух пространственных переменных, то есть при $N = 2$, изучаемая нами задача была рассмотрена в работах [8, 9], причем для ее исследования была применена такая же регуляризация, как и в [7], которую и мы применяем в данной статье. Поэтому в данной работе мы считаем размерность пространства $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющей условию $N \geq 3$, и используем метод работы [15].

Пусть Ω — двусвязная область в $\mathbb{R}^N$ с границей $\partial\Omega = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, где $\Gamma^\pm$ — гладкие замкнутые поверхности без самопересечений, $\Gamma(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, — гладкие замкнутые поверхности без самопересечений, лежащие между $\Gamma^\pm$ и разделяющие область Ω на две двусвязные области $\Omega^\pm_\tau$, причем $\partial\Omega^\pm_\tau = \Gamma(\tau) \cup \Gamma^\pm$ и поверхность $\Gamma(0) \equiv \Gamma$ задана.

В областях $\Omega^\pm_\tau$ рассмотрим следующую краевую задачу для неизвестных функций $u^\pm(y, \tau)$ и неизвестных поверхностей $\Gamma(\tau)$ по условиям

$$L_0 u^\pm \equiv \triangle u^\pm(y, \tau) = f^\pm(u^\pm), \quad y \in \Omega^\pm_\tau, \tag{1.1}$$

$$u^+|_{\Gamma(\tau)} = u^-|_{\Gamma(\tau)}, \tag{1.2}$$

$$a^+(\nabla u^+, \overrightarrow{N})|_{\Sigma_T} = a^-(\nabla u^-, \overrightarrow{N})|_{\Sigma_T} = m\cos(\overrightarrow{N}, \tau), \tag{1.3}$$

$$u^\pm|_{\Gamma^\pm_T} = g^\pm(y, \tau), \tag{1.4}$$

$$\Gamma(0) = \Sigma_T \cap \{t = 0\} = \Gamma, \tag{1.5}$$

$$u^\pm(y, 0) = u^\pm_0(y), \quad y \in \Omega^\pm. \tag{1.6}$$

Здесь $\Omega^\pm$ — области, на которые разбивает Ω начальная поверхность $\Gamma = \Gamma(0)$, $\Gamma^\pm_T = \Gamma^\pm \times [0, T]$, $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$, $f^\pm(u)$, $g^\pm(y, \tau)$, $u^\pm_0(y)$ — заданные функции, $a^\pm$, m — положительные константы, $\Sigma_T = \{(y, \tau) : \tau \in [0, T],\ y \in \Gamma(\tau)\}$ — поверхность в $\mathbb{R}^N \times [0, T]$, $\overrightarrow{N}$ — нормаль к Σ_T в пространстве $\mathbb{R}^N \times [0, T]$, направленная так, что ее проекция на $\{t = \mathrm{const}\}$ направлена в сторону Ω^+_τ.

Отметим, что условие (1.3) может быть представлено также в виде

$$a^+ \frac{\partial u^+}{\partial \overrightarrow{n}(\tau)} = a^- \frac{\partial u^-}{\partial \overrightarrow{n}(\tau)} = -mV_n, \tag{1.7}$$

где V_n — скорость движения поверхности $\Gamma(\tau)$ по нормали $\overrightarrow{n}(\tau)$ к $\Gamma(\tau)$ в пространстве $x \in \mathbb{R}^N$, направленной внутрь Ω^+_τ. Отметим, что $\overrightarrow{n}(0)$ — нормаль к начальной поверхности Γ — мы здесь и ниже обозначаем просто через $\overrightarrow{n}$.

Обозначим $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega_T^{\pm} = \Omega^{\pm} \times (0,T)$. Мы будем использовать стандартные пространства Гельдера $H^l(\overline{\Omega})$ и $H^{l,l/2}(\overline{\Omega_T})$ с нецелым $l > 0$, введенные в [16], с нормой

$$|u|_{\Omega_T}^{(l)} = \sum_{j=0}^{[l]} \sum_{2r+s=j} |D_t^r D_x^s u|^{(0)} + \sum_{2r+s=[l]} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_{x,\Omega_T}^{(l-[l])} + \sum_{0<l-2r-s<2} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_{t,\Omega_T}^{\left(\frac{l-2r-s}{2}\right)},$$

где $|D_t^r D_x^s u|^{(0)} = \max_{\overline{\Omega_T}} |D_t^r D_x^s u|$, $\langle u \rangle_{x,\Omega_T}^{(\alpha)}$ и $\langle u \rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha)}$ — константы Гельдера функции $u\,(x,t)$ по x и по t, соответственно.

Мы будем использовать также следующие пространства Гельдера. Пусть $\alpha, \beta \in (0,1)$. Определим полунорму (см. [17])

$$[u]_{\Omega_T}^{(\alpha,\beta)} = \sup_{(x,t),(y,\tau) \in \overline{\Omega_T}} \frac{|u(x,t) - u(y,t) - u(x,\tau) + u(y,\tau)|}{|x-y|^{\alpha}\,|t-\tau|^{\beta}}, \quad \alpha, \beta \in (0,1).$$

Определим, далее, пространства $E^{k+\alpha}(\overline{\Omega_T})$, $k = 0,1,2,3$, с конечной нормой

$$|u|_{\Omega_T}^{(k+\alpha,\alpha)} = \max_{t\in[0,T]} |u(\cdot,t)|_{\Omega}^{(k+\alpha)} + \sum_{|r|=0}^{k} \langle D_x^r u \rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha)} + \sum_{|r|=0}^{k} [D_x^r u]_{\Omega_T}^{(\alpha,\alpha)}. \tag{1.8}$$

Отметим, что часть слагаемых в определении (1.8) может быть интерполирована через слагаемые более низкого и более высокого порядка, поэтому

$$|u|_{\Omega_T}^{(k+\alpha,\alpha)} \le C\left(\max_{t\in[0,T]} |u(\cdot,t)|_{\Omega}^{(0)} + \langle u \rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha)} + \sum_{|r|=k} [D_x^r u]_{\Omega_T}^{(\alpha,\alpha)} \right). \tag{1.9}$$

Отметим, также, что норма (1.8) эквивалентна норме

$$|u|_{\Omega_T}^{(k+\alpha,\alpha)} \sim \max_{t\in[0,T]} |u(\cdot,t)|_{\Omega}^{(0)} + \langle u \rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha)} + \sum_{|r|=k} \sup_{0<h<1} \left\langle \frac{D_x^r(x,t+h) - D_x^r(x,t)}{h^{\alpha}} \right\rangle_{x,\Omega_T}^{(\alpha)}. \tag{1.10}$$

С использованием локальной параметризации стандартным образом определяются гладкие поверхности из указанных выше классов и соответствующие пространства гладких функций на этих поверхностях.

Определим также пространство $P^{k+\alpha}(\overline{\Gamma_T})$, $k=2,3$, с нормой

$$|u|_{P^{k+\alpha}(\overline{\Gamma_T})} = |u|_{E^{k+\alpha}(\overline{\Gamma_T})} + |u_t|_{E^{1+\alpha}(\overline{\Gamma_T})}. \tag{1.11}$$

Мы делаем следующие предположения о данных задачи (1.1)–(1.6):

$$\Gamma^{\pm}, \Gamma \in H^{4+\alpha}, \quad g^{\pm} \in H^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{2}}(\Gamma^{\pm}_T), \quad u_0^{\pm}(x) \in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega^{\pm}}), \tag{1.12}$$

$$f^{\pm}(u) \in C^3_{loc}(\mathbb{R}^1), \quad (f^{\pm})'(u) \geq \nu > 0. \tag{1.13}$$

Кроме того, в задаче (1.1)–(1.6) предполагаются выполненными условия согласования, которые означают, что

$$u_0^{\pm}|_{\Gamma^{\pm}} = g^{\pm}(y,0), \quad u_0^{+}|_{\Gamma} = u_0^{-}|_{\Gamma}, \quad a^{+}\frac{\partial u_0^{+}}{\partial \overrightarrow{n}}|_{\Gamma} = a^{-}\frac{\partial u_0^{-}}{\partial \overrightarrow{n}}|_{\Gamma}, \tag{1.14}$$

$$\triangle u_0^{\pm}(y) = f^{\pm}(u_0^{\pm}(y)), \quad y \in \overline{\Omega^{\pm}}, \tag{1.15}$$

где $\overrightarrow{n}$ — нормаль к Γ, направленная в сторону Ω^{+}. Отметим, что условие (1.15) является, по существу, предположением на правые части $f^{\pm}(u)$, означающем, что соответствующая граничная задача для уравнения (1.15) разрешима. Мы предполагаем также выполненным условие, смысл которого состоит в невырожденности задачи, а именно

$$\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial \overrightarrow{n}} \geq \nu > 0, \quad \frac{\partial u_0^{+}}{\partial \overrightarrow{n}} - \frac{\partial u_0^{-}}{\partial \overrightarrow{n}} \geq \nu > 0, \quad y \in \Gamma, \tag{1.16}$$

где ν — некоторая положительная постоянная.

Отметим, что всюду ниже мы будем обозначать через C, b, ν, γ все абсолютные константы, либо константы, зависящие только от раз и навсегда зафиксированных данных задачи.

Для того, чтобы сформулировать основной результат, введем параметризацию неизвестной границы с помощью некоторой неизвестной функции [18] и сведем исходную задачу к задаче в фиксированной области. Для этого введем в достаточно малой окрестности $\mathcal{N}$ поверхности Γ координаты (ω, λ), где ω — координаты на поверхности Γ, $\lambda \in R$, $|\lambda| \leq \lambda_0$, так что, если $x \in \mathcal{N}$, то единственным образом

$$x = x_{\Gamma}(\omega) + \lambda \overrightarrow{n}(\omega) = x(\omega, \lambda), \quad |\lambda| \leq \lambda_0, \tag{1.17}$$

где $x_{\Gamma}(\omega) \in \Gamma$, а λ — отклонение точки x от поверхности Γ по нормали $\overrightarrow{n}$ к Γ, направленной, напомним, внутрь Ω^{+}.

Пусть $\rho(\omega,t)$ — достаточно малая функция, определенная на $\Gamma_T = \Gamma\times[0,T]$, $\rho(\omega,0)\equiv 0$. Тогда параметризация

$$x = x_\Gamma(\omega) + \overrightarrow{n}(\omega)\rho(\omega,t)$$

при каждом $t\in[0,T]$ задает некоторую поверхность $\Gamma_\rho(t)$, разделяющую область Ω на две подобласти Ω_ρ^+ и Ω_ρ^-. Обозначим поверхность в $\Omega_T\equiv\Omega\times[0,T]$ через $\Gamma_{\rho,T}\equiv\cup_{t\in[0,T]}\Gamma_\rho(t)\times\{t\}$. Обозначим также через $\Omega^\pm_{\rho,T}$ те области, на которые поверхность $\Gamma_{\rho,T}$ разбивает область Ω_T. Мы предполагаем (и докажем это ниже), что неизвестная поверхность $S_T=\Gamma_{\rho,T}$ с некоторой неизвестной функцией ρ.

Пусть функция $\chi(\lambda)\in C^\infty$ такова, что $\chi(0)=1$, $0\le\chi(\lambda)\le 1$, $\chi(\lambda)\equiv 0$ при $|\lambda|\ge\lambda_0$, $|\chi'|\le 2/\lambda_0$, где λ_0 — число из соотношения (1.17). Пусть, далее, $\rho(\omega,t)$ — функция класса $S^{2+\alpha}(\Gamma_T)$, такая, что $|\rho|\le\lambda_0/4$. Определим отображение $(x,t)\to(y,\tau)$ области Ω_T на саму себя по формуле

$$e_\rho:\begin{cases} y=\begin{cases} x_\Gamma(\omega(x))+\overrightarrow{n}(\omega(x))(\lambda(x)+\chi(\lambda(x))\rho(\omega(x),t)) \\ \qquad\qquad = x+\overrightarrow{n}(\omega(x))\chi(\lambda(x))\rho(\omega,t), & x\in\mathcal{N}, \\ x, & x\notin\mathcal{N}, \end{cases} \\ \tau = t. \end{cases} \tag{1.18}$$

Таким образом, в окрестности $\mathcal{N}$, в которой отображение e_ρ только и отличается от тождественного, пространственные координаты (ω,λ) точек $y=y(x,t)$ и x связаны соотношениями

$$\omega(y)=\omega(x),\quad \lambda(y)=\lambda(x)+\chi(\lambda(x))\rho(\omega(x),t).$$

Легко видеть, что отображение e_ρ взаимно однозначно переводит области $\overline{\Omega_T^\pm}$ на области $\overline{\Omega^\pm_{\rho,T}}$, причем, так как $\rho(\omega,0)\equiv 0$, $e_\rho(x,0)\equiv(x,0)$. Функции $u^\pm$ после замены переменных будем для простоты обозначать тем же символом, то есть

$$u^\pm(x,t)\equiv u^\pm(y,\tau)\circ e_\rho(x,t),$$

причем $u^\pm(x,t)$ определены уже в известных фиксированных областях $\overline{\Omega_T^\pm}$.

Совершая в задаче (1.1)–(1.6) замену переменных $(y,\tau)=e_\rho(x,t)$, приходим к следующей эквивалентной формулировке задачи, но уже в фиксированных областях

$$L_\rho u^\pm\equiv\nabla^2_\rho u^\pm(x,t)=f^\pm(u^\pm),\quad (x,t)\in\Omega_T^\pm, \tag{1.19}$$

$$u^+(x,t) - u^-(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{1.20}$$

$$\rho_t(\omega,t) + a^{\pm} S(\omega,\rho,\nabla_\omega \rho)\frac{\partial u^{\pm}}{\partial \overrightarrow{n}} + a^{\pm}\sum_{i=1}^{N} S_i(\omega,\rho,\nabla_\omega \rho)\frac{\partial u^{\pm}}{\partial \omega_i} = 0,$$

$$(x,t) \in \Gamma_T, \tag{1.21}$$

$$u^{\pm}(x,t) = g^{\pm}(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T^{\pm}, \tag{1.22}$$

$$u^{\pm}(x,0) = u_0^{\pm}(x), \quad x \in \overline{\Omega^{\pm}}, \tag{1.23}$$

где $\nabla_\rho = J_\rho \nabla$, а J_ρ — матрица, обратная и сопряженная к матрице Якоби $\partial y/\partial x$. Здесь также $S(\omega,\rho,\nabla_\omega\rho)$, $S_i(\omega,\rho,\nabla_\omega\rho)$ — гладкие функции своих аргументов, причем

$$S(\omega,0,0) \equiv 1, \quad \frac{\partial S}{\partial \rho_{\omega_i}}(\omega,0,0) \equiv 0, \tag{1.24}$$

а также

$$S_i(\omega,0,0) \equiv 0, \quad i = 1,2,\ldots,N. \tag{1.25}$$

Поясним кратко получение соотношений (1.21) и свойства (1.24), (1.25). Пусть в переменных (y,τ) в окрестности Γ_T

$$\Phi_\rho(y,\tau) \equiv \lambda(y) - \rho(\omega(y),\tau), \tag{1.26}$$

где $\lambda(y), \omega(y)$ — (ω,λ) координаты точки y в окрестности поверхности Γ. Отметим, что вектор $\nabla_{(y,\tau)}\Phi_\rho$ направлен в сторону области $\Omega^+_{\rho,T}$. Таким образом, фигурирующая в условии (1.3) нормаль $\overrightarrow{N}$ равна

$$\overrightarrow{N} = \nabla_{(y,\tau)}\Phi_\rho / |\nabla_{(y,\tau)}\Phi_\rho|. \tag{1.27}$$

Таким образом, условию (1.3) можно придать вид

$$a^{\pm}(\nabla_y \Phi_\rho, \nabla_y u^{\pm}) = m\frac{\partial \Phi_\rho}{\partial \tau} = -m\rho_\tau(\omega(y),\tau). \tag{1.28}$$

Перейдем в соотношении (1.28) к переменным (x,t) в соответствии с заменой $(x,t) = e_\rho(x,t)$, учитывая при этом, что $\Phi_\rho(x,t) \equiv \lambda(x)$ в переменных (x,t) в окрестности Γ, так как $\omega(y) = \omega(x)$ и $\lambda(y) = \lambda(x) + \rho(\omega(x),t)$. Таким образом, соотношение (1.28) примет вид

$$a^{\pm}(J_\rho \nabla_x \lambda(x), J_\rho \nabla_x u^{\pm}) = -m\rho_t(\omega(x),t), \tag{1.29}$$

или

$$a^{\pm}(J_\rho^* J_\rho \nabla_x \lambda(x), \nabla_x u^{\pm}) + m\rho_t(\omega(x),t) = 0. \tag{1.30}$$

Пусть еще $\nabla_x = R\nabla_{(\omega,\lambda)}$, где R — ортогональная матрица Якоби перехода между координатами $x \to (\omega,\lambda)$ в окрестности Γ. Тогда, так как $\nabla_x\lambda(x) = \overrightarrow{n}(\omega(x))$, соотношение (1.30) можно записать в виде

$$a^{\pm}(R^* J_\rho^* J_\rho R\overrightarrow{n}, \nabla_{(\omega,\lambda)}u^{\pm}) + \rho_t(\omega,t) = 0, \tag{1.31}$$

то есть, ввиду гладкости поверхности Γ, и, соответственно, гладкости замены $x \to (\omega,\lambda)$, соотношение (1.31) представляет собой соотношение вида (1.21) с некоторыми гладкими функциями S и S_i, так как

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial\lambda} = \frac{\partial u^{\pm}}{\partial\overrightarrow{n}}.$$

При этом при $\rho = 0$, $\rho_{\omega_i} = 0$ матрица $J_\rho \equiv I$, то есть соотношение (1.31) принимает вид (так как $R^*R = R^{-1}R = I$)

$$a^{\pm}\frac{\partial u^{\pm}}{\partial\overrightarrow{n}} + \rho_t(\omega,t) = 0, \tag{1.32}$$

откуда следуют свойства (1.24), (1.25).

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.12)–(1.15), (1.16). *Тогда существует* $T > 0$ *такое, что задача* (1.19)–(1.23) (*а тем самым и задача* (1.1)–(1.6)) *имеет единственное гладкое решение при* $t \in [0,T]$, *причем*

$$|u^{\pm}|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega_T^{\pm}})} + |\rho|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)} \le C(u_0^{\pm}, g^{\pm}, \Gamma, \Gamma^{\pm}). \tag{1.33}$$

Последующие параграфы статьи посвящены доказательству теоремы 1.1.

2. Линеаризация задачи (1.19)–(1.23)

Для доказательства теоремы 1.1 применим метод работ [6,15], который, по существу, представляет собой разновидность метода Ньютона для решения нелинейных уравнений.

Построим сначала “начальное приближение” к решению нелинейной задачи (1.19)–(1.23). Обозначим через $\sigma(\omega,t)$ такую функцию класса $H^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{2}}(\Gamma_T)$, что

$$\sigma(\omega,0) = \rho(\omega,0) = 0, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t}(\omega,0) = \rho_t(\omega,0) \equiv \rho^{(1)}(\omega) = a^{\pm}\frac{\partial u_0^{\pm}}{\partial\overrightarrow{n}}. \tag{2.1}$$

Продолжим, далее, функции $u_0^\pm$ через поверхность Γ на всю область $\overline{\Omega}$ и построим такие функции $w^\pm(x,t) \in H^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$, что

$$w^\pm(x,0) = u_0^\pm(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial w^\pm}{\partial t}(x,0)|_\Gamma = -\frac{\partial u_0^\pm}{\partial \overrightarrow{n}}(x)|_\Gamma \rho_t(\omega(x),0) = -\frac{\partial u_0^\pm}{\partial \overrightarrow{n}}(x)|_\Gamma \rho^{(1)}(\omega(x)). \tag{2.3}$$

Способ построения таких функций описан в [16]. Отметим, что условие (2.3) приводит к тому, что для сложных функций $w^\pm \circ e_\sigma$ выполнено соотношение

$$\frac{\partial (w^\pm \circ e_\sigma)}{\partial t}(x,0)|_\Gamma = \frac{\partial w^\pm}{\partial t}(x,0) + \frac{\partial w^\pm}{\partial \overrightarrow{n}}(x,0)|_\Gamma \sigma_t(\omega,0) = 0, \tag{2.4}$$

что потребуется нам в дальнейшем и приводит к тому, что в соотношении, например, (2.8) ниже $\partial F_3/\partial t(x,0) = 0$. (Отметим также, что вместо условий (2.3) можно было бы потребовать выполнение одного условия

$$\frac{\partial w^+}{\partial t}(x,0)|_\Gamma - \frac{\partial w^-}{\partial t}(x,0)|_\Gamma = -\Big(\frac{\partial u_0^+}{\partial \overrightarrow{n}}(x)|_\Gamma - \frac{\partial u_0^-}{\partial \overrightarrow{n}}(x)|_\Gamma\Big)\rho^{(1)},$$

что также приводит к нужному результату.)

Заметим теперь, что главной линейной частью отображения $\delta \in P^{2+\alpha}(\Gamma_T) \to w^\pm \circ e_{\sigma+\delta} \in P^{2+\alpha}(\overline{\Omega_T})$ является

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{w^\pm \circ e_{\sigma+\varepsilon\delta} - w^\pm \circ e_\sigma}{\varepsilon} = \Big(\frac{\partial w^\pm}{\partial \lambda} \circ e_\sigma\Big)\chi(\lambda(x))\delta(\omega(x),t) \equiv b^\pm(x,t)\delta,$$

и обозначим

$$\delta(\omega,t) = \rho(\omega,t) - \sigma(\omega,t), \quad v^\pm(x,t) = u^\pm(x,t) - w^\pm \circ e_\sigma - b^\pm\delta. \tag{2.5}$$

Учитывая, что для любой функции $f(x,t)$ выполнено

$$(L_0 f) \circ e_\rho = L_\rho(f \circ e_\rho), \tag{2.6}$$

представим соотношения (1.19)–(1.23) в виде

$$\begin{aligned}
&\triangle v^\pm(x,t) - (f^\pm)'(w^\pm \circ e_\sigma)v^\pm \\
&\qquad = \{(L_0^\pm - L_\sigma^\pm)v^\pm(x,t) + [f^\pm(w^\pm \circ e_\sigma + v^\pm + b^\pm\delta) \\
&\qquad\qquad - (f^\pm)'(w^\pm \circ e_\sigma)(v + b^\pm\delta) - f^\pm(w^\pm \circ e_\sigma)] \\
&\qquad + (f^\pm)'(w^\pm \circ e_\sigma)b^\pm\delta + [f^\pm(w^\pm \circ e_\sigma) - (L_0^\pm w^\pm) \circ e_{\sigma+\delta}]\} \\
&\qquad + \Big\{L_\sigma^\pm\Big(w^\pm \circ e_{\sigma+\delta} - w^\pm \circ e_\sigma - \Big(\frac{\partial w^\pm}{\partial \lambda} \circ e_\sigma\Big)\chi(\lambda)\delta\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- (L^{\pm}_{\sigma+\delta} - L^{\pm}_{\sigma})\Big(v^{\pm} + \Big(\frac{\partial w^{\pm}}{\partial \lambda} \circ e_{\sigma}\Big)\chi\delta\Big) \\
&+ (L^{\pm}_{\sigma+\delta} - L^{\pm}_{\sigma})(w^{\pm} \circ e_{\sigma+\delta} - w^{\pm} \circ e_{\sigma})\Big\} \\
&\equiv F_1^{\pm}(x,t;v^{\pm},\delta) + F_2^{\pm}(x,t;v^{\pm},\delta), \quad (x,t) \in \Omega_T^{\pm}, \quad (2.7)
\end{aligned}
$$

$$
v^+ - v^- + \Big(\frac{\partial w^+}{\partial \overrightarrow{n}} - \frac{\partial w^-}{\partial \overrightarrow{n}}\Big)\circ e_{\sigma}\delta = w^+ \circ e_{\sigma} - w^- \circ e_{\sigma} \equiv F_3(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta_t + a^{\pm}\frac{\partial v^{\pm}}{\partial \overrightarrow{n}} + \sum_{i=1}^{N-1}\Big(a^{\pm}\frac{\partial S_i}{\partial \rho_{\omega_i}}(\omega,\sigma,\nabla_\omega\sigma)\frac{\partial w^{\pm}\circ e_{\sigma}}{\partial \omega_i}\Big)\delta_{\omega_i} \\
&\qquad = \Big\{a^{\pm}[1 - S(\omega,\sigma,\nabla_\omega\sigma)]\frac{\partial v^{\pm}}{\partial \overrightarrow{n}} \\
&- \Big[\sigma_t + a^{\pm}S(\omega,\sigma,\nabla_\omega\sigma)\frac{\partial w^{\pm}\circ e_{\sigma}}{\partial \overrightarrow{n}} + \sum_{i=1}^{N-1} a^{\pm}S_i(\omega,\sigma,\nabla_\omega\sigma)\frac{\partial w^{\pm}\circ e_{\sigma}}{\partial \omega_i}\Big] \\
&- S(\omega,\sigma+\delta,\nabla_\omega\sigma+\nabla_\omega\delta)\frac{\partial^2 w^{\pm}}{\partial \overrightarrow{n}^2}\delta - \sum_{i=1}^{N-1} a^{\pm}S_i(\omega,\sigma,\nabla_\omega\sigma)\frac{\partial v^{\pm}}{\partial \omega_i} \\
&- a^{\pm}\sum_{i=1}^{N-1} a^{\pm}S_i(\omega,\sigma,\nabla_\omega\sigma)\frac{\partial^2 w^{\pm}}{\partial \overrightarrow{n}\partial\omega_i}\delta\Big\} \\
&+ \Big\{-a^{\pm}[S(\omega,\sigma+\delta,\nabla_\omega\sigma+\nabla_\omega\delta) - S(\omega,\sigma,\nabla_\omega\sigma)]\Big[\frac{\partial v^{\pm}}{\partial \overrightarrow{n}} + \frac{\partial^2 w^{\pm}\circ e_{\sigma}}{\partial \overrightarrow{n}^2}\delta - \Big] \\
&- a^{\pm}\sum_{i=1}^{N-1}\Big[S_i(\omega,\sigma+\delta,\nabla_\omega\sigma+\nabla_\omega\delta) \\
&- \sum_{j=1}^{N-1}\frac{\partial S_i}{\partial \rho_{\omega_j}}(\omega,\sigma,\nabla_\omega\sigma)\delta_{\omega_j} - S_i(\omega,\sigma,\nabla_\omega\sigma)\Big] \\
&\times\Big(\frac{\partial v^{\pm}}{\partial \omega_i} + \frac{\partial w^{\pm}\circ e_{\sigma}}{\partial \omega_i} + \frac{\partial^2 w^{\pm}\circ e_{\sigma}}{\partial \overrightarrow{n}\partial\omega_i}\delta\Big) \\
&- \sum_{i,j=1}^{N-1}\frac{\partial S_i}{\partial \rho_{\omega_j}}(\omega,\sigma,\nabla_\omega\sigma)\delta_{\omega_j}\Big(\frac{\partial v^{\pm}}{\partial \omega_i} + \frac{\partial^2 w^{\pm}\circ e_{\sigma}}{\partial \overrightarrow{n}\partial\omega_i}\delta\Big)\Big\} \\
&\qquad \equiv F_4^{\pm}(x,t,v^{\pm},\delta) + F_5^{\pm}(x,t,v^{\pm},\delta), \quad (2.9)
\end{aligned}
$$

$$
v^{\pm}(x,t) = g^{\pm}(x,t) - w^{\pm}\circ e_{\sigma} \equiv F_6^{\pm}(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_T^{\pm}, \tag{2.10}
$$

$$
v^{\pm}(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega^{\pm}}, \quad \delta(\omega,0) = 0, \tag{2.11}
$$

где мы учли, что $\chi(\lambda) \equiv 1$ в окрестности Γ и отображения e_ρ и e_σ являются тождественными отображениями вне некоторой окрестности Γ. Более того, дополнительно к (2.11) из самого способа построения функций $w^\pm$ и σ следует, что на самом деле мы ищем функции $v^\pm$ и δ, такие, что

$$v^\pm \in \dot{E}^{2+\alpha}(\overline{\Omega_T^\pm}), \quad \delta \in \dot{P}^{2+\alpha}(\Gamma_T),$$

где точка над обозначением пространства означает подпространство, состоящее из функций, обращающихся в нуль при $t = 0$ вместе со всеми допускаемыми классом производными по t. Принципиально важно то обстоятельство, что для таких классов с точкой имеют место соотношения, аналогичные классам $\dot{H}^{l,l/2}$, а именно, если $u, v \in \dot{H}^{l,l/2}$, то

$$|u|_{H^{l',l'/2}(\overline{\Omega}_T)} \le CT^{\frac{l-l'}{2}} |u|_{H^{l,l/2}(\overline{\Omega}_T)},$$
$$|u|_{S^{l'}(\overline{\Omega}_T)} \le CT^{\frac{l-l'}{2}} |u|_{S^{l}(\overline{\Omega}_T)},$$
$$l' < l,$$

$$|u|_{E^{2+\alpha'}(\overline{\Omega}_T)} \le CT^{\frac{\alpha-\alpha'}{2}} |u|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)},$$
$$|u|_{P^{2+\alpha'}(\overline{\Omega}_T)} \le CT^{\frac{\alpha-\alpha'}{2}} |u|_{P^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)}$$
$$\alpha' < \alpha,$$

$$|uv|_{H^{l,l/2}(\overline{\Omega}_T)} \le CT^{\frac{l-[l]}{2}} |u|_{H^{l,l/2}(\overline{\Omega}_T)} |v|_{H^{l,l/2}(\overline{\Omega}_T)}. \tag{2.12}$$

Нетрудно видеть, что правые части $F_1 - F_6$ соотношений (2.7)–(2.11) также обращаются в 0 при $t = 0$ и, таким образом, принадлежат классам с точкой.

Смысл соотношений (2.7)–(2.11) состоит в том, что в нелинейных соотношениях (1.19)–(1.23) выделена их главная линейная по $v^\pm$ и δ часть, а все "свободные члены" (обладающие повышенной гладкостью) и "квадратичные" слагаемые отнесены в правую часть. Ввиду этого, используя непосредственно определение функций F_i в правых частях (2.7)–(2.11) и рассматривая каждое слагаемое отдельно в их определении, нетрудно проверить, что справедливо следующее утверждение. Обозначим

$$\mathcal{H} = \dot{E}^{2+\alpha}(\overline{\Omega_T^+}) \times \dot{E}^{2+\alpha}(\overline{\Omega_T^-}) \times \dot{P}^{2+\alpha}(\Gamma_T), \quad \psi = (v^+, v^-, \delta) \in \mathcal{H},$$

$$\|\psi\| = |v^+|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega_T^+})} + |v^-|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega_T^-})} + |\delta|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)} \tag{2.13}$$

и будем рассматривать функции F_i как функции от ψ.

Лемма 2.1. *Пусть* ψ, ψ_1, $\psi_2 \in \mathcal{H}$. *Тогда*

$$\left|F_1^{\pm}(x,t;\psi)\right|_{E^\alpha(\overline{\Omega}_T^{\pm})} \le C(1+\|\psi\|)T^{\alpha/2}, \tag{2.14}$$

$$\left|F_1^{\pm}(x,t;\psi_2)-F_1^{\pm}(x,t;\psi_1)\right|_{E^\alpha(\overline{\Omega}_T^{\pm})} C(\|\psi_i\|)T^{\alpha/2}\left\|\psi_2-\psi_1\right\|, \tag{2.15}$$

$$\left|F_2^{\pm}(x,t;\psi)\right|_{E^\alpha(\overline{\Omega}_T^{\pm})} \le C(\|\psi\|)\left\|\psi\right\|^2, \tag{2.16}$$

$$\left|F_2^{\pm}(x,t;\psi_2)-F_2^{\pm}(x,t;\psi_1)\right|_{E^\alpha(\overline{\Omega}_T^{\pm})} \le C(\|\psi_i\|)(\|\psi_1\|+\|\psi_2\|)\left\|\psi_2-\psi_1\right\|, \tag{2.17}$$

$$\left|F_3^{\pm}(x,t)\right|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_T^{\pm})} \le CT^{\alpha/2}, \tag{2.18}$$

$$\left|F_4^{\pm}(x,t)\right|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_T)} \le CT^{\alpha/2}, \tag{2.19}$$

$$\left|F_4^{\pm}(x,t;\psi_2)-F_4^{\pm}(x,t;\psi_1)\right|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_T)} \le CT^{\alpha/2}\left\|\psi_2-\psi_1\right\|, \tag{2.20}$$

$$\left|F_5^{\pm}(x,t;\psi)\right|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_T)} \le C(\|\psi\|)\left\|\psi\right\|^2, \tag{2.21}$$

$$\left|F_5^{\pm}(x,t;\psi_2)-F_5^{\pm}(x,t;\psi_1)\right|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_T)} \le C(\|\psi_i\|)(\|\psi_1\|+\|\psi_2\|)\left\|\psi_2-\psi_1\right\|, \tag{2.22}$$

$$\left|F_6^{\pm}(x,t)\right|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_T)} \le CT^{\alpha/2}, \tag{2.23}$$

где константы $C(\|\psi_i\|)$ *остаются ограниченными при ограниченных* $\|\psi_i\|$.

Отметим, что при проверке неравенств (2.14)–(2.23) необходимо учитывать также соотношения (1.24), (1.25).

3. Модельная задача, соответствующая задаче (2.7)–(2.11)

В данном параграфе мы рассмотрим простейшую задачу, отражающую существо линейной задачи, задаваемой левыми частями соотношений (2.7)–(2.11). Такая задача получается из задачи (2.7)–(2.11) замораживанием коэффициентов в левых частях (2.7)–(2.11) в какой либо-точке на границе Γ при $t=0$ и локальным распрямлением поверхности Γ. Кроме того, в граничные условия, соответствующие условиям на свободной границе, добавлено регуляризующее слагаемое с малым множителем $\varepsilon > 0$ в том виде, как это сделано в [7–9].

Пусть $\mathbb{R}^N_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}^N : \pm x_N \ge 0\}$, $\mathbb{R}^N_{\pm,T} = \mathbb{R}^N_{\pm} \times [0,T]$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$. Рассмотрим задачу нахождения неизвестных функций $u^{\pm}(x,t)$, заданных на $\mathbb{R}^N_{\pm,\infty} = \mathbb{R}^N_{\pm} \times [0,\infty)$, соответственно, и неизвестной функции $\rho(x',t)$, заданной на $\mathbb{R}^{N-1}_{\infty} = (\mathbb{R}^N \times [0,\infty)) \cap \{x_N = 0\}$ по условиям

$$-\triangle u^{\pm} = f_1^{\pm}(x,t) = f_1^{\pm}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N_{\pm,\infty}, \tag{3.1}$$

$$u^+(x,t) - u^-(x,t) + A\rho(x',t) = f_2(x',t), \quad x_N = 0,\ t \geq 0, \tag{3.2}$$

$$\rho_t(x',t) - \varepsilon\triangle_{x'}\rho + a^\pm \frac{\partial u^\pm}{\partial x_N} + \sum_{i=1}^{N-1} h_i^\pm \rho_{x_i} = f_3^\pm(x',t), \quad x_N = 0,\ t \geq 0, \tag{3.3}$$

$$u^\pm(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N_\pm, \qquad \rho(x',0) = 0. \tag{3.4}$$

Здесь $f_1^\pm$, f_2, $f_3^\pm$ — финитные функции, причем

$$f_1^\pm \in \dot{E}^\alpha(\mathbb{R}^N_{\pm,\infty}), \quad f_2 \in \dot{E}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_\infty), \quad f_3^\pm \in \dot{E}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_\infty), \tag{3.5}$$

$\varepsilon > 0$ — малая фиксированная положительная постоянная, A, $a^\pm$, $h_i^\pm$ — заданные положительные постоянные.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $\varepsilon \in (0,1]$ и выполнении условия (3.5). Тогда для любого финитного решения (u^+, u^-, ρ) задачи (3.1)–(3.4) справедливы оценки*

$$\begin{aligned} |u^+|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^N_{+,T})} + |u^-|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^N_{-,T})} + |\rho|_{P^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)} + \varepsilon|\rho|_{P^{3+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)} \\ \leq C\big(|f_1^+|_{E^\alpha(\mathbb{R}^N_{+,T})} + |f_1^-|_{E^\alpha(\mathbb{R}^N_{-,T})} + |f_2|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)} \\ + |f_3^-|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)} + |f_3^+|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}\big), \end{aligned} \tag{3.6}$$

причем константа C в (3.6) не зависит от ε.

Последующее содержание данного параграфа статьи посвящено доказательству теоремы 3.1. При этом, так как все рассматриваемые функции принадлежат классам с точкой (то есть обращаются в ноль при $t = 0$ вместе со всеми своими производными), мы будем считать все функции продолженными тождественным нулем в область $t < 0$.

Доказательству теоремы 3.1 предпошлем следующую лемму. Рассмотрим следующую краевую задачу в полупространстве $\mathbb{R}^N_{+,T}$ с параметром $\varepsilon > 0$,

$$-\Delta u = f(z,t), \quad (z,t) \in \mathbb{R}^N_{+,T}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z_N}(z',0,t) = F(z',t), \quad (z',t) \in \mathbb{R}^{N-1}_T, \tag{3.8}$$

$$u(z,0) = 0, \quad u(z,t) \in \dot{E}^{2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^N_{+,T}}); \tag{3.9}$$

где $f \in \dot{E}^\alpha(\overline{\mathbb{R}^N_{+,T}})$, $F \in \dot{E}^{1+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^{N-1}_T})$, причем f и F либо финитны по z, либо достаточно быстро убывают на бесконечности.

Лемма 3.1. *Задача* (3.7)–(3.9) *имеет единственное гладкое решение, ограниченное на бесконечности, для которого справедлива оценка*

$$|u|_{E^{2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^N_{+,T}})} \leq C(|f|_{E^\alpha(\overline{\mathbb{R}^N_{+,T}})} + |F|_{E^{1+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^{N-1}_T})}). \tag{3.10}$$

Доказательство. Мы не приводим подробного доказательства этой леммы, так как в случае, когда вместо пространств $E^{k+\alpha}$ используются пространства $H^{k+\alpha}$, доказательство этой леммы хорошо известно и состоит в известных оценках потенциала простого слоя (см., например, [19] и имеющиеся там ссылки). Для того же, чтобы получить утверждение леммы для пространств $E^{k+\alpha}$, достаточно заметить, что функция

$$u_h(x,t) = \frac{u(x,t) - u(x,t-h)}{h^\alpha}, \quad h \in (0,1),$$

удовлетворяет задаче (3.7)–(3.9) с заменой соответствующих функций в правой части уравнения и в граничном условии на функции

$$f_h(x,t) = \frac{f(x,t) - f(x,t-h)}{h^\alpha}, \quad F_h(x,t) = \frac{F(x,t) - F(x,t-h)}{h^\alpha}.$$

При этом, в силу предположений о данных задачи, $f_h \in H^\alpha(\overline{\mathbb{R}^N_{+,T}})$, $F_h \in H^{1+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^{N-1}_T})$ равномерно по t и h. Поэтому

$$\sup_h \max_t |u_h|^{(2+\alpha)} \leq \sup_h \max_t C(|f_h|^{(\alpha)} + |F_h|^{(1+\alpha)}) \\ \leq C(|f|_{E^\alpha(\overline{R^N_{+,T}})} + |F|_{E^{1+\alpha}(\overline{R^{N-1}_T})}),$$

откуда, ввиду определения пространств $E^{k+\alpha}$, следует утверждение леммы. □

Аналогичное утверждение справедливо и для задачи (3.7)–(3.9) с заменой условия Неймана (3.8) на условие Дирихле

$$u(z',0,t) = F(z',t), \quad (z',t) \in \mathbb{R}^{N-1}_T. \tag{3.11}$$

Лемма 3.2. *Пусть в* (3.11) $F \in \dot{E}^{2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^{N-1}_T})$, *причем* F *либо финитна по* z, *либо достаточно быстро убывает на бесконечности. Тогда задача* (3.7), (3.11) (3.9) *имеет единственное гладкое решение, ограниченное на бесконечности, для которого справедлива оценка*

$$|u|_{E^{2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^N_{+,T}})} \leq C(|f|_{E^\alpha(\overline{\mathbb{R}^N_{+,T}})} + |F|_{E^{2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^{N-1}_T})}). \tag{3.12}$$

Доказательство этой леммы идентично доказательству предыдущей.

Леммы 3.1 и 3.2 позволяют не ограничивая общности считать в задаче (3.1)–(3.4) $f_1^{\pm} \equiv 0$, $f_2 \equiv 0$ $f_3^{+} \equiv 0$, так что отличной от нуля являются только функции f_3^{-}.

Применим к задаче (3.1)–(3.4) преобразование Лапласа по переменной t и преобразование Фурье по переменным x', обозначая такое преобразование от функции $f(x',t)$ через $\widetilde{f}(\xi,p)$, то есть

$$\widetilde{f}(\xi,p) = C\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\,dt \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-ix'\xi} f(x,t)\,dx. \tag{3.13}$$

В результате задача (3.1)–(3.4) сведется к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений и примет вид (мы обозначаем $h^{\pm} = (h_1^{\pm}, h_2^{\pm}, \ldots, h_{N-1}^{\pm})$)

$$\frac{d^2\widetilde{u}^{\pm}}{dx_N^2} - \xi^2\widetilde{u}^{\pm} = 0, \quad x_N > 0\ (x_N < 0), \tag{3.14}$$

$$\widetilde{u}^{+} - \widetilde{u}^{-} + A\widetilde{\rho} = 0, \quad x_N = 0, \tag{3.15}$$

$$\widetilde{\rho}(p + \varepsilon\xi^2 - ih^{+}\xi) + a^{+}\frac{d\widetilde{u}^{+}}{dx_N} = 0, \quad x_N = 0, \tag{3.16}$$

$$\widetilde{\rho}(p + \varepsilon\xi^2 - ih^{-}\xi) + a^{-}\frac{d\widetilde{u}^{-}}{dx_N} = \widetilde{f}_3^{-}, \quad x_N = 0, \tag{3.17}$$

причем дополнительным условием к соотношениям (3.14)–(3.17) является условие ограниченности на бесконечности, то есть

$$|\widetilde{u}^{\pm}| \le C, \quad x_N \to \pm\infty. \tag{3.18}$$

Из уравнения (3.14) с учетом условия (3.18) следует, что

$$\widetilde{u}^{+}(\xi,p,x_N) = \widetilde{g}^{+}(\xi,p)e^{-x_N|\xi|}, \tag{3.19}$$

$$\widetilde{u}^{-}(\xi,p,x_N) = \widetilde{g}^{-}(\xi,p)e^{x_N|\xi|}, \tag{3.20}$$

где $\widetilde{g}^{\pm}(\xi,p) = \widetilde{u}^{\pm}|_{x_N=0}$ — некоторые функции.

Подставляя эти выражения в (3.16) и (3.17), находим, что

$$\widetilde{\rho}(p + \varepsilon\xi^2 - ih^{+}\xi) - a^{+}\widetilde{g}^{+}|\xi| = 0, \tag{3.21}$$

$$\widetilde{\rho}(p + \varepsilon\xi^2 - ih^{-}\xi) + a^{-}\widetilde{g}^{-}|\xi| = \widetilde{f}_3^{-}, \tag{3.22}$$

Деля соотношение (3.21) на a^+, а соотношение (3.22) — на a^-, и складывая эти равенства, с учетом соотношения (3.15), получаем

$$\widetilde{\rho}\Big[\Big(\frac{1}{a^+}+\frac{1}{a^-}\Big)p - i\Big(\frac{h^+}{a^+}+\frac{h^-}{a^-}\Big)\xi + \varepsilon\Big(\frac{1}{a^+}+\frac{1}{a^-}\Big)\xi^2 + A|\xi|\Big] = \widetilde{f_3^-}/a^-$$

или

$$\widetilde{\rho} = \frac{\widetilde{f}}{p - iH\xi + \varepsilon\xi^2 + B|\xi|}, \tag{3.23}$$

где

$$\widetilde{f} = \widetilde{f_3^-}/\Big[a^-\Big(\frac{1}{a^+}+\frac{1}{a^-}\Big)\Big], \quad H = \Big(\frac{h^+}{a^+}+\frac{h^-}{a^-}\Big)/\Big(\frac{1}{a^+}+\frac{1}{a^-}\Big),$$

$$B = A/\Big(\frac{1}{a^+}+\frac{1}{a^-}\Big),$$

причем, очевидно,

$$|f|_{E^{1+\alpha}(R_T^{N-1})} = C|f_3^-|_{E^{1+\alpha}(R_T^{N-1})}. \tag{3.24}$$

Таким образом (3.23) дает выражение для неизвестной функции $\widetilde{\rho}$ в терминах преобразования Фурье–Лапласа.

Заметим, что при $\mathrm{Re}(p) > 0$ выражение в знаменателе в (3.23) не обращается в нуль. Совершая в (3.23) обратное преобразование Лапласа–Фурье, получаем

$$\rho(x',t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} K_\varepsilon(x'-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{3.25}$$

где $K_\varepsilon(x,t)$ — обратное преобразование Лапласа–Фурье от функции $(p - iH\xi + \varepsilon\xi^2 + B|\xi|)^{-1}$, то есть $(a > 0)$

$$K_\varepsilon(x',t) = C \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{ix'\xi}\, d\xi \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{dp}{p - iH\xi + \varepsilon\xi^2 + B|\xi|}. \tag{3.26}$$

Обратное преобразование Лапласа от функции $(p - iH\xi + \varepsilon\xi^2 + B|\xi|)^{-1}$, как нетрудно вычислить, равно

$$\widehat{K_\varepsilon}(\xi,t) = e^{iH\xi t - \varepsilon\xi^2 t - B|\xi| t}, \tag{3.27}$$

где символом $\widehat{v}$ мы будем обозначать преобразование Фурье от функции v. Таким образом,

$$\rho(x',t) = C\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{ix'\xi}e^{iH\xi\tau}e^{-\varepsilon\xi^2\tau}e^{-B|\xi|\tau}\widehat{f}(\xi,t-\tau)\,d\xi$$
$$= C\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{i(x'+H\tau)\xi}e^{-\varepsilon\xi^2\tau}e^{-B|\xi|\tau}\widehat{f}(\xi,t-\tau)\,d\xi$$
$$= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{N-1}} K_\varepsilon(y,\tau)f(x'+H\tau-y,t-\tau)\,dy, \tag{3.28}$$

где
$$K_\varepsilon(x',t) = C\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{ix'\xi}e^{-\varepsilon\xi^2 t}e^{-B|\xi|t}\,d\xi \text{ —} \tag{3.29}$$

обратное преобразование Фурье от функции $e^{-\varepsilon\xi^2 t}e^{-B|\xi|t}$.

Ввиду хорошо известных свойств преобразования Фурье

$$K_\varepsilon(x',t) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Gamma_\varepsilon(x'-y,t)G(y,t)\,dy = \Gamma_\varepsilon *_x G, \tag{3.30}$$

где, как известно,

$$\Gamma_\varepsilon(x',t) = C(\varepsilon t)^{-\frac{N-1}{2}}e^{-\frac{(x')^2}{4\varepsilon t}} \text{ —} \tag{3.31}$$

обратное преобразование Фурье от функции $e^{-\varepsilon\xi^2 t}$ (являющееся фундаментальным решением уравнения теплопроводности с коэффициентом ε), а $G(x',t)$ — обратное преобразование Фурье от функции $e^{-B|\xi|t}$.

Функцию $G(x',t)$ можно выразить явно. Проще всего заметить для этого, что решение $V(z)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве $\{z_N \ge 0\} \subset \mathbb{R}^N$ может быть выражено в виде (соответствующая функция Грина, как известно, легко строится методом отражения)

$$V(z) = C\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{z_N}{[(z'-\eta)^2+z_N^2]^{\frac{N}{2}}}\varphi(\eta)\,d\eta, \tag{3.32}$$

где $\varphi(z') = V(z',0)$, $z' = (z_1,\ldots,z_{N-1})$. С другой стороны, такая задача Дирихле в полупространстве может быть решена методом преобразования Фурье по переменным z', что, как нетрудно проверить, дает
$$\widehat{V}(\xi,z_N) = C\widehat{\varphi}(\xi)e^{-z_N|\xi|}. \tag{3.33}$$

Сравнивая (3.33) и (3.32) заключаем, что обратное преобразование Фурье от функции $e^{-z_N|\xi|}$ равно $Cz_N/(z'^2+z_N^2)^{N/2}$, то есть, заменяя z_N на Bt,

$$G(x',t)=C\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{ix'\xi}e^{-B|\xi|t}\,d\xi=C\frac{t}{(x'^2+B^2t^2)^{\frac{N}{2}}},\quad x'\in\mathbb{R}^{N-1}. \tag{3.34}$$

Ввиду известных свойств функции $\Gamma_\varepsilon(x',t)$ и явного вида $G(x',t)$ в (3.34), можно проверить, что ядро $K_\varepsilon(x',t)$ обладает свойствами (аналогичными $\Gamma_\varepsilon(x',t)$):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} D_x^rD_t^sK_\varepsilon(y,t)\,dy=\begin{cases}1, & |r|+s=0,\\ 0, & |r|+s>0.\end{cases} \tag{3.35}$$

Кроме того, при любом $\varepsilon\in(0,1]$ производные ядра $K_\varepsilon(x',t)$ обладают свойствами, наследующими свойства ядра $G(x',t)$ в (3.34). А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.3. *Для функции $K_\varepsilon(x',t)$ и ее производных по x выполнены оценки*

$$|D_x^rK_\varepsilon(x',t)|\le C(x'^2+t^2)^{-\frac{N-1}{2}-|r|},\quad |r|=0,1,2, \tag{3.36}$$

где константа C не зависит от ε.

Доказательство. Из представления (3.34) легко видно, что для функции $G(x',t)$ справедливы оценки

$$|D_x^rG(x',t)|\le Ct((x')^2+t^2)^{-\frac{N}{2}-|r|}\le C((x')^2+t^2)^{-\frac{N-1}{2}-|r|},\quad |r|=0,1,2. \tag{3.37}$$

Рассмотрим для простоты только случай $|r|=1$ так как остальные случаи рассматриваются вполне аналогично. Пусть $i=\overline{1,N-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}K_{\varepsilon x_i}(x',t)&=\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}\Gamma_\varepsilon(y,t)G_{x_i}(x'-y,t)\,dy\\&=\int\limits_{|x'-y|\ge|x'|/2}\Gamma_\varepsilon(y,t)G_{x_i}(x'-y,t)\,dy\\&\quad+\int\limits_{|x'-y|<|x'|/2}\Gamma_\varepsilon(y,t)G_{x_i}(x'-y,t)\,dy\\&\equiv A_1+A_2.\end{aligned} \tag{3.38}$$

На множестве $|x'-y| \geq |x'|/2$ для функции $G_{x_i}(x'-y,t)$ ввиду (3.34) справедлива оценка

$$|G_{x_i}(x'-y,t)| \leq C(x^{'2}+t^2)^{-\frac{N}{2}}.$$

Поэтому

$$|A_1| \leq (x^{'2}+t^2)^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \Gamma_\varepsilon(y,t)\,dy = (x^{'2}+t^2)^{-\frac{N}{2}}. \tag{3.39}$$

Переходя к оценке A_2 заметим, что на множестве $|x'-y| < |x'|/2$ величины $|y|$ и $|x'|$ эквивалентны, и поэтому на этом множестве с некоторым $\gamma > 0$ выполнено

$$e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon t}} \leq e^{-\gamma\frac{x^{'2}}{\varepsilon t}}. \tag{3.40}$$

Далее, рассмотрим два случая. Пусть сначала $t \geq |x'|$. Тогда, оценивая $|G_{x_i}| \leq Ct^{-N}$, имеем

$$\begin{aligned}|A_2| &\leq C(\varepsilon t)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\gamma\frac{x^{'2}}{\varepsilon t}} \operatorname{mes}\{|x'-y| < |x'|/2\} t^{-N} \\ &= C\Big(\frac{x'^2}{\varepsilon t}\Big)^{\frac{N-1}{2}} e^{-\gamma\frac{x^{'2}}{\varepsilon t}} t^{-N} \leq Ct^{-N} \leq C(x^{'2}+t^2)^{-\frac{N}{2}},\end{aligned} \tag{3.41}$$

так как $t \geq |x'|$.

Если же $t < |x'|$, то, применяя интегрирование по частям, представим A_2 следующим образом:

$$\begin{aligned}A_2 = -\int\limits_{|x'-y|<|x'|/2} &\Gamma_\varepsilon(y,t) G_{y_i}(x'-y,t)\,dy \\ &= -\int\limits_{|y-x'|=\frac{1}{2}|x'|} \Gamma_\varepsilon(y,t) G(x'-y,t)\,dS_y \\ &\qquad + \int\limits_{|y-x'|<\frac{1}{2}|x'|} \Gamma_{\varepsilon y_i}(y,t) G(x'-y,t) \equiv I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Для I_1, так как $|x'-y| = |x'|/2$, в силу (3.37) и (3.40) имеем

$$\begin{aligned}|I_1| &\leq C(\varepsilon t)^{-\frac{N-1}{2}} e^{-\gamma\frac{x'^2}{\varepsilon t}} \left|x'\right|^{N-2} (x'^2+t^2)^{-\frac{N-1}{2}} \\ &\leq C\left|x'\right|^{-1} (x'^2+t^2)^{-\frac{N-1}{2}} \leq C(x'^2+t^2)^{-\frac{N}{2}},\end{aligned} \tag{3.42}$$

так как $t \le |x'|$.

Аналогично для I_2, ввиду свойств функции $\Gamma_{\varepsilon y_i}$ и (3.40) имеем

$$|I_2| \le C(\varepsilon t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\gamma \frac{x'^2}{\varepsilon t}} \int\limits_{|y-x'|<\frac{1}{2}|x'|} \frac{t\,dy}{\left[\,(x'-y)^2+t^2\right]^{\frac{N}{2}}}.$$

Совершая в последнем интеграле замену $x'-y=tz$, $dy=t^{N-1}dz$, имеем

$$|I_2| \le C(\varepsilon t)^{-\frac{N}{2}} e^{-\gamma \frac{x'^2}{\varepsilon t}} t^N t^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{t\,dy}{(z^2+1)^{\frac{N}{2}}}$$
$$\le C\Big(\frac{x'^2}{\varepsilon t}\Big)^N e^{-\gamma \frac{x'^2}{\varepsilon t}} \left|x'\right|^{-N} \le C\left|x'\right|^{-N} \le C(x'^2+t^2)^{-\frac{N}{2}}. \quad (3.43)$$

Таким образом, из оценок (3.43), (3.42), (3.41) и (3.39) следует оценка (3.36) леммы для случая $|r|=1$.

Остальные оценки доказываются аналогично. □

В силу свойств (3.35) и (3.36) полностью аналогично тому, как это сделано в [19, гл. III], получается оценка гладкости потенциала (3.28) по переменной x':

$$\max_t |\rho(\cdot,t)|^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}^{N-1}_T} \le C \max_t |f|^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^{N-1}_T}. \quad (3.44)$$

Заметим теперь, что аналогично тому, как это делалось выше при доказательстве леммы 3.1, рассмотрим функции

$$\rho_h = \frac{\rho(x',t)-\rho(x',t-h)}{h^\alpha}, \quad u_h^\pm = \frac{u^\pm(x',t)-u^\pm(x',t-h)}{h^\alpha}.$$

Эти функции удовлетворяют той же задаче (3.1)–(3.4) с соответствующими правыми частями. Поэтому, полностью повторяя все предыдущие рассуждения, видим, что функция $\rho_h(x',t)$ является потенциалом (3.28) с плотностью

$$f_h = \frac{f(x',t)-f(x',t-h)}{h^\alpha}$$

вместо f. Таким образом, из (3.44) следует, что

$$|\rho|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)} \le C \sup_{t,h} |f_h|^{(1+\alpha)_{\mathbb{R}^{N-1}}} \le C|f|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}. \quad (3.45)$$

Представим теперь соотношение (3.23) в виде

$$\rho_t - \varepsilon \triangle_{x'}\rho - B\triangle_{x'}(\Lambda\rho) + \sum_{i=1}^N H_i \rho_{x_i} = f(x',t)$$

или

$$\rho_t-\varepsilon\triangle_{x'}\rho=F(x',t)\equiv f+B\triangle_{x'}(\Lambda\rho)-\sum_{i=1}^{N}H_i\rho_{x_i}, \tag{3.46}$$

где $\Lambda\rho$ оператор с символом $|\xi|^{-1}$, то есть $\Lambda:\ \widetilde{\rho}\to\widetilde{\rho}/|\xi|$. Как хорошо известно (см., например, [20])

$$\Lambda\rho(x',t)=C\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}}\frac{\rho(y,t)}{|x'-y|^{N-2}}\,dy,$$

причем, аналогично стандартным пространствам Гельдера по x',

$$|\Lambda\rho|_{E^{k+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}\le C|\rho|_{E^{k-1+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)},\quad k=1,2,3. \tag{3.47}$$

Таким образом, из (3.47), (3.46) и (3.45) следует, что

$$|F|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}\le C(|\rho|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}+|f|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)})\le C|f|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}. \tag{3.48}$$

Учитывая, что $f(x',0)=0$ и $\rho(x',0)=\rho_t(x',0)=0$, из уравнения (3.46) полностью аналогично [16, гл. IV], получаем, что

$$\varepsilon\left\langle D^3_x\rho\right\rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^{N-1}_T}\le C\left\langle D_xF\right\rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^{N-1}_T}, \tag{3.49}$$

а также, рассматривая функцию $\rho_h=(\rho(x',t)-\rho(x',t-h))/h^\alpha$,

$$\varepsilon\left[D^3_x\rho\right]^{(\alpha)}_{x,t,\mathbb{R}^{N-1}_T}\le C\left[D_xF\right]^{(\alpha)}_{x,t,\mathbb{R}^{N-1}_T}. \tag{3.50}$$

А тогда из уравнения (3.46) следует, что

$$\left\langle D_x\rho_t\right\rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^{N-1}_T}+\left[D_x\rho_t\right]^{(\alpha)}_{x,t,\mathbb{R}^{N-1}_T}\le C\big(\left\langle D_xF\right\rangle^{(\alpha)}_{x,\mathbb{R}^{N-1}_T}+\left[D_xF\right]^{(\alpha)}_{x,t,\mathbb{R}^{N-1}_T}\big). \tag{3.51}$$

В силу финитности функции $\rho(x',t)$ из соотношений (3.49)–(3.51) с учетом (3.48) следует, что

$$|\rho|_{E^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}+\varepsilon\,|\rho|_{E^{3+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}+|\rho_t|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}\le C\,|f|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}, \tag{3.52}$$

где константа C не зависит от ε, то есть

$$|\rho|_{P^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}+\varepsilon\,|\rho|_{P^{3+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}\le C\,|f|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{N-1}_T)}, \tag{3.53}$$

что дает нужную оценку для функции $\rho(x',t)$.

Теперь, когда оценка функции $\rho(x',t)$ получена, мы можем рассмотреть функции $u^{\pm}(x,t)$ как решения задач Неймана в соответствующих областях с условием

$$a^{\pm}\frac{\partial u^{\pm}}{\partial x_N}\Big|_{x_N=0} = F_1^{\pm} = f_3^{\pm} - \rho_t + \varepsilon\Delta_{x'}\rho - h^{\pm}\nabla\rho, \qquad (3.54)$$

причем $F_1^{\pm}$ финитны и, в силу (3.53),

$$\left|F_1^{\pm}\right|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T^{N-1})} \le C\left|f\right|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T^{N-1})}. \qquad (3.55)$$

Но тогда из леммы 3.1 следует, что

$$\left|u^{\pm}\right|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T^{N-1})} \le C\left|f\right|_{E^{1+\alpha}(\mathbb{R}_T^{N-1})}. \qquad (3.56)$$

Оценка (3.56) вместе с оценкой (3.53) завершают доказательство теоремы 3.1. □

4. Линейная задача в области Ω_T

В этом параграфе мы докажем разрешимость линейной задачи, соответствующей задаче (2.7)–(2.11) с заданными правыми частями из соответствующих классов. При этом мы регуляризуем граничное условие на поверхности Γ так же, как это делалось в [7–9].

Рассмотрим задачу определения неизвестных функций $u^{\pm}(x,t)$, определенных в областях $\overline{\Omega}_T^{\pm}$ соответственно, и неизвестной функции $\rho(x,t)$, определенной на поверхности Γ_T по условиям

$$-\triangle u^{\pm} + b^{\pm}(x,t)u^{\pm} = f_1^{\pm}, \quad (x,t)\in\Omega_T^{\pm}, \qquad (4.1)$$

$$u^{+} - u^{-} + A(x,t)\rho = f_2, \quad (x,t)\in\Gamma_T, \qquad (4.2)$$

$$\rho_t - \varepsilon\triangle_\Gamma\rho + a^{\pm}\frac{\partial u^{\pm}}{\partial\overrightarrow{n}} + \sum_{i=1}^{N-1} h_i^{\pm}(x,t)\rho_{\omega_i} = f_3^{\pm}, \quad (x,t)\in\Gamma_T, \qquad (4.3)$$

$$u^{\pm}(x,0) = 0, \quad \rho(x,0) = 0, \qquad (4.4)$$

$$u^{\pm}(x,t) = f_4^{\pm}, \quad (x,t)\in\Gamma_T^{\pm}, \qquad (4.5)$$

где $\triangle_\Gamma$ — оператор Лапласа на поверхности Γ (см., например, [7]), $a^{\pm} = \mathrm{const} > 0$, $b^{\pm}(x,t)\in E^{\alpha}(\overline{\Omega}_T^{\pm})$, $A(x,t)\in E^{2+\alpha}(\Gamma_T)$, $h_i^{\pm}(x,t)\in E^{1+\alpha}(\Gamma_T)$ и выполнены условия $\nu \le A(x,t) \le C$, $b^{\pm}(x,t) \ge \nu > 0$. Правые части f_i в соотношениях (4.1)–(4.5) предполагаются такими, что конечны величины

$$\mathcal{M}_T^{\pm} \equiv |f_1^{\pm}|_{E^{\alpha}(\overline{\Omega}_T^{\pm})} + |f_2|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_T)} + |f_3^{\pm}|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_T)} + |f_4^{\pm}|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_T^{\pm})} < \infty,$$

$$\mathcal{M}_T \equiv \mathcal{M}_T^+ + \mathcal{M}_T^-, \tag{4.6}$$

причем

$$f_1^\pm(x,0) = 0, \quad f_2(x,0) = 0, \quad f_3^\pm(x,0) = 0, \quad f_4^\pm(x,0) = 0, \tag{4.7}$$

то есть все функции f_k принадлежат пространствам с точкой вверху.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *При выполнении условий* (4.6), (4.7) *задача* (4.1)–(4.5) *имеет единственное решение при любом $\varepsilon > 0$ из пространства $u^\pm \in \dot{E}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^\pm)$, $\rho \in \dot{P}^{3+\alpha}(\Gamma_T)$, причем справедлива оценка*

$$|u^+|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^+)} + |u^-|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^-)} + |\rho|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)} + \varepsilon|\rho|_{P^{3+\alpha}(\Gamma_T)} \le C_T\mathcal{M}_T, \tag{4.8}$$

где константа C_T в (4.8) *не зависит от $\varepsilon \in (0,1]$.*

При $\varepsilon = 0$ задача (4.1)–(4.5) *имеет единственное решение из пространств $u^\pm \in \dot{E}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^\pm)$, $\rho \in \dot{P}^{2+\alpha}(\Gamma_T)$, причем справедлива оценка* (4.8) *с $\varepsilon = 0$.*

Доказательство. Докажем сначала оценку (4.8), предполагая наличие решения задачи (4.1)–(4.5) из соответствующего класса. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. *При $\varepsilon > 0$ для любого решения задачи* (4.1)–(4.5) *из класса $u^\pm \in \dot{E}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^\pm)$, $\rho \in \dot{P}^{3+\alpha}(\Gamma_T)$ справедлива оценка* (4.8).

Доказательство. С применением стандартной техники оценок Шаудера и опираясь на результаты параграфа 3 о свойствах модельных задач, соответствующих точкам границы Γ, стандартным образом получается следующая априорная оценка решения задачи (4.1)–(4.5):

$$\begin{aligned} &|u^+|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^+)} + |u^-|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^-)} + |\rho|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)} + \varepsilon\,|\rho|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)} \\ &\qquad \le C\mathcal{M}_T + C\big(\langle u^+\rangle^{(\alpha)}_{t,\Omega_T^+} + \langle u^-\rangle^{(\alpha)}_{t,\Omega_T^-}\big) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Отметим, что в то время, как $|u^\pm|^{(0)}_{\Omega_T^\pm} \le CT^\alpha\,\langle u^\pm\rangle^{(\alpha)}_{t,\Omega_T^\pm}$, константы Гельдера $\langle u^+\rangle^{(\alpha)}_{t,\Omega_T^+}$ и $\langle u^-\rangle^{(\alpha)}_{t,\Omega_T^-}$ по переменной t от функций $u^\pm(x,t)$ не могут быть оценены путем интерполяции в пространстве $\dot{E}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^\pm)$. Для оценки этих констант Гельдера рассмотрим функции ($h \in (0,1)$)

$$u_h^\pm = \frac{u^\pm(x,t) - u^\pm(x,t-h)}{h^\alpha}.$$

и оценим их максимум модуля $\left|u_h^{\pm}\right|^{(0)}_{\overline{\Omega}_T^{\pm}}$ равномерно по h. Ввиду того, что $u_h^{\pm} \in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^{\pm})$, $t \in [0,T]$, причем пространство $H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}^{\pm})$ компактно вложено в пространство $L_\infty(\overline{\Omega}^{\pm}) \subset L_2(\overline{\Omega}^{\pm})$, мы имеем для любого $\delta > 0$, $t \in [0,T]$, неравенство (см. [21, гл. I])

$$\left|u_h^{\pm}\right|^{(0)}_{\overline{\Omega}^{\pm}} \le \delta \left|u_h^{\pm}\right|^{(2+\alpha)}_{\overline{\Omega}^{\pm}} + C_\delta \left\|u_h^{\pm}\right\|_{2,\overline{\Omega}^{\pm}}, \tag{4.10}$$

где $\left\|u_h^{\pm}\right\|_{2,\overline{\Omega}^{\pm}}$ — L_2-норма функций $u_h^{\pm}$. Из (4.10) следует, что

$$\left|u_h^{\pm}\right|^{(0)}_{\overline{\Omega}_T^{\pm}} \le \delta \left|u^{\pm}\right|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^{\pm})} + C_\delta \max_{t\in[0,T]} \left\|u_h^{\pm}\right\|_{2,\overline{\Omega}^{\pm}}. \tag{4.11}$$

Таким образом, нашей задачей является оценить величину $\max_{t\in[0,T]} \left\|u_h^{\pm}\right\|_{2,\overline{\Omega}^{\pm}}$.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $f_4^{\pm} \equiv 0$, так как эти функции могут быть продолжены внутрь $\overline{\Omega}_T^{\pm}$ с сохранением класса, и затем мы можем рассмотреть новые неизвестные функции $v^{\pm} = u^{\pm} - f_4^{\pm}$, которые удовлетворяют такой же задаче с той же оценкой правых частей. Итак, считая не ограничивая общности $f_4^{\pm} \equiv 0$, и вычитая соотношение (4.3) для знака “$-$” из того же соотношения для знака “$+$”, приходим к задаче для функций $u_h^{\pm}$

$$-\triangle u_h^{\pm} + b^{\pm} u_h^{\pm} = F_1^{\pm} \equiv f_{1h}^{\pm} - b_h^{\pm}\widetilde{u}^{\pm}, \quad (x,t) \in \Omega_T^{\pm}, \tag{4.12}$$

$$u_h^{+} - u_h^{-} = F_2 \equiv -A\rho_h - A_h\widetilde{\rho} + f_{2h}, \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{4.13}$$

$$a^{+}\frac{\partial u_h^{+}}{\partial \overrightarrow{n}} - a^{-}\frac{\partial u_h^{-}}{\partial \overrightarrow{n}} = F_3 \equiv f_{3h}^{+} - f_{3h}^{-} + \overrightarrow{H}\nabla_\omega \rho_h + \overrightarrow{H}_h \nabla_\omega \widetilde{\rho}, \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{4.14}$$

$$u_h^{\pm} = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_T^{\pm}, \tag{4.15}$$

$$u_h^{\pm}(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}^{\pm}, \tag{4.16}$$

где индекс h внизу у обозначения функций означает соответствующее разностное отношение, $\widetilde{u}^{\pm}(x,t) = u^{\pm}(x,t-h)$, $\widetilde{\rho}(x,t) = \rho(x,t-h)$, $\overrightarrow{H} = \{h_i^{+} - h_i^{-}\}$.

Умножим уравнения (4.12) на функции $a^{\pm}u_h^{\pm}$ соответственно и проинтегрируем по частям по областям $\Omega^{\pm}$. С учетом направления нормали $\overrightarrow{n}$ к границе Γ, получим

$$a^{\pm}\int\limits_{\Omega^{\pm}} \left(\nabla u_h^{\pm}\right)^2 dx + a^{\pm}\int\limits_{\Omega^{\pm}} b^{\pm}\left(u_h^{\pm}\right)^2 dx$$

$$\pm\int\limits_{\Gamma} u_h^{\pm}\Big(a^{\pm}\frac{\partial u_h^{\pm}}{\partial\overrightarrow{n}}\Big)\,dS = a^{\pm}\int\limits_{\Omega^{\pm}} u_h^{\pm}F_1^{\pm}\,dx. \quad (4.17)$$

Так как на поверхности Γ выполнено $u_h^+ = u_h^- + F_2$, то соотношению (4.17) для знака $'+'$ можно придать вид

$$a^+\int\limits_{\Omega^+}\left(\nabla u_h^+\right)^2 dx + a^+\int\limits_{\Omega^+} b^+\left(u_h^+\right)^2 dx + \int\limits_{\Gamma} u_h^-\Big(a^+\frac{\partial u_h^+}{\partial\overrightarrow{n}}\Big)\,dS$$
$$= a^+\int\limits_{\Omega^+} u_h^+F_1^+dx - \int\limits_{\Gamma} F_2\Big(a^+\frac{\partial u_h^+}{\partial\overrightarrow{n}}\Big)\,dS. \quad (4.18)$$

Складывая теперь (4.18) с соотношением (4.17) для знака “$-$”, ввиду условия (4.14), получим

$$a^+\int\limits_{\Omega^+}\left(\nabla u_h^+\right)^2 dx + a^-\int\limits_{\Omega^-}\left(\nabla u_h^-\right)^2 dx$$
$$+ a^+\int\limits_{\Omega^+} b^+\left(u_h^+\right)^2 dx + a^-\int\limits_{\Omega^-} b^-\left(u_h^+\right)^2 dx$$
$$= a^+\int\limits_{\Omega^+} u_h^+F_1^+dx + a^-\int\limits_{\Omega^-} u_h^-F_1^-dx$$
$$- \int\limits_{\Gamma} F_2\Big(a^+\frac{\partial u_h^+}{\partial\overrightarrow{n}}\Big)\,dS - \int\limits_{\Gamma} u_h^-F_3\,dS. \quad (4.19)$$

Оценим слагаемые в правой части (4.19) по неравенству Коши с малым параметром $\mu > 0$:

$$\Bigg|\int\limits_{\Omega^{\pm}} u_h^{\pm}F_1^{\pm}\,dx\Bigg| \le \mu^2\left\|u_h^{\pm}\right\|^2_{2,\Omega^{\pm}} + C_\mu\left\|F_1^{\pm}\right\|^2_{2,\Omega^{\pm}}$$
$$\le C\mu^2\left|u^{\pm}\right|^2_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^{\pm})} + C_\mu\Big(\left|F_1^{\pm}\right|^{(0)}_{\Omega_T^{\pm}}\Big)^2, \quad (4.20)$$

$$\Bigg|\int\limits_{\Gamma} F_2\Big(a^+\frac{\partial u_h^+}{\partial\overrightarrow{n}}\Big)\,dS\Bigg| \le \mu^2\Big\|\frac{\partial u_h^+}{\partial\overrightarrow{n}}\Big\|^2_{2,\Gamma} + C_\mu\left\|F_2\right\|^2_{2,\Gamma}$$
$$\le C\mu^2\left|u^+\right|^2_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^+)} + C_\mu\Big(\left|F_2\right|^{(0)}_{\Gamma_T}\Big)^2, \quad (4.21)$$

$$\left| \int\limits_{\Gamma} u_h^- F_3 \, dS \right| \le C\mu^2 \left| u^- \right|^2_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^-)} + C_\mu \big(\left| F_3 \right|^{(0)}_{\Gamma_T} \big)^2. \tag{4.22}$$

Отметим также, что при $T < 1$

$$\left| \widetilde{u}^\pm \right|^{(0)}_{\Omega_T^\pm} \le CT^\alpha \left\langle \widetilde{u}^\pm \right\rangle^{(\alpha)}_{t,\Omega_T^\pm} \le CT^\alpha \left| u^\pm \right|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^\pm)},$$

$$|\widetilde{\rho}|^{(0)}_{\Gamma_T} + |\rho_h|^{(0)}_{\Gamma_T} \le CT^{1-\alpha} \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|^{(0)}_{\Gamma_T} \le CT^{1-\alpha} \left| \rho \right|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)},$$

$$|\nabla \rho_h|^{(0)}_{\Gamma_T} \le C \left\langle \nabla \rho \right\rangle^{(\alpha)}_{t,\Gamma_T} \le CT^{\frac{1}{2}} \left\langle \nabla \rho \right\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\Gamma_T} \le CT^{\frac{1}{2}} \left| \rho \right|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)}.$$

Таким образом, для функций $F_1^\pm$, F_2 и F_3 в (4.12)–(4.16) справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\left| F_1^+ \right|^{(0)}_{\overline{\Omega}_T^+} + \left| F_1^- \right|^{(0)}_{\overline{\Omega}_T^-} + |F_2|^{(0)}_{\Gamma_T} + |F_3|^{(0)}_{\Gamma_T} \\ &\le CT^\lambda \big(\left| u^+ \right|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^+)} + \left| u^- \right|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^-)} + |\rho|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)} \big) + C\mathcal{M}_T \end{aligned} \tag{4.23}$$

с некоторым $\lambda > 0$.

Учитывая, что, в силу условий (4.15), справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega^\pm} \left(u_h^\pm \right)^2 dx \le C \int\limits_{\Omega^\pm} \left(\nabla u_h^\pm \right)^2 dx,$$

из (4.19)–(4.23) получаем

$$\begin{aligned} &\max_{t \in [0,T]} \left\| u_h^\pm \right\|_{2,\Omega^\pm} \\ &\quad \le C(\mu + C_\mu T^\lambda) \big(\left| u^+ \right|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^+)} + \left| u^- \right|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^-)} + |\rho|_{P^{2+\alpha}(\Gamma_T)} \big) \\ &\qquad + C_\mu \mathcal{M}_T. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Выбирая сначала μ, а затем T достаточно малыми, и объединяя оценки (4.24), (4.11), (4.9), получаем, что на некотором интервале $[0, T]$, не зависящем от величины правых частей задачи, справедлива оценка (4.8).

Двигаясь теперь вверх по оси t по шагам, как это сделано в [16, гл. IV], получаем оценку (4.8) на любом конечном интервале времени $[0, T]$.

Тем самым лемма 4.1 и оценка (4.8) доказаны. □

Продолжим доказательство теоремы 4.1. Запишем задачу (4.1)–(4.5) в виде:

$$- \triangle u^{\pm} + b^{\pm}(x,t)u^{\pm} = f_1^{\pm}, \quad (x,t) \in \Omega_T^{\pm}, \tag{4.25}$$

$$u^+ - u^- = -A(x,t)\rho + f_2, \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{4.26}$$

$$a^+ \frac{\partial u^+}{\partial \overrightarrow{n}} - a^- \frac{\partial u^-}{\partial \overrightarrow{n}} = f_3^+ - f_3^- + \overrightarrow{H} \nabla \rho, \quad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{4.27}$$

$$u^{\pm} = f_4^{\pm}, \quad (x,t) \in \Gamma_T^{\pm}, \tag{4.28}$$

$$u^{\pm}(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}^{\pm}, \tag{4.29}$$

$$\rho_t - \varepsilon \triangle_{\Gamma} \rho = f_3^+ - a^+ \frac{\partial u^+}{\partial \overrightarrow{n}} - \sum_i h_i^+ \rho_{\omega_i}, \quad \rho(\omega, 0) = 0. \tag{4.30}$$

Из результатов [22, 23] следует, что при заданной функции $\rho \in E^{2+\alpha}(\Gamma_T)$ в правых частях соотношений (4.25)–(4.28) задача сопряжения (4.25)–(4.28) имеет единственное решение, причем для решения справедлива оценка

$$\left|u^+\right|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^+)} + \left|u^-\right|_{E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^-)} \le C\mathcal{M}_T + C\left|\rho\right|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_T)}, \tag{4.31}$$

так что

$$\left|\nabla u^+\right|_{E^{1+\alpha}(\overline{\Omega}_T^+)} \le C\mathcal{M}_T + C\left|\rho\right|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_T)}. \tag{4.32}$$

Отметим, что результаты [22, 23] касаются пространств $H^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, но переход к пространствам $E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$ осуществляется просто рассмотрением соответствующей задачи для функций $u_h^{\pm} = (u_h^{\pm}(x,t) - u_h^{\pm}(x,t-h))/h^{\alpha}$.

Таким образом, корректно определен оператор $L_\varepsilon : \rho \to L_\varepsilon \rho$, который каждой функции $\rho \in E^{2+\alpha}(\Gamma_T)$, заданной в правых частях соотношений (4.25)–(4.28) и (4.30) ставит в соответствие функцию $L_\varepsilon \rho$ — решение задачи Коши (4.30) с заданными в правой части (4.30) функцией ρ и функцией $\partial u^+/\partial \overrightarrow{n}$, найденной по этой ρ.

Из (4.31), (4.32) и [7] следует, что

$$\begin{aligned} &\left|L_\varepsilon \rho\right|_{P^{3+\alpha}(\Gamma_T)} \\ &\qquad \le C_\varepsilon \big(\left|\nabla u^+\right|_{E^{1+\alpha}(\overline{\Omega}_T^+)} + \left|\nabla \rho\right|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_T)} + \left|f_3^+\right|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_T)} \big) \\ &\qquad\qquad \le C_\varepsilon \big(\left|f_3^+\right|_{E^{1+\alpha}(\Gamma_T)} + \left|\rho\right|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_T)} \big), \end{aligned} \tag{4.33}$$

и, кроме того, для $\rho_1, \rho_2 \in E^{2+\alpha}(\Gamma_T)$

$$\left|L_\varepsilon \rho_2 - L_\varepsilon \rho_1\right|_{P^{3+\alpha}(\Gamma_T)} \le C_\varepsilon \left|\rho_2 - \rho_1\right|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_T)}. \tag{4.34}$$

Из результатов [24–26] об интерполяции в пространствах Гельдера следует, что конечна величина

$$\left[D_x^2\rho\right]_{x,t,\Gamma_T}^{(\alpha,\frac{1}{2}+\alpha)} \le C\,|\rho|_{P^{3+\alpha}(\Gamma_T)}\,. \tag{4.35}$$

Следовательно, так как $\rho(x,0)=0$, $\rho_t(x,0)=0$

$$\left[D_x^2\rho\right]_{x,t,\Gamma_T}^{(\alpha,\alpha)} \le CT^{\frac{1}{2}}\left[D_x^2\rho\right]_{x,t,\Gamma_T}^{(\alpha,\frac{1}{2}+\alpha)} \le CT^{\frac{1}{2}}\,|\rho|_{P^{3+\alpha}(\Gamma_T)}\,. \tag{4.36}$$

Аналогичные неравенства с множителем T^λ справедливы и для других слагаемых в определении нормы ρ в пространстве $E^{2+\alpha}(\Gamma_T)$. Вместе с (4.34) это дает для $\rho_1,\rho_2\in E^{2+\alpha}(\Gamma_T)$:

$$|L_\varepsilon\rho_2 - L_\varepsilon\rho_1|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_T)} \le C_\varepsilon T^\lambda\,|\rho_2-\rho_1|_{E^{2+\alpha}(\Gamma_T)}\,. \tag{4.37}$$

Таким образом, выбирая T достаточно малым, мы видим, что оператор L_ε является сжимающим на $E^{2+\alpha}(\Gamma_T)$, и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку. Вместе с (4.33) это дает решение задачи (4.1)–(4.5) на некотором интервале $[0,T]$, не зависящем от величины правых частей задачи. Двигаясь по оси t вверх, как это сделано в [16, гл. IV], мы получаем решение задачи (4.1)–(4.5) из нужного нам класса на любом конечном интервале времени. Оценка же решения доказана выше в лемме 4.1.

Таким образом, доказано утверждение теоремы для $\varepsilon>0$. Перейдем теперь к пределу при $\varepsilon\to0$. Отметим, что, в силу оценки, (4.8) последовательность $u_\varepsilon^\pm$, ρ_ε компактна в пространствах $E^{2+\beta}(\overline{\Omega}_T^\pm)$ и $P^{2+\beta}(\Gamma_T)$ с любым $\beta<\alpha$. Следовательно, мы можем выделить сходящуюся в этих пространствах подпоследовательность $u_{\varepsilon_n}^\pm\to u^\pm$, $\rho_{\varepsilon_n}\to\rho$, причем функции $u^\pm$ и ρ дают решение задачи (4.1)–(4.5) при $\varepsilon=0$, так как, ввиду имеющейся оценки, возможен предельный переход в каждом из соотношений. Кроме того, предельные функции будут принадлежать тем же пространствам $E^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_T^\pm)$ и $P^{2+\alpha}(\Gamma_T)$, так как, в силу, например, равномерной по ε оценки

$$\left|\frac{D_x^2u_{\varepsilon_n}^+(x+\overrightarrow{l},t)-D_x^2u_{\varepsilon_n}^+(x,t)}{|\overrightarrow{l}|^\alpha}\right| \le C\mathcal{M}_T,$$

мы можем перейти к пределу в этом неравенстве при $\varepsilon_n\to0$ ввиду равномерной сходимости функций $D_x^2u^+$ на $\overline{\Omega}_T^+$, что дает

$$\left\langle D_x^2u_{\varepsilon_n}^+(x,t)\right\rangle_{x,\overline{\Omega}_T^+}^{(\alpha)} \le CM_T.$$

Остальные оценки аналогичны.

Наконец, единственность полученного предельным переходом решения следует непосредственно из оценки (4.8).

Тем самым, теорема 4.1 доказана. □

5. Нелинейная задача: доказательство теоремы 1.1

Доказательство теоремы 1.1 опирается на теорему 4.1 и представление рассматриваемой задачи в виде (2.7)–(2.11). Определим нелинейный оператор $\mathcal{F}(\psi)$, $\psi = (v^+, v^-, \delta)$ в (2.7)–(2.11), который каждому заданному ψ в нелинейных правых частях соотношений (2.7)–(2.11) ставит в соответствие решение линейной задачи, определяемой левыми частями этих соотношений. При этом из теоремы 4.1 и леммы 2.1 следует, что оператор $\mathcal{F}(\psi)$ обладает следующими свойствами на шаре $\mathcal{B}_r = \{\psi : \|\psi\| \leq r\} \subset \mathcal{H}$:

$$\|\mathcal{F}(\psi)\|_{\mathcal{H}} \leq C(T^{\alpha/2} + r)\|\psi\|_{\mathcal{H}}, \tag{5.1}$$

$$\|\mathcal{F}(\psi_1) - \mathcal{F}(\psi_2)\|_{\mathcal{H}} \leq C(T^{\alpha/2} + r)\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.2}$$

Нетрудно видеть, что из соотношений (5.1) и (5.2) следует, что при достаточно малых T и r оператор $\mathcal{F}(\psi)$ отображает замкнутый шар $\mathcal{B}_r$ в себя и является там сжимающим. Единственная неподвижная точка этого оператора и дает решение исходной нелинейной задачи со свободной границей, которой посвящена теорема 1.1. Тем самым теорема 1.1 доказана.

Литература

[1] M. Muskat, *The flow of homogeneous fluids trough porous media*, New York: Mebrane-Hill, 1937, 436 p.

[2] Н. Н. Веригин, *Об одном классе гидромеханических задач для областей с подвижными границами* // Динамика жидкости со свобод. границами, Новосибирск, (1980), 23–33.

[3] И. И. Данилюк, *Нестационарная фильтрация дисперсной системы двух баротропных сред* // Докл. АН УССР, Сер. А, (1985), N 1, 14–18.

[4] И. И. Данилюк, *О совместной нестационарной фильтрации газа и дисперсной системы баротропных сред* // Докл. АН УССР, Сер. А, (1985), N 11, 9–13.

[5] А. М. Мейерманов, *Задача о продвижении поверхности контактного разрыва при фильтрации несмешивающихся сжимаемых жидкостей* // Сиб. мат. журнал, **23** (1982), N 1, 85–103.

[6] В. Н. Гусаков, С. П. Дегтярев, *Существование гладкого решения в одной задаче фильтрации* // Укр. мат. журнал, **41** (1989), N 9, 1192–1198.

[7] А. М. Мейерманов, *О классическом решении многомерной задачи Стефана для квазилинейных параболических уравнений* // Матем. сб., **112(154)** (1980), N 2(6), 170–192.

[8] Fahuai Yi, *Local classical solution of Muskat free boundary problem* // J. Partial Differ. Equatins, **9** (1996), N 1, 84–96.

[9] Fahuai Yi, *Global classical solution of Muskat free boundary problem* // J. Math. Anal. Appl., **288** (2003), N 2, 442–461.

[10] Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О задачах со свободными границами для параболических уравнений второго порядка* // Алгебра и анализ, **12** (2000), вып. 6, 98–139.

[11] Б. В. Базалий, И. И. Данилюк, С. П. Дегтярев, *Классическая разрешимость многомерной нестационарной задачи фильтрации со свободной границей* // Докл. АН УССР, Сер. А, (1987), N 2, 9–15.

[12] Youshan Tao, Fahuai Yi, *Classical Verigin problem as a limit case of Verigin problem with surface tention at free boundary* // Appl. Math.-JCU, **11B** (1996), 307–322.

[13] Youshan Tao, *Classical solution of Verigin problem with surface tention* // Chin. Ann. Math., Ser. B, **18** (1997), N 3, 393–404.

[14] Longfeng Xu, *A Verigin problem with kinetic condition* // Applied Mathematics and Mechanics, English Edition, **18** (1997), N 2, 191–199.

[15] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости* // Мат. сборник, **132(174)** (1987), N 1, 3–19.

[16] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа* // М.: Наука, 1967, 736 с.

[17] В. А. Солонников, *Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью* // Изв. АН СССР, сер. мат., **41** (1977), N 6, 1388–1424.

[18] E.-I. Hanzawa, *Classical solutions of the Stefan problem* // Tohoku Math. Journ., **33** (1981), 297–335.

[19] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа* // М.: Наука, 1973, 576 с.

[20] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций* // М.: Мир, 1973, 342 с.

[21] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач* // М.: Мир, 1972, 588 с.

[22] О. А. Ладыженская, В. Я. Ривкинд, Н. Н. Уральцева, *О классической разрешимости задачи дифракции* // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **92** (1966), 116–146.

[23] В. А. Солонников, *Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса–Л. Ниренберга* // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **92** (1966), 233–297.

[24] A. Lunardi, *Analitic semigroups and optimal regularity in parabolic problems* // Progress in nonlinear differential equations and their applications, v. 16, Birkhäuser, 1995, 425 p.

[25] В. А. Солонников, *Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа* // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **70** (1964), 133–212.

[26] В. А. Солонников, *Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса* // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, **70** (1964), 213–317.

Сведения об авторах

Сергей П. Дегтярев

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 74
83114, Донецк
Украина
E-Mail: spdegt@yahoo.com