Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 2, 154 – 175

Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках

Сергей Н. Бак, Александр А. Панков

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая динамику бесконечной системы линейно связанных нелинейных осцилляторов на двумерной решетке. Получены результаты о существовании периодических и уединенных бегущих волн и экспоненциальная оценка решения.

2010 MSC. 39A12, 39A70, 58E50.

Ключевые слова и фразы. Осцилляторы, бегущие волны, критические точки, теорема о горном перевале.

1. Введение

В настоящей статье изучаются уравнения, описывающие динамику бесконечной системы линейно связанных нелинейных осцилляторов, расположенных на плоской целочисленной решетке. Пусть $q_{n,m}(t)$ — обобщенная координата (n,m)-го осциллятора в момент времени t. Предполагается, что каждый осциллятор линейно взаимодействует с четырьмя своими ближайшими соседями. Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид:

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'(q_{n,m}) + c_1^2(q_{n+1,m} + q_{n-1,m} - 2q_{n,m}) \\ + c_2^2(q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 2q_{n,m}), \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) представляет собой бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Подобные системы представляют интерес в связи с многочисленными физическими приложениями [5, 7, 8]. В статьях [1, 6, 11] изучались бегущие волны в цепочках осцилляторов. Обзор известных результатов о таких системах сделан в [13].

Статья поступила в редакцию 9.09.2009

ISSN 1810 – 3200.

В статье [15] изучались периодические решения для системы осцилляторов на двумерных решетках, а в статьях [9] и [10] — бегущие волны в подобных системах несколько иного типа и другими методами. В частности, в [9] рассматривалась система с нечетной 2π-периодической нелинейностью.

В данной работе с помощью метода критических точек исследован вопрос о существовании периодических и уединенных бегущих волн, а также установлена экспоненциальная оценка профиля бегущей волны.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему осцилляторов с потенциалом:

$$U(r) = -\frac{a}{2}r^2 + V(r).$$

Тогда уравнение примет вид

$$\ddot{q}_{n,m} = c_1^2 \triangle_{(1)} q_{n,m} + c_2^2 \triangle_{(2)} q_{n,m} + a q_{n,m} - V'(q_{n,m}), \qquad (2.1)$$

где

$$(\triangle_{(1)} q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} - 2q_{n,m}$$

и

$$(\triangle_{(2)} q)_{n,m} = q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 2q_{n,m}$$

— дискретные операторы Лапласа соответственно по переменным n и m, и $c_1^2 > 0, c_2^2 > 0$. Если $c_1^2 = c_2^2 = 1$, то линейный оператор в правой части (2.1) является двумерным дискретным оператором Лапласа

$$(\triangle q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}.$$

Бегущая волна имеет вид

$$q_{n,m}(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct)$$

и для ее профиля $u(s)$, где $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, справедливо уравнение

$$\begin{aligned} c^2 u''(s) &= c_1^2(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s)) \\ &\quad + c_2^2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s)) + au(s) - V'(u(s)). \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Отметим, что функция непрерывного аргумента $u(s)$, $s \in \mathbb{R}$, называется профилем волны. Константа $c \neq 0$ представляет собой скорость волны. Если $c > 0$, то волна смещается вправо, а если $c < 0$, то — влево. Интерес представляют нетривиальные волны с профилем не равным нулю тождественно.

Важную роль играет величина $c_0(\varphi)$, определенная равенством

$$c_0^2(\varphi) = c_1^2 \cos^2 \varphi + c_2^2 \sin^2 \varphi. \tag{2.3}$$

В случае периодических бегущих волн для нахождения профиля волны достаточно найти решение уравнения (2.2) с условием периодичности

$$u(s + 2k) = u(s), s \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Профиль уединенной волны является решением уравнения (2.2) с краевым условием на бесконечности

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{2.5}$$

Отметим, что в случае, когда $\varphi \equiv 0, \pi/2 \mod \pi$, волна распространяется вдоль соответствующей координатной оси. Такие волны сводятся к волнам на одномерной решетке, изученным в [1,6]. Таким образом, результаты настоящей работы содержат результаты [1,6] в качестве частных случаев.

Всюду далее под решением уравнения (2.2) понимается функция $u(s)$ класса $C^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющая уравнению (2.2) для всех $s \in \mathbb{R}$.

3. Вариационная формулировка задачи

Всюду далее предполагается, что потенциал $V(r)$ удовлетворяет условию:

(h) *функция $V(r)$ непрерывно дифференцируема, $V(0) = 0$, $V'(r) = o(r)$ при $r \to 0$ и существует такое $\mu > 2$, что*

$$0 < \mu V(r) \le V'(r)r, r \ne 0.$$

Отметим, что в уравнении (2.2) скорость c входит только в квадрате. Отсюда вытекает, что если функция $u(s)$ удовлетворяет уравнению (2.2), то существуют две бегущие волны с данным профилем и скоростями $\pm c$. Одна из них двигается вправо, другая — влево.

С уравнением (2.2) и условием (2.4) связывается функционал J_k, определенный на пространстве

$$E_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u(s + 2k) = u(s)\}$$

с нормой

$$\|u\|_k = (\|u\|^2_{L^2(-k,k)} + \|u'\|^2_{L^2(-k,k)})^{1/2} = \left(\int\limits_{-k}^{k} (u(s)^2 + u'(s)^2)\, ds \right)^{1/2}.$$

Таким образом, E_k — соболевское пространство $2k$-периодических функций. Функционал определяется равенством

$$J_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \Big\{ \frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2}(u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 - \frac{c_2^2}{2}(u(s+\sin\varphi) - u(s))^2 + \frac{a}{2}u^2(s) - V(u(s)) \Big\}\, ds. \quad (3.1)$$

С задачей (2.2), (2.5) связан функционал

$$J(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2}(u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 - \frac{c_2^2}{2}(u(s+\sin\varphi) - u(s))^2 + \frac{a}{2}u^2(s) - V(u(s)) \Big\}\, ds, \quad (3.2)$$

определенный на пространстве $E = H^1(\mathbb{R})$ со стандартной соболевской нормой.

Напомним, что по теореме вложения $E_k \subset C([-k,k])$ и $E \subset C_b(\mathbb{R})$, где $C([-k,k])$ и $C_b(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных функций на $[-k,k]$ и пространство ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}$, соответственно. Более того, функции из E имеют нулевой предел на бесконечности.

Далее нам понадобится

Лемма 3.1. *Имеют место неравенства*

$$\|u(\cdot+\alpha) - u(\cdot)\|_{L^2(-k,k)} \le |\alpha| \|u'\|_{L^2(-k,k)}, \quad u \in E_k, \quad (3.3)$$

для любого $\alpha \in (-k,k)$, *и*

$$\|u(\cdot+\alpha) - u(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le |\alpha| \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad u \in E, \quad (3.4)$$

для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $v_\alpha = u(s+\alpha) - u(s)$ и

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} u(t)\, dt$$

— преобразование Фурье функции u. Тогда

$$\widehat{v_\alpha}(\xi) = (e^{i\alpha\xi} - 1)\widehat{u}(\xi).$$

Имеем

$$|\widehat{v_\alpha}(\xi)|^2 = 2(1 - \cos(\alpha\xi))|\widehat{u}(\xi)|^2 = 4\sin^2\frac{\alpha\xi}{2}|\widehat{u}(\xi)|^2 \le \alpha^2\xi^2|\widehat{u}(\xi)|^2.$$

Теперь неравенство (3.4) следует из равенства Парсеваля.

Неравенство (3.3) доказывается аналогично с помощью рядов Фурье. □

Замечание 3.1. Из доказательства следует, что константа $|\alpha|$ в неравенстве (3.4) неуменьшаема. Для каждого фиксированного k, константа $|\alpha|$ в (3.3) может быть уменьшена. Однако, это наименьшая константа, при которой неравенство (3.3) справедливо для всех k.

Лемма 3.2. *В сделанных выше предположениях, J_k и J — функционалы класса C^1 на E_k и E, соответственно. Их производные выражаются формулами*

$$\begin{aligned}\langle J_k'(u), h\rangle = \int_{-k}^{k} \{c^2u'(s)h'(s) + c_1^2(u(s+\cos\varphi)\\ + u(s-\cos\varphi) - 2u(s))h(s) + c_2^2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi)\\ - 2u(s))h(s) + au(s)h(s) - V'(u(s))h(s)\}\,ds\end{aligned} \tag{3.5}$$

и

$$\begin{aligned}\langle J'(u), h\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \{c^2u'(s)h'(s) + c_1^2(u(s+\cos\varphi)\\ + u(s-\cos\varphi) - 2u(s))h(s) + c_2^2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi)\\ - 2u(s))h(s) + au(s)h(s) - V'(u(s))h(s)\}\,ds\end{aligned} \tag{3.6}$$

для $u, h \in E_k$ и $u, h \in E$, соответственно.

Доказательство. В силу леммы 3.1, квадратичная часть функционала J_k является непрерывным квадратичным функционалом на E_k и, следовательно, принадлежит классу C^1.

Рассмотрим неквадратичную часть

$$\Psi_k(u) = \int_{-k}^{k} V(u(s))\,ds.$$

Достаточно показать, что Ψ_k принадлежит классу C^1 на каждом открытом шаре пространства E_k с центром в нуле. Пусть B_{r_0} — такой шар радиуса $r_0 > 0$. По теореме вложения, $B_{r_0} \subset \tilde{B}_{r_1}$, где $\tilde{B}_{r_1}$ — открытый шар некоторого радиуса r_1 в пространстве $C([-k,k])$. Фиксируем произвольно такую непрерывно дифференцируемую функцию $\tilde{V}(r)$, что $\tilde{V}(r) = r$ при $|r| \geq r_2$, где $r_2 > r_1$ достаточно велико.

Рассмотрим функционал

$$\tilde{\Psi}_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \tilde{V}(u(s))\,ds.$$

По построению, $\tilde{\Psi}_k$ совпадает с Ψ_k на шаре B_{r_0}. В силу классических результатов [2, 3], $\tilde{\Psi}_k$ является C^1 функционалом на $L^2(-k,k)$ и, следовательно, на непрерывно вложенном в него пространстве E_k. Отсюда вытекает, что $\tilde{\Psi}_k$ принадлежит классу C^1 на B_{r_0} и, в силу произвольности r_0, на всем E_k.

Аналогично доказывается, что функционал J принадлежит классу C^1.

Формулы (3.5) и (3.6) для производных получаются прямым вычислением. □

Лемма 3.3. *Критические точки функционалов J_k и J являются C^2-решениями уравнения* (2.2), *удовлетворяющими условия* (2.4) *и* (2.5), *соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим случай функционала J (второй случай аналогичен). Поскольку, по теореме вложения, каждый элемент $u \in E$ удовлетворяет условию (2.5), то достаточно только проверить, что критические точки J являются C^2-решениями (2.2).

Пусть $u \in E$ — критическая точка функционала J. Тогда $\langle J(u), h\rangle = 0$ для любого $h \in E$. Выберем $h = \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ произвольно и используем формулу (3.6). Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \{c^2 u'(s)h'(s) + c_1^2(u(s+\cos\varphi) \\ + u(s-\cos\varphi) - 2u(s))h(s) + c_2^2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) \\ - 2u(s))h(s) + au(s)h(s) - V'(u(s))h(s)\}\,ds = 0.$$

Это значит, что u удовлетворяет уравнению (2.2) в смысле обобщенных функций. По теореме вложения, $u \in C_b(\mathbb{R})$. Следовательно, правая часть (2.2) — непрерывная функция. Отсюда делаем вывод, что

u'' — непрерывная функция и, следовательно, $u \in C^2$ — решение уравнения (2.2) в обычном смысле. □

4. Основные результаты

Нам понадобится

Лемма 4.1. *Пусть выполнено условие* (h), $a > 0$ *и* $c^2 > c_0^2(\varphi)$. *Тогда существуют такие* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\gamma > 0$, *независящие от* $k \geq 1$, *что для нетривиальных критических точек функционалов* J_k *и* J *имеют место неравенства*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq \gamma J_k(u), \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|^2 \leq \gamma J(u). \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть $u \in E_k$ — критическая точка функционала J_k. Тогда $J_k'(u) = 0$ и

$$\begin{aligned} J_k(u) &= J_k(u) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u), u\rangle \\ &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\Big)\int\limits_{-k}^{k}\{c^2|u'(s)|^2 - c_1^2|u(s+\cos\varphi) - u(s)|^2 \\ &\qquad - c_2^2|u(s+\sin\varphi) - u(s)|^2 + a|u(s)|^2\}\,ds \\ &\qquad - \int\limits_{-k}^{k}\Big\{V(u(s)) - \frac{1}{\mu}V'(u(s))u(s)\Big\}\,ds \\ &\geq \frac{\mu-2}{2\mu}\Bigg\{c^2\int\limits_{-k}^{k}|u'(s)|^2\,ds - c_1^2\int\limits_{-k}^{k}|u(s+\cos\varphi) - u(s)|^2\,ds \\ &\qquad - c_2^2\int\limits_{-k}^{k}|u(s+\sin\varphi) - u(s)|^2\,ds + a\int\limits_{-k}^{k}|u(s)|^2\,ds\Bigg\}. \end{aligned}$$

Используя лемму 3.1, получаем, что

$$J_k(u) \geq \frac{\mu-2}{2\mu}\Bigg\{\alpha_0\int\limits_{-k}^{k}|u'(s)|^2\,ds + a\int\limits_{-k}^{k}|u(s)|^2\,ds\Bigg\},$$

где $\alpha_0 = c^2 - c_0^2(\varphi)$. Тогда

$$J_k(u) \geq \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\Bigg\{\int\limits_{-k}^{k}|u'(s)|^2\,ds + \int\limits_{-k}^{k}|u(s)|^2\,ds\Bigg\} = \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\|u\|_k^2,$$

где $\alpha_1 = \min\{\alpha_0, a\}$. Отсюда вытекает второе неравенство (4.1).

Докажем первое из неравенств (4.1). Для критической точки $u \in E_k$ имеем $\langle J_k'(u), u\rangle = 0$, т.е.

$$\int_{-k}^{k} \{c^2|u'(s)|^2 - c_1^2|u(s+\cos\varphi) - u(s)|^2 - c_2^2|u(s+\sin\varphi) - u(s)|^2 + a|u(s)|^2\}\,ds = \int_{-k}^{k} V'(u(s))\,ds.$$

Отсюда, как и выше, имеем

$$\alpha_1\|u\|_k^2 \le \int_{-k}^{k} V'(u(s))u(s)\,ds. \tag{4.3}$$

Из условия (h) вытекает, что

$$V'(r)r \le \sigma(|r|)r^2,$$

где $\sigma(r)$ — монотонно возрастающая непрерывная функция $r \ge 0$ и $\sigma(0) = 0$. Тогда из (4.3) следует, что

$$\alpha_1\|u\|_k^2 \le \sigma(\|u\|_{C([-k,k])}) \int_{-k}^{k} |u(s)|^2\,ds.$$

По теореме вложения

$$\|u\|_{C([-k,k])} \le C \cdot \|u\|_k$$

с константой C, не зависящей от k. Следовательно,

$$\alpha_1\|u\|_k^2 \le \sigma(C \cdot \|u\|_k)\|u\|_k^2.$$

Поскольку $u \ne 0$, то

$$\sigma(C \cdot \|u\|_k) \ge \alpha_1,$$

откуда вытекает первое неравенство (4.1) с

$$\varepsilon_0^{1/2} = C^{-1} \cdot \sigma^{-1}(\alpha_1).$$

Неравенство (4.2) доказывается аналогично, с теми же константами ε_0 и γ. $\square$

4.1. Существование периодических бегущих волн

С помощью теоремы о горном перевале получим существование нетривиальных бегущих волн с периодическим профилем. Для этого, в силу леммы 3.3, достаточно установить существование нетривиальных критических точек функционала J_k. Отметим, что $u = 0$ всегда является тривиальной критической точкой и дает тривиальную бегущую волну, равную нулю.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие* (h) *и* $a > 0$. *Тогда для любых* $k \geq 1$ *и* $c^2 > c_0^2(\varphi)$ *уравнение* (2.2) *имеет решение* u, *удовлетворяющее условию* (2.4). *Этим самим, существуют две бегущие волны с профилем* u *и скоростями* $\pm c$. *Более того, существуют такие константы* $\varepsilon > 0$ *и* $C > 0$, *которые не зависят от* k, *что*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C, \tag{4.4}$$

$$\varepsilon_0 \leq J_k \leq C. \tag{4.5}$$

Сформулируем теорему о горном перевале в нужном виде и проверим ее условия для функционала J_k ([14, 16]).

Теорема 4.2 (о горном перевале). *Пусть* I — *функционал класса* C^1 *на гильбертовом пространстве* H, *удовлетворяющий условию Пале–Смейла:*

(PS) *если последовательность* $u_n \in H$ *такова, что* $I'(u_n) \to 0$ *и* $I(u_n)$ *ограничена, то она содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Предположим, что существуют такие $e \in H$ *и* $r > 0$, *что* $\|e\| > r$ *и*

$$\beta := \inf_{\|v\|=r} I(v) > 0 = I(0) \geq I(e)\,.$$

Тогда существует такая критическая точка $u \in H$ *функционала* I, *что* $I(u) \geq \beta$. *При этом*

$$I(u) \leq \sup_{\tau \geq 0} I(\tau e)\,.$$

Начнем с условия Пале–Смейла.

Лемма 4.2. *В условиях теоремы* 4.1 *функционал* J_k *удовлетворяет условию Пале–Смейла.*

Доказательство. Пусть $u_m \in E_k$ такая последовательность, что $J_k'(u_m) \to 0$ и $J_k(u_m) \le C$. Тогда, как и в начале доказательства леммы 4.1,

$$
\begin{aligned}
&J_k(u_m) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u_m), u_m\rangle \\
&\qquad= \Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\Big)\int_{-k}^{k}\{c^2 u_m'(s)^2 - c_1^2|u(s+\cos\varphi)-u(s)|^2 \\
&\qquad\qquad - c_2^2|u(s+\sin\varphi)-u(s)|^2 + a u_m(s)^2\}\,ds \\
&\qquad\qquad - \int_{-k}^{k}\Big\{V(u_m(s)) - \frac{1}{\mu}V'(u_m(s))u_m(s)\Big\}\,ds \\
&\quad\ge \frac{\mu-2}{2\mu}\Big\{c^2\int_{-k}^{k} u_m'(s)^2\,ds - c_1^2\int_{-k}^{k}|u(s+\cos\varphi)-u(s)|^2\,ds \\
&\qquad\qquad - c_2^2\int_{-k}^{k}|u(s+\sin\varphi)-u(s)|^2\,ds + a\int_{-k}^{k}u_m(s)^2\,ds\Big\}.
\end{aligned}
$$

Как и в доказательстве леммы 4.1, правая часть этого неравенства оценивается снизу величиной

$$\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\|u_m\|_k^2.$$

С другой стороны, ее левая часть не превышает

$$C + \frac{1}{\mu}C_1\|u_m\|_k.$$

Отсюда

$$\frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_1\|u_m\|_k^2 \le C + \frac{1}{\mu}C_1\|u_m\|_k,$$

что показывает ограниченность последовательности u_m в пространстве E_k.

Так как пространство E_k гильбертово, то можно считать, что $u_m \to u$ слабо в E_k. Согласно компактности вложения $E_k \subset C([-k,k])$ последняя сходимость является сильной в $C([-k,k])$.

Положим для краткости $u_{m,l} = u_m - u_l$. Имеем, согласно леммы 3.2,

$$\begin{aligned}\langle J_k'(u_m) - J_k'(u_l), u_{m,l}\rangle \\ = \int_{-k}^{k} \{c^2(u_{m,l}(s))^2 - c_1^2(u_{m,l}(s+\cos\varphi) - u_{m,l}(s))^2 \\ - c_2^2(u_{m,l}(s+\sin\varphi) - u_{m,l}(s))^2 + a(u_{m,l}(s))^2\}\, ds \\ - \int_{-k}^{k} \{V'(u_m(s)) - V'(u_l(s))\} u_{m,l}(s)\, ds.\end{aligned}$$

Отсюда, с помощью того же приёма, что и в доказательстве леммы 4.1, получаем

$$\langle J_k'(u_m) - J_k'(u_l), u_{m,l}\rangle \geq \alpha_1 \|u_{m,l}\|_k^2 - \int_{-k}^{k} \{V'(u_m(s)) - V'(u_l(s))\} u_{m,l}\, ds,$$

или

$$\alpha_1 \|u_{m,l}\|_k^2 \leq \langle J_k'(u_m) - J_k'(u_l), u_{m,l}\rangle + \int_{-k}^{k} \{V'(u_m(s)) - V'(u_l(s))\} u_{m,l}\, ds. \tag{4.6}$$

Поскольку $u_{m,l} \to 0$ слабо в E_k, а $J_k'(u_m) \to 0$ сильно в сопряженном пространстве E_k^*, то первый член в правой части (4.6) сходится к нулю при $m, l \to \infty$. Кроме того, $u_m \to u$ в $C([-k,k])$. Отсюда следует, что подынтегральное выражение в (4.6) сходится к нулю равномерно на $[-k,k]$ при $m, l \to \infty$. Следовательно, интегральный член в (4.6) также сходится к нулю. Отсюда вытекает, что u_m — последовательность Коши в E_k и, следовательно, $u_m \to u$ сильно в E_k. □

Лемма 4.3. *В условиях теоремы* 4.1 *существуют такие* $r_0 > 0$ *и* $\alpha_0 > 0$, *не зависящие от* k, *что*

$$\inf_{\|u\|_k = r_0} J_k(u) > \alpha_0.$$

Доказательство. Согласно условию (h)

$$V(r) \leq \mu^{-1}\sigma(|r|)) r^2.$$

Отсюда имеем

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\int_{-k}^{k} \{c^2 u'(s)^2 - c_1^2|u(s+\cos\varphi) - u(s)|^2$$

$$- c_2^2|u(s+\sin\varphi) - u(s)|^2 + au(s)^2\}\,ds - \int_{-k}^{k} V(u(s))\,ds$$

$$\geq \frac{\alpha_1}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\int_{-k}^{k} \sigma(u(s))u(s)^2\,ds$$

$$\geq \frac{\alpha_1}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\sigma(\|u\|_{C([-k,k])})\|u\|^2_{L^2(-k,k)}$$

$$\geq \frac{\alpha_1}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\sigma(\|u\|_{C([-k,k])})\|u\|_k^2.$$

По теореме вложения,

$$\|u\|_{C([-k,k])} \leq C\|u\|_k.$$

Поэтому

$$J_k(u) \geq \left\{\frac{\alpha_1}{2} - \frac{1}{\mu}\sigma(C\|u\|_k)\right\}\|u\|_k^2.$$

Выберем $r_0 > 0$ так, что

$$\frac{1}{\mu}\sigma(Cr_0) = \frac{\alpha_1}{4}.$$

Это, очевидно, возможно в силу свойств функции $\sigma(r)$. Тогда при $\|u\|_k = r_0$ имеем

$$J_k(u) \geq \frac{\alpha_1 r_0^2}{4},$$

что и доказывает лемму. □

Зафиксируем произвольную бесконечно дифференцируемую функцию $g \neq 0$ на $\mathbb{R}$ с носителем на отрезке $[0,1]$. Пусть теперь v_k — такая $2k$-периодическая функция, что $v_k|_{[-k,k]} = g|_{[-k,k]}$. Очевидно, что $v_k \in E_k$.

Лемма 4.4. *В условиях теоремы* 4.1 *существует такое* $\tau_0 > 0$, *не зависящее от* k, *что*

$$J_k(\tau v_k) = J_1(\tau v_1) \leq 0$$

для всех $\tau \geq \tau_0$.

Доказательство. По определению v_k имеем при $k \geq 1$

$$J_k(\tau v_k) = \frac{1}{2} \int\limits_{-k}^{k} \{c^2\tau^2(g'(s))^2 - \tau^2 c_1^2 |g(s+\cos\varphi) - g(s)|^2$$

$$- \tau^2 c_2^2 |g(s+\sin\varphi) - g(s)|^2 + a\tau^2(g(s))^2\}\, ds - \int\limits_{-k}^{k} V(\tau g(s))\, ds$$

$$= \frac{\tau^2}{2} \int\limits_{-1}^{1} \{c^2(g'(s))^2 - c_1^2|g(s+\cos\varphi) - g(s)|^2 - c_2^2|g(s+\sin\varphi) - g(s)|^2$$

$$+ a(g(s))^2\}\, ds - \int\limits_{0}^{1} V(\tau g(s))\, ds.$$

Из условия (h) вытекает, что

$$V(\tau g(s)) \geq d\tau^\mu |g(s)|^\mu - d_0.$$

Поэтому

$$J_k(\tau v_k) = J_1(\tau v_1) \leq \gamma_1 \tau^2 - d\gamma_2 \tau^\mu - d_0,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \{c^2(g'(s))^2 - c_1^2|g(s+\cos\varphi) - g(s)|^2$$

$$- c_2^2|g(s+\sin\varphi) - g(s)|^2 + a(g(s))^2\}\, ds > 0,$$

$$\gamma_2 = \int\limits_{-1}^{1} |g(s)|^\mu\, ds > 0.$$

Поскольку $\mu > 2$, отсюда следует утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 4.1. Леммы 4.2–4.4 показывают, что для функционала J_k выполнены все условия теоремы о горном перевале. Следовательно, J_k имеет ненулевую критическую точку $u \in E_k$. По лемме 3.3, u — C^2-решение задачи (2.2), (2.4). Оценки снизу для $\|u\|_k$ и $J_k(u)$ вытекают из леммы 4.1. В силу леммы 4.4,

$$J_k(u) \leq \sup_{\tau \geq 0} J_k(\tau v_k) = \sup_{\tau \geq 0} J_1(\tau v_1) = C,$$

и верхняя оценка сверху для $\|u\|_k$ вытекает из леммы 4.1. Теорема доказана. □

4.2. Существование уединенных бегущих волн

Докажем существование уединенных бегущих волн. Бегущие волны в данном случае находятся как критические точки функционала J. Для последнего выполнены утверждения, аналогичные леммам 4.3 и 4.4. Таким образом, функционал J удовлетворяет части условий теоремы о горном перевале. Однако, условие Пале–Смейла для этого функционала не выполнено. Поэтому критические точки в данном случае строятся другим способом — с помощью перехода к пределу в критических точках функционала J_k при $k \to \infty$.

Теорема 4.3. *Пусть выполнено условие* (h) *и* $a > 0$. *Тогда для любого* $c^2 > c_0^2(\varphi)$ *уравнение* (2.2) *имеет решение* $u \in E$, *следовательно, удовлетворяющее условию* (2.5). *Таким образом, существуют две уединенные бегущие волны с профилем* u *и скоростями* $\pm c$.

Для доказательства теоремы понадобится следующий частный случай леммы 4.1 из [12].

Лемма 4.5. *Пусть* $u_n \in E_{k_n}$, *где* $k_n \to \infty$, *и* $\|u_n\|_{k_n}$ *ограничена. Если для некоторого* $r > 0$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \int\limits_{y-r}^{y+r} |u_n(s)|^2\, ds \to 0, \tag{4.7}$$

то $\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} \to 0$ *для любого* $p > 2$.

Доказательство теоремы 4.3. Выберем произвольно последовательность $k_n \to \infty$ и обозначим через $u_n \in E_{k_n}$ решение уравнения (2.2) с условием (2.4), построенное в теореме 4.1 при $k = k_n$.

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что существуют такие $\delta > 0, r > 0$ и последовательность $y_n \in \mathbb{R}$, что

$$\int\limits_{y_n-r}^{y_n+r} |u_n(s)|^2\, ds \ge \delta. \tag{4.8}$$

Действительно, пусть это не так. Тогда для любого $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \int\limits_{y-r}^{y+r} |u_n(s)|^2\, ds = 0.$$

Кроме того, в силу неравенства (4.4), последовательность $\|u_n\|_{k_n}$ ограничена. Отсюда, согласно лемме 4.5, следует, что

$$\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} \to 0. \tag{4.9}$$

Далее, $J_k'(u_n) = 0$ и, следовательно, $\langle J_k'(u_n), u_n\rangle = 0$, т.е.

$$\int\limits_{-k_n}^{k_n} \{c^2(u_n'(s))^2 - c_1^2|u_n(s+\cos\varphi) - u_n(s)|^2 - c_2^2|u_n(s+\sin\varphi) - u_n(s)|^2 + a(u_n(s))^2\}\, ds = \int\limits_{-k_n}^{k_n} V'(u_n(s))u_n(s)\, ds.$$

Отсюда

$$\alpha_1\|u_n\|_{k_n}^2 \le \int\limits_{-k_n}^{k_n} V'(u_n(s))u_n(s)\, ds. \tag{4.10}$$

В силу теоремы вложения, функции $u_n(s)$ непрерывны и равномерно по n ограничены, т.е. существует такое $R > 0$, что $|u_n(s)| \le R$. Фиксируем произвольное $p > 2$. Согласно условию (h), для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C = C_\varepsilon$, что при $|r| \le R$

$$|V'(r)| \le \varepsilon|r| + C|r|^{p-1}.$$

Тогда неравенство (4.10) дает

$$\alpha_1\|u_n\|_{k_n}^2 \le \varepsilon \int\limits_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^2\, ds + C\int\limits_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^p\, ds = \varepsilon\|u_n\|_{L^2(-k_n,k_n)}^2 + C\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}^p \le \varepsilon\|u_n\|_{k_n}^2 + C\|u_n\|_{(-k_n,k_n)}^p.$$

Выбирая $\varepsilon = \alpha_1/2$, получаем

$$\frac{\alpha_1}{2}\|u_n\|_{k_n}^2 \le C\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}^p.$$

Тогда, согласно (4.9), $\|u_n\|_{k_n} \to 0$, что противоречит первому неравенству в (4.4). Таким образом, (4.8) доказано.

Уравнение (2.2) инвариантно относительно сдвигов. Поэтому, если $u(s)$ — его решение, то $u(s+y)$ тоже решение для любого $y \in \mathbb{R}$. Следовательно, заменяя $u_n(s)$ на $u_n(s+y_n)$, можно считать, что (4.8) выполнено с $y_n = 0$.

Поскольку $\|u_n\|_{k_n}$ ограничена, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $u_n \to u$ слабо в $H^1_{loc}(\mathbb{R})$, т.е. слабо в $H^1(a, b)$ для любого конечного интервала (a, b). Согласно теореме вложения, $u_n \to u$ равномерно на любом конечном интервале. Поэтому в неравенстве (4.8) (с $y_n = 0$) можно перейти к пределу и получить, что

$$\int_{-r}^{r} |u(s)|^2\, ds \geq \delta.$$

Это показывает, что $u \neq 0$.

Покажем, что $u \in E$. Выберем произвольно $b > 0$. При достаточно больших n имеем

$$\int_{-b}^{b} \{|u_n'(s)|^2 + |u_n(s)|^2\}\, ds \leq \int_{-k_n}^{k_n} \{|u_n'(s)|^2 + |u_n(s)|^2\}\, ds \leq C,$$

в силу ограниченности $\|u_n\|_{k_n}$. Поскольку $u_n \to u$ слабо в $H^1(-b, b)$, то

$$\int_{-b}^{b} \{|u'(s)|^2 + |u(s)|^2\}\, ds \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_{-b}^{b} \{|u_n'(s)|^2 + |u_n(s)|^2\}\, ds \leq C.$$

Поскольку b произвольно, то отсюда следует, что

$$\|u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{|u'(s)|^2 + |u(s)|^2\}\, ds \leq C < \infty,$$

т.е. $u \in E$.

Остается проверить, что u — решение уравнения (2.2). Пусть $g(s)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем $\operatorname{supp} g(s) \subset [-b, b]$. При достаточно большом n интервал $(-k_n + 1, k_n - 1)$ содержит $[-b, b]$ и, следовательно, корректно определена функция $g_n \in E_{k_n}$, которая совпадает с g на $(-k_n, k_n)$. Поскольку u_n — критическая точка функционала J_k, то

$$\begin{aligned} 0 &= \langle J_{k_n}'(u_n), g_n \rangle \\ &= \int_{-k_n}^{k_n} \{c^2 u_n'(s) g_n'(s) - c_1^2 (u_n(s + \cos\varphi) + u_n(s - \cos\varphi) \end{aligned}$$

$$- 2u_n(s))g_n(s) - c_2^2(u_n(s+\sin\varphi) + u_n(s-\sin\varphi) - 2u_n(s))g_n(s)$$

$$+ au_n(s)g_n(s)\}\, ds - \int\limits_{-k_n}^{k_n} V'(u_n(s))g_n(s)\, ds$$

$$= \int\limits_{-b}^{b} \{c^2 u_n'(s)g'(s) - c_1^2(u_n(s+\cos\varphi) + u_n(s-\cos\varphi)$$

$$- 2u_n(s))g(s) - c_2^2(u_n(s+\sin\varphi) + u_n(s-\sin\varphi) - 2u_n(s))g(s)$$

$$+ au_n(s)g(s)\}\, ds - \int\limits_{-b}^{b} V'(u_n(s))g(s)\, ds.$$

В первом интеграле правой части этого равенства можно перейти к пределу при $n \to \infty$, поскольку $u_n \to u$ слабо в $H^1(-b, b)$. Согласно теореме вложения, $u_n \to u$ равномерно на $[-b, b]$. Поэтому и во втором интеграле можно перейти к пределу. Таким образом,

$$0 = \int\limits_{-b}^{b} \{c^2 u'(s)g'(s) - c_1^2(u_n(s+\cos\varphi) + u_n(s-\cos\varphi)$$

$$- 2u_n(s))g(s) - c_2^2(u_n(s+\sin\varphi) + u_n(s-\sin\varphi) - 2u_n(s))g(s)$$

$$+ au(s)g(s)\}\, ds - \int\limits_{-b}^{b} V'(u(s))g(s)\, ds$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{c^2 u'(s)g'(s) - c_1^2(u_n(s+\cos\varphi) + u_n(s-\cos\varphi)$$

$$- 2u_n(s))g(s) - c_2^2(u_n(s+\sin\varphi) + u_n(s-\sin\varphi) - 2u_n(s))g(s)$$

$$+ au(s)g(s) - V'(u(s))g(s)\}\, ds = \langle J'(u), g\rangle.$$

Поскольку g — произвольная бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем и множество таких функций плотно в E, то $J'(u) = 0$. А это значит, что u — критическая точка функционала J и, следовательно, решение рассматриваемой задачи. Теорема доказана. $\square$

4.3. Экспоненциальное убывание профиля уединенной волны

Уравнение (2.2) запишем в виде

$$Lu = f(u), \tag{4.11}$$

где

$$\begin{aligned} Lu(t) = -c^2u''(t) + c_1^2(u(t+\cos\varphi) + u(t-\cos\varphi) - 2u(t)) \\ + c_2^2(u(t+\sin\varphi) + u(t-\sin\varphi) - 2u(t)) + au(t) \end{aligned} \tag{4.12}$$

и $f(r) = V'(r)$. Относительно функции $f(r)$ сделаем следующее, более слабое, чем (h), предположение.

(h') *$f(r)$ непрерывна на $\mathbb{R}, f(0) = 0, f(r) = o(r)$ при $r \to 0$ и $f(r) = 0$ при $r \neq 0$.*

Рассматриваются решения, лежащие в пространстве $E = H^1(\mathbb{R})$. Пусть $u \in E$ — такое решение. Положим

$$g(t) = \frac{f(u(t))}{u(t)}$$

(если $u(t) = 0$, то $g(t) = 0$ по определению). Из условия (h') следует, что

$$\lim_{t\to\pm\infty} g(t) = 0.$$

Уравнение (4.11) примет вид

$$Lu(t) = g(t)\cdot u(t). \tag{4.13}$$

К уравнению (3.1) применим преобразование Фурье. Получим

$$\sigma(\xi)\widehat{u}(\xi) = \widehat{g\cdot u}(\xi), \tag{4.14}$$

где

$$\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4c_1^2\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\cos\varphi\right) - 4c_2^2\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\sin\varphi\right) + a. \tag{4.15}$$

Отметим, что функция $\sigma(\xi), \xi \in \mathbb{R}$, продолжается до целой функции

$$\sigma(\zeta) = c^2\zeta^2 - 4c_1^2\sin^2\left(\frac{\zeta}{2}\cos\varphi\right) - 4c_2^2\sin^2\left(\frac{\zeta}{2}\sin\varphi\right) + a, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Лемма 4.6. *Пусть $c^2 > c_0^2(\varphi)$ и $a > 0$. Тогда существует такое $\beta_0 > 0$, что функция $\sigma(\zeta)$ не имеет нулей в полосе $|\operatorname{Im}\zeta| < \beta_0$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\sigma(\xi) > 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}$ и, следовательно, σ не обращается в нуль на действительной оси. Действительно, воспользовавшись неравенством

$$|\sin x| \le |x|,$$

имеем

$$\begin{aligned}\sigma(\xi) = c^2 - 4c_1^2 \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\cos\varphi\right) - 4c_2^2\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\sin\varphi\right) + a \\ \ge c^2\xi^2 - \xi^2(c_1^2\cos^2\varphi + c_2^2\sin^2\varphi) + a \\ \ge (c^2 - c_0^2(\varphi))\xi^2 + a \ge a > 0.\end{aligned}$$

Пусть теперь $A > 0$ — произвольно и $|\operatorname{Im}\zeta| < A$. Записав ζ в виде $\zeta = \zeta + i\tau$, имеем $|\tau| < A$ и

$$\begin{aligned}\left|\sin\left(\frac{\zeta}{2}\cos\varphi\right)\right| = \frac{1}{2}|e^{i\zeta\cos\varphi/2} - e^{-i\zeta\cos\varphi/2}| \\ = \frac{1}{2}|e^{i\xi\cos\varphi/2}e^{-\tau\cos\varphi/2} - e^{-i\xi\cos\varphi/2}e^{\tau\cos\varphi/2}| \\ \le \frac{1}{2}(|e^{i\xi\cos\varphi/2}e^{-\tau\cos\varphi/2}| + |e^{-i\xi\cos\varphi/2}e^{\tau\cos\varphi/2}|) \\ = \frac{1}{2}(e^{-\tau\cos\varphi/2} + e^{\tau\cos\varphi/2}) \le e^{A|\cos\varphi|/2}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left|\sin^2\left(\frac{\zeta}{2}\cos\varphi\right)\right| \le e^{A|\cos\varphi|}.$$

Аналогично

$$\left|\sin^2\left(\frac{\zeta}{2}\sin\varphi\right)\right| \le e^{A|\sin\varphi|}.$$

Тогда

$$|\sigma(\xi + i\tau)| \ge c^2|\xi + i\tau|^2 - 4c_1^2 e^{A|\cos\varphi|} - 4c_2^2 e^{A|\sin\varphi|} + a.$$

Поэтому, если $|\xi|$ достаточно большое и $|\tau| < A$, то $|\sigma(\xi + i\tau)| > 0$ и, следовательно, $\sigma(\zeta) \ne 0$ для таких $\zeta = \xi + i\tau$. Таким образом, существует такое $B > 0$, что при $|\tau| < A$, $|\xi| \ge B$ функция $\sigma(\zeta)$ не обращается в нуль. Кроме того, в прямоугольнике $|\xi| < B$, $|\tau| < A$ аналитическая функция $\sigma(\zeta)$ может иметь не более, чем конечное число нулей. Отсюда немедленно вытекает существование такого $\beta_0 > 0$, что в полосе $|\tau| < \beta_0$ функция $\sigma(\zeta)$ не имеет нулей. $\square$

Далее понадобится следующее утверждение ([13, лемма 4.8]).

Лемма 4.7. *Пусть* $f(t)$ *и* $g(t)$ *— ограниченные неотрицательные функции на* $\mathbb{R}$, *причем* $\lim_{t\to\pm\infty} g(t) = 0$. *Пусть также*

$$f(t) \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t-s|} g(s) f(s)\, ds,$$

с $\beta > 0$. *Тогда для любого* $\alpha \in (0, \beta)$ *существует такая константа* $C = C(\alpha)$, *что*

$$f(t) \le C e^{-\alpha|t|}.$$

Имеет место теорема

Теорема 4.4. *Пусть выполнено условие* (h'), $c^2 > c_0^2(\varphi)$ *и* $a > 0$. *Если* $u \in E$ *— решение уравнения* (2.2), *то для любого* $\beta \in (0, \beta_0)$, *где* β_0 *определено в лемме* 4.6, *существует такое* $C_\beta > 0$, *что*

$$|u(t)| \le C_\beta e^{-\beta|t|}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Из уравнения (3.2) получаем

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{\sigma(\xi)} \widehat{g \cdot u}(\xi).$$

Пусть

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\xi} \cdot \frac{1}{\sigma(\xi)}\, d\xi.$$

Тогда

$$u(t) = [K * (g \cdot u)](t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t-s) g(s) u(s)\, ds. \tag{4.17}$$

Поскольку, согласно лемме 4.6, функция $1/\sigma(\zeta)$ аналитична в полосе $|\operatorname{Im}\zeta| < \beta_0$, то, по теореме Пэли–Винера (см. [4, теорема IX.14]), для $K(t)$ имеет место оценка

$$|K(t)| \le C_\beta e^{-\beta|t|}$$

для любого $\beta \in (0, \beta_0)$. Из (4.17) получаем

$$|u(t)| \le C_\beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|t-s|} |g(s)||u(s)|\, ds.$$

Теперь, в силу леммы 4.7, получаем требуемое. □

Поскольку условие (h) сильнее, чем условие (h'), то из теоремы 4.4 вытекает

Следствие 1. *В условиях теоремы* 4.4 *для решения* u *имеет место экспоненциальная оценка* (4.16) *для любого* $\beta \in (0, \beta_0)$.

Литература

[1] С. М. Бак, *Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів* // Математичні студії, **26** (2006), N 2, 140–153.

[2] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*, М.: Наука, 1972, 415 с.

[3] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, М.: Гостехиздат, 1956, 392 с.

[4] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики: В 4-х томах*, М.: Мир, 1978, Т. 2, 395 с.

[5] S. Aubry, *Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization* // Physica D, **103** (1997), 201–250.

[6] S. M. Bak, *Peridoc traveling waves in chains of oscillators* // Communications in Mathematical Analysis, **3** (2007), N 1, 19–26.

[7] O. M. Braun, Y. S. Kivshar, *Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model* // Physics Repts., **306** (1998), 1–108.

[8] O. M. Braun, Y. S. Kivshar, *The Frenkel–Kontorova model*, Berlin: Springer, 2004, 427 p.

[9] M. Feckan, V. Rothos, *Traveling waves in Hamiltonian systems on* 2*D lattices with nearest neighbour interactions* // Nonlinearity, **20** (2007), 319–341.

[10] G. Friesecke, K. Matthies, *Geometric solitary waves in a* 2*D math-spring lattice* // Discrete and continuous dynamical systems, **3** (2003), N 1, 105–114.

[11] G. Iooss, K. Kirchgässner, *Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators* // Commun. Math. Phys., **211** (2000), 439–464.

[12] A. Pankov, *Periodic Nonlinear Schrödinger Equation with an Application to Photonic Crystals* // Milan J. Math., **73** (2005), 259–287.

[13] A. Pankov, *Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices*, London–Singapore: Imperial College Press, 2005, 196 p.

[14] P. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Providence, R. I.: American Math. Soc., 1986, 100 p.

[15] P. Srikanth, *On periodic motions of two-dimentional lattices* // Functional analysis with current applications in science, technology and industry, **377** (1998), 118–122.

[16] M. Willem, *Minimax theorems*, Boston, Birkhäuser, 1996, 162 p.

Сведения об авторах

Сергей Николаевич Бак

Винницкий государственный
педагогический университет
им. М. Коцюбинского,
ул. Острожского, 32
Винница 21001
Украина
E-Mail: Sergiy.Bak@gmail.com

Александр Андреевич Панков

Department of Mathematics,
Morgan State University,
1700 East Cold Spring Lane,
Baltimore, MD 21251,
USA
E-Mail: Alexander.Pankov@morgan.edu