Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 4, 553 – 573

Асимптотические разложения некоторых рядов и их применение

Виктор П. Заставный

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Найдены асимптотические разложения по степеням x при $x \to +0$ рядов $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (k+a)^\gamma e^{-(k+a)^\alpha x}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k (k+a)^\gamma}{(x(k+a)^\alpha+1)^\mu}$, где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$. Эти разложения применяются к получению точных неравенств для рядов Матье.

2000 MSC. 41A60, 26D15, 33E20.

Ключевые слова и фразы. Асимптотическое разложение, вычеты, обобщенные ряды Матье, неравенства.

1. Введение и формулировка основных результатов

Одним из объектов исследования данной работы являются следующие функциональные ряды с параметрами $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\alpha > 0$

$$f(x, a, \gamma, \alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} (k+a)^\gamma e^{-(k+a)^\alpha x}, \quad x > 0. \tag{1.1}$$

$$\widetilde{f}(x, a, \gamma, \alpha) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+a)^\gamma e^{-(k+a)^\alpha x}, \quad x > 0. \tag{1.2}$$

Ряды (1.1) и (1.2) возникают во многих задачах анализа. В частности, ряды (1.1) и (1.2) при $x = \ln \frac{1}{\rho}$ в случае $a = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$, $\gamma = -r - 1$, $r \in \mathbb{N}$, возникли в 1950 г. в работе А. Ф. Тимана [1]. Он доказал, что этими рядами выражается точное значение остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона. Поиску полного асимптотического представления были посвящены работы Л. В. Малей [2], Э. Л. Штарк [3], В. А. Баскакова [4], К. М. Жигалла и Ю. И. Харкевича [5]. Полное решение

Статья поступила в редакцию 17.08.2009
Работа была поддержана ДФФД Украины, грант Ф 25.1/055

ISSN 1810 – 3200.

этой задачи было получено в работе автора [6], в которой для функций (1.1) и (1.2) при $a > 0$, $\alpha = 1$, $\gamma = -r - 1$, $r \in \mathbb{Z}_+$, найдены в явном виде разложения в ряд по степеням x, соответственно: при $0 < x < 2\pi$ и $0 < x < \pi$.

В 1966 г. Гельфонд [7, §4.3], с помощью теории вычетов, нашел асимптотическое разложение при $x \to +0$ по степеням x^k, $k \in \mathbb{Z}_+$, функции (1.1) для случая $a = 1$, $-\frac{\gamma+1}{\alpha} \notin \mathbb{Z}_+$. Здесь $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ — множество всех неотрицательных целых чисел. В случае $a = 1$, $-\frac{\gamma+1}{\alpha} \in \mathbb{Z}_+$ он лишь указал, что сумма в асимптотическом разложении *должна быть изменена соответствующим образом.* В [7, §4.3] также отмечено, что в случае $a = 1$ аналогично можно получить асимптотическое разложение функции (1.2) при $x \to +0$ по степеням x^k, $k \in \mathbb{Z}_+$. В 2008 г. автором [8], с помощью формулы Эйлера-Маклорена, найдены асимптотические разложения при $x \to +0$ функций (1.1) и (1.2) для любых $a > 0$ и $\gamma \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{N}$ (в примерах на с. 56–57 из [8] в правых частях асимптотических разложений под знаком суммы пропущен множитель $(-1)^{\alpha k+\gamma}$).

В теоремах 1.1 и 1.2 данной работы для всех допустимых параметров найдены асимптотические разложения при $x \to +0$ функций (1.1) и (1.2). Коэффициенты этих разложений выражаются соответственно через функцию Гурвица $\zeta(s,a)$ и функцию $\widetilde{\zeta}(s,a)$, которые при фиксированном $a > 0$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \zeta(s,a) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1; \\ \widetilde{\zeta}(s,a) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^s}, \quad \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

С помощью формулы Эрмита функция Гурвица аналитически продолжается в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, а точка $s = 1$ является для неё полюсом первого порядка и при $a > 0$ справедливы равенства (см. [9, 10])

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s,a) - \frac{1}{s-1}\right) = -\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}, \\ &\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s,a) - 2^{1-s}\zeta\left(s, \frac{a+1}{2}\right)\right) = -\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{\Gamma'\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} + \ln 2. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{s-1}\, dt$, $\operatorname{Re} s > 0$, гамма-функция Эйлера. Из равенства

$$\widetilde{\zeta}(s,a) = \zeta(s,a) - 2^{1-s}\zeta\left(s, \frac{a+1}{2}\right), \quad \operatorname{Re} s > 1, \tag{1.5}$$

вытекает, что функция $\widetilde{\zeta}(s,a)$ аналитически продолжается в $\mathbb{C}$ и

$$\widetilde{\zeta}(1,a) = -\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{\Gamma'\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} + \ln 2, \quad a > 0. \tag{1.6}$$

Теорема 1.1. *Пусть $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда асимптотические разложения*

$$f(x,a,\gamma,\alpha) \underset{x\to+0}{\sim} \frac{1}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\alpha}\right) x^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\,\zeta(-\alpha k-\gamma,a)\,x^k, \tag{1.7}$$

$$f(x,a,\gamma,\alpha) \underset{x\to+0}{\sim} \frac{(-1)^r x^r}{\Gamma(r+1)}\left(-\frac{\ln x}{\alpha} + \frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)}\,\frac{1}{\alpha} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right) + \sum_{\substack{k=0,\\ k\neq r}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\,\zeta(-\alpha k-\gamma,a)\,x^k \tag{1.8}$$

справедливы соответственно в случаях, когда $-\frac{\gamma+1}{\alpha} \notin \mathbb{Z}_+$ и $-\frac{\gamma+1}{\alpha} = r \in \mathbb{Z}_+$. Если $0 < \alpha < 1$, то в (1.7) и (1.8) имеет место знак равенства при всех $x > 0$. Если $\alpha = 1$, то в (1.7) и (1.8) имеет место знак равенства при всех $x \in (0,2\pi)$.

То, что при $a = 1$, $0 < \alpha < 1$, в (1.7) имеет место знак равенства при всех $x > 0$ было отмечено без доказательства в [7].

Теорема 1.2. *Пусть $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда имеет место следующее асимптотическое разложение*

$$\widetilde{f}(x,a,\gamma,\alpha) \underset{x\to+0}{\sim} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\,\widetilde{\zeta}(-\alpha k-\gamma,a)\,x^k. \tag{1.9}$$

Если $0 < \alpha < 1$, то в (1.9) имеет место знак равенства при всех $x > 0$. Если $\alpha = 1$, то в (1.9) имеет место знак равенства при всех $x \in (0,\pi)$.

Далее мы рассматриваем следующие функциональные ряды с параметрами $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ и $\mu > 0$

$$g(x,a,\gamma,\alpha,\mu) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+a)^\gamma}{(x(k+a)^\alpha+1)^\mu}, \quad \mu > \max\left\{\frac{\gamma+1}{\alpha};0\right\}, \quad x > 0, \tag{1.10}$$

$$\widetilde{g}(x,a,\gamma,\alpha,\mu) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+a)^\gamma}{(x(k+a)^\alpha+1)^\mu}, \quad \mu > \max\left\{\frac{\gamma}{\alpha};0\right\}, \quad x > 0. \tag{1.11}$$

Теорема 1.3. *Пусть $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ и $\mu > \max\left\{\frac{\gamma+1}{\alpha}; 0\right\}$. Тогда асимптотические разложения*

$$g(x, a, \gamma, \alpha, \mu) \underset{x \to +0}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\alpha}\right)\, \Gamma\left(\mu - \frac{\gamma+1}{\alpha}\right)}{\alpha\, \Gamma(\mu)}\, x^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, \frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}\, \zeta(-\alpha k - \gamma, a)\, x^k, \quad (1.12)$$

$$g(x, a, \gamma, \alpha, \mu) \underset{x \to +0}{\sim} \frac{\Gamma(\mu+r)(-1)^r x^r}{\Gamma(\mu)\Gamma(r+1)} \left(-\frac{\ln x}{\alpha} + \frac{\Gamma'(r+1)}{\alpha\, \Gamma(r+1)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(\mu+r)}{\alpha\, \Gamma(\mu+r)}\right) + \sum_{k=0, k \neq r}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, \frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}\, \zeta(-\alpha k - \gamma, a)\, x^k \quad (1.13)$$

справедливы соответственно в случаях, когда $-\frac{\gamma+1}{\alpha} \notin \mathbb{Z}_+$ и $-\frac{\gamma+1}{\alpha} = r \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 1.4. *Пусть $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ и $\mu > \max\left\{\frac{\gamma}{\alpha}; 0\right\}$. Тогда имеет место следующее асимптотическое разложение*

$$\widetilde{g}(x, a, \gamma, \alpha, \mu) \underset{x \to +0}{\sim} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, \frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}\, \widetilde{\zeta}(-\alpha k - \gamma, a)\, x^k. \quad (1.14)$$

Отметим, что теоремы 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4 доказаны методом, изложенным в [7]. В § 2 эти теоремы применяются к доказательству точных неравенств для рядов Матье.

2. Точные неравенства для рядов Матье

Рассмотрим следующие функциональные ряды с параметрами $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ и $\mu > 0$

$$S(x, a, \gamma, \alpha, \mu) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+a)^\gamma}{((k+a)^\alpha + x)^\mu}, \quad \mu > \max\left\{\frac{\gamma+1}{\alpha}; 0\right\}, \quad x \geq 0, \quad (2.1)$$

$$\widetilde{S}(x, a, \gamma, \alpha, \mu) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+a)^\gamma}{((k+a)^\alpha + x)^\mu}, \quad \mu > \max\left\{\frac{\gamma}{\alpha}; 0\right\}, \quad x \geq 0, \quad (2.2)$$

Ряды (2.1) и (2.2), как это принято в последние годы, мы будем называть, соответственно, обобщенными и обобщенными знакопеременными рядами Матье. В 1890 г. Émile Leonard Mathieu [13] выдвинул гипотезу о справедливости следующего неравенства

$$S(x,1,1,2,2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{((k+1)^2+x)^2}<\frac{1}{2x},\quad x>0. \tag{2.3}$$

Различные доказательства неравенства (2.3) были опубликованы в 1952–1957 годах в работах Berg [14], van der Corput, Heflinger [15] и Makai [16]. В работе Makai [16] были доказаны неравенства

$$\frac{1}{2(q+x)}<\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{((k+1)^2+x)^2}<\frac{1}{2(p+x)},\quad x>0, \tag{2.4}$$

где $q=\frac{1}{2}$ и $p=0$. Возникает следующая естественная задача: найти максимальное p и минимальное q, для которых справедливо неравенство (2.4). В 1982 г. Elbert [17] высказал гипотезу, что в (2.4) можно взять $q=\frac{1}{2\zeta(3)}$, где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана. В 1998 г. Alzer, Brenner и Ruehr [18] доказали, что в неравенстве (2.4) можно взять $q=\frac{1}{2\zeta(3)}$ и $p=\frac{1}{6}$ и эти константы точные.

В 2008 г. автором [19] доказано, что для любых $\mu>1$ и $a\ge 1$ существуют положительные константы $m(\mu,a)$ и $M(\mu,a)$ такие, что неравенство

$$\frac{1}{2(\mu-1)(q+x)^{\mu-1}}\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+a)}{((k+a)^2+x)^{\mu}}\le\frac{1}{2(\mu-1)(p+x)^{\mu-1}} \tag{2.5}$$

имеет место при всех $x>0$ тогда и только тогда, когда $0\le p\le m(\mu,a)$ и $q\ge M(\mu,a)$. При этом для любого фиксированного значения $a\ge 1$ функции $m(\mu,a)$ и $M(\mu,a)$, соответственно, убывают и возрастают по $\mu\in(1,+\infty)$ и для всех $a\ge 1$, $\mu>1$ справедливы неравенства

$$a^2-a<m(\infty,a)\le m(\mu,a)\le a^2-a+\frac{1}{6}$$
$$a^2-a+\frac{1}{4}<M(\mu,a)<M(\infty,a)=a^2.$$

Доказано также, что $m(\mu,1)=\frac{1}{6}$, $\mu\in(1,3]$. Таким образом, *если* $a\ge 1$, *то неравенство* (2.5) *выполняется для всех* $\mu>1$ $\iff$ $0\le p\le m(\infty,a)$ *и* $q\ge M(\infty,a)=a^2$. Правое неравенство в (2.5) при $a=1$, $p=0$, $\mu>1$ доказал в 1980 г. Diananda [20]. Большой список работ по данной теме содержится в работе [21].

Если $a>0$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$ и $\mu>\max\left\{\frac{\gamma+1}{\alpha};0\right\}$, то из теоремы 1.3 вытекает, что

$$S(x,a,\gamma,\alpha,\mu) \underset{x\to+\infty}{\sim} \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\alpha}\right)}{\alpha}\cdot\frac{\Gamma\left(\mu-\frac{\gamma+1}{\alpha}\right)}{\Gamma(\mu)}\cdot x^{\frac{\gamma+1}{\alpha}-\mu}, & \gamma+1>0,\\ \frac{1}{\alpha}\cdot x^{-\mu}\ln x, & \gamma+1=0,\\ \zeta(-\gamma,a)\,x^{-\mu}, & \gamma+1<0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Поэтому естественной является следующая задача. Пусть $a>0$, $\gamma+1>0$, $\alpha>0$, $\mu_0\ge\frac{\gamma+1}{\alpha}$. При каких значениях $q\ge0$, $p\ge0$, $A\in\mathbb{R}$ и $B>0$ неравенство

$$\frac{B\cdot\Gamma\left(\mu-\frac{\gamma+1}{\alpha}\right)}{\Gamma(\mu)(q+x)^{\mu-\frac{\gamma+1}{\alpha}}}\le S(x,a,\gamma,\alpha,\mu)\le\frac{A\cdot\Gamma\left(\mu-\frac{\gamma+1}{\alpha}\right)}{\Gamma(\mu)(p+x)^{\mu-\frac{\gamma+1}{\alpha}}} \tag{2.7}$$

выполняется для всех $\mu>\mu_0$ и $x>0$? В теореме 2.1 эта задача полностью решена, а в теореме 2.2 решена аналогичная задача для случая $\gamma+1<0$.

Теорема 2.1. *Пусть $a>0$, $\gamma+1>0$, $\alpha>0$, $\mu_0\ge\frac{\gamma+1}{\alpha}$, $q\ge0$, $p\ge0$, $A\in\mathbb{R}$ и $B>0$. Тогда неравенство* (2.7) *выполняется для всех $\mu>\mu_0$ и $x>0$ $\iff$ $0\le p<a^\alpha\le q$, $A\ge A_p(a,\gamma,\alpha)$, $0<B\le B_q(a,\gamma,\alpha)$, где*

$$\begin{aligned} A_p(a,\gamma,\alpha) &:= \sup_{x>0} e^{p\,x}x^{\frac{\gamma+1}{\alpha}}f(x,a,\gamma,\alpha),\\ B_q(a,\gamma,\alpha) &:= \inf_{x>0} e^{q\,x}x^{\frac{\gamma+1}{\alpha}}f(x,a,\gamma,\alpha), \end{aligned} \tag{2.8}$$

и в этом случае неравенство (2.7) *строгое для всех $x>0$, а если $p>0$, то и для $x=0$. Кроме того, $A_p(a,\gamma,\alpha)<+\infty \iff p<a^\alpha$ и $B_q(a,\gamma,\alpha)>0 \iff q\ge a^\alpha$. Если $a\ge1$, то $A_p(a,1,2)=B_q(a,1,2)=\frac{1}{2}$ при всех $q\ge a^2$ и $0\le p\le m(\infty,a)$, в частности, при всех $p\in[0,a^2-a]$.*

Теорема 2.2. *Пусть $a>0$, $\gamma+1<0$, $\alpha>0$, $\mu_0\ge0$, $q\ge0$, $p\ge0$, $D\in\mathbb{R}$ и $E>0$. Тогда неравенство*

$$\frac{E}{(q+x)^\mu}\le S(x,a,\gamma,\alpha,\mu)\le\frac{D}{(p+x)^\mu} \tag{2.9}$$

выполняется для всех $\mu>\mu_0$ и $x>0$ $\iff$ $0\le p\le a^\alpha\le q$, $D\ge D_p(a,\gamma,\alpha)$, $0<E\le E_q(a,\gamma,\alpha)$, где

$$\begin{aligned} D_p(a,\gamma,\alpha) &:= \sup_{x>0} e^{p\,x} f(x,a,\gamma,\alpha), \\ E_q(a,\gamma,\alpha) &:= \inf_{x>0} e^{q\,x} f(x,a,\gamma,\alpha), \end{aligned} \tag{2.10}$$

и в этом случае неравенство (2.9) *строгое для всех* $x>0$, *а если* $p>0$, *то и для* $x=0$. *Кроме того,* $D_p(a,\gamma,\alpha)<+\infty \iff p\le a^\alpha$ *и* $E_q(a,\gamma,\alpha)>0 \iff q\ge a^\alpha$, *а также* $D_p(a,\gamma,\alpha)=\zeta(-\gamma,a)$ *при всех* $p\le a^\alpha$ *и* $E_q(a,\gamma,\alpha)=a^\gamma$ *при* $q=a^\alpha$.

Если $a>0$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$ и $\mu>\max\left\{\frac{\gamma}{\alpha};0\right\}$, то из теоремы 1.4 вытекает, что

$$\widetilde{S}(x,a,\gamma,\alpha,\mu)=x^{-\mu}\left(\widetilde{\zeta}(-\gamma,a)+o(1)\right),\quad x\to+\infty. \tag{2.11}$$

Поэтому для рядов (2.2) естественной является следующая задача. Пусть $a>0$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$ и $\mu_0\ge\max\{\frac{\gamma}{\alpha};0\}$. При каких $q\ge 0$, $p\ge 0$ и $C,F\in\mathbb{R}$ неравенство

$$\frac{F}{(q+x)^\mu}\le \widetilde{S}(x,a,\gamma,\alpha,\mu)\le\frac{C}{(p+x)^\mu} \tag{2.12}$$

выполняется для всех $\mu>\mu_0$ и $x>0$? В работе Tomovski и Hilfer [22] утверждается, что в этой задаче для $a=1$, $\gamma>0$ в правом неравенстве в (2.12) можно взять $p=C=1$ и $\mu_0=\frac{\gamma+1}{\alpha}$. В работе автора [23] указана ошибка в доказательстве этого утверждения Tomovski и Hilfer. В этой же работе [23] доказано, что, если $m,\alpha\in N$, $\gamma=4m+5$, $\alpha\mu-\gamma>0$, то правое неравенство в (2.12) для $a=p=C=1$ не возможно при больших $x>0$. В теореме 2.3 найдены все решения этой задачи.

Теорема 2.3. *Пусть* $a>0$, $\gamma\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $\mu_0\ge\max\{\frac{\gamma}{\alpha};0\}$, $q\ge 0$, $p\ge 0$ *и* $C,F\in\mathbb{R}$. *Тогда неравенство* (2.12) *выполняется для всех* $\mu>\mu_0$ *и* $x>0 \iff 0\le p\le a^\alpha$, $C\ge C_p(a,\gamma,\alpha)$, $F\le F_q(a,\gamma,\alpha)$, *где*

$$\begin{aligned} C_p(a,\gamma,\alpha) &:= \sup_{x>0} e^{p\,x} \widetilde{f}(x,a,\gamma,\alpha), \\ F_q(a,\gamma,\alpha) &:= \inf_{x>0} e^{q\,x} \widetilde{f}(x,a,\gamma,\alpha) \end{aligned} \tag{2.13}$$

и в этом случае неравенство (2.12) *строгое при* $x>0$, *а если* $q,p>0$, *то и для* $x=0$. *Кроме того,* $0<C_p(a,\gamma,\alpha)<+\infty$ *при* $p\le a^\alpha$ *и* $C_p(a,\gamma,\alpha)=+\infty$ *при* $p>a^\alpha$.

3. Вспомогательные факты

3.1. Гамма-функция Эйлера

Функция $\Gamma(s)$ аналитически продолжается во всю плоскость $\mathbb{C}$, кроме точек $s=-k$, $k\in\mathbb{Z}_+$, в которых она имеет простые полюса и для всех допустимых $s\in\mathbb{C}$ справедливы равенства

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\qquad \Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}. \tag{3.1}$$

Если $s=\sigma+it=|s|e^{i\varphi}$, где $\sigma,t\in\mathbb{R}$ и $\varphi=\varphi(s)=\arg s\in(-\pi,\pi)$, то [11, §1.5.1]

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma(s+1)=\sqrt{2\pi}s^{s+\frac12}e^{-s}e^{R(s)}\,,\qquad |R(s)|\le\frac{1}{12|s|\cos^2\frac{\varphi}{2}},\\
&|s^{s+\frac12}|=|s|^{\sigma+\frac12}e^{-\varphi(s)t}=|s|^{\sigma+\frac12}e^{-|\varphi(s)|\,|t|},\\
&|\Gamma(s+1)|=\sqrt{2\pi}|s|^{\sigma+\frac12}e^{-\sigma}e^{-|\varphi(s)|\,|t|}\,|e^{R(s)}|.
\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Если дополнительно $\operatorname{Re}s=\sigma>0$, то $|\varphi(s)|=\operatorname{arctg}\frac{|t|}{\sigma}$, и, значит,

$$\left.\begin{aligned}
&|\Gamma(s+1)|=\sqrt{2\pi}|s|^{\sigma+\frac12}e^{-\sigma}e^{-|t|\operatorname{arctg}\frac{|t|}{\sigma}}\,|e^{R(s)}|,\quad |R(s)|\le\frac{1}{6|s|},\\
&|\Gamma(s+1)|\le\sqrt{2\pi}|s|^{\sigma+\frac12}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,e^{\frac{1}{6|s|}},\\
&\frac{1}{|\Gamma(s+1)|}\le(2\pi)^{-\frac12}|s|^{-\sigma-\frac12}e^{\sigma}e^{|t|\operatorname{arctg}\frac{|t|}{\sigma}}\,e^{\frac{1}{6|s|}}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Здесь мы учли неравенства $|e^w|\le e^{|w|}$, $w\in\mathbb{C}$, и $0<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}u<\frac{1}{u}$, $u>0$.

Пусть $0<\delta\le\frac{\pi}{2}$, $|\arg s|\le\pi-\delta$ и $\operatorname{Re}s=\sigma$. Рассматривая отдельно случаи $\sigma>0$ и $\sigma\le0$ (в этом случае $|\arg s|\ge\frac{\pi}{2}$), из (3.2) получаем неравенство

$$|\Gamma(s+1)|\le\sqrt{2\pi}|s|^{\sigma+\frac12}\,e^{\frac{|\sigma|-\sigma}{2}}\,e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,e^{\frac{1}{12|s|\sin^2\frac{\delta}{2}}},\quad |\arg s|\le\pi-\delta. \tag{3.4}$$

3.2. Функция Гурвица

Если $a = p + a_0$, где $p \in \mathbb{N}$, $0 < a_0 \le 1$, то

$$\zeta(s,a) = \zeta(s,a_0) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(k+a_0)^s}, \quad s \ne 1. \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) при $\operatorname{Re} s > 1$ очевидно, а при остальных $s \ne 1$ оно вытекает из теоремы единственности для аналитических функций. Следующая формула принадлежит Гурвицу:

$$\zeta(s,a) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2\pi ak + \frac{\pi}{2}s\right)}{k^{1-s}}, \quad \operatorname{Re} s < 0, \quad 0 < a \le 1. \tag{3.6}$$

Если $0 < a \le 1$, то из [9, §13.51] вытекает существование положительных констант $c(a) > 0$ и $t(a) > 1$ таких, что при $\sigma, t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\left.\begin{aligned} &|\zeta(\sigma+it,a)| \le c(a)|t|^{\tau(\sigma)} \ln|t|, \quad |t| \ge t(a), \qquad \text{где} \\ &\tau(\sigma) := \begin{cases} \frac{1}{2} - \sigma, & \sigma \le 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \le \sigma \le \frac{1}{2}, \\ 1-\sigma, & \frac{1}{2} \le \sigma \le 1, \\ 0, & \sigma \ge 1. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

3.3. Преобразование Мелина

Если $x^{\sigma-1} f(x) \in L(0,+\infty)$ при некотором $\sigma \in \mathbb{R}$, то преобразование Мелина функции f определяется по формуле

$$g(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)\, dx, \quad s = \sigma + it, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Если дополнительно функция f имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $x > 0$, то справедлива формула обращения (см., например, [12, §1.29])

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g(s) x^{-s}\, ds,$$

где интеграл вычисляется в смысле главного значения по Коши. Если взять $f(x) = e^{-x}$ и $f(x) = (x+1)^{-\mu}$, $\mu > 0$, то соответственно получим

$g(s) = \Gamma(s)$, $\operatorname{Re} s > 0$, и $g(s) = \frac{\Gamma(\mu-s)\Gamma(s)}{\Gamma(\mu)}$, $0 < \operatorname{Re} s < \mu$. Поэтому при любых $x > 0$ справедливы два равенства

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) x^{-s}\, ds, \quad \sigma > 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{(x+1)^{\mu}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\mu-s)\Gamma(s)}{\Gamma(\mu)} x^{-s}\, ds, \quad 0 < \sigma < \mu. \tag{3.9}$$

4. Доказательство теорем 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4

Доказательство асимптотических разложений в теореме 1.1

В (3.8) берем $\sigma = \beta > \max\left\{0, \frac{\gamma+1}{\alpha}\right\}$ и x заменяем на $(k+a)^{\alpha} x$, $a > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$, $x > 0$. Полученные равенства

$$(k+a)^{\gamma} e^{-(k+a)^{\alpha} x} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} (k+a)^{-\alpha s+\gamma}\, ds$$

суммируем по $k \in \mathbb{Z}_+$. В левой части получим $f(x, a, \gamma, \alpha)$. В правой части меняем местами знак суммы и интеграла (это можно сделать в силу (3.2) и (3.3), если учесть, что $\alpha\beta - \gamma > 1$). Получаем, что при всех $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $x > 0$ и $\beta > \max\left\{0, \frac{\gamma+1}{\alpha}\right\}$ справедливо равенство

$$f(x, a, \gamma, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(s)\, ds, \quad F(s) = \Gamma(s) x^{-s} \zeta(\alpha s - \gamma, a). \tag{4.1}$$

Функция $F(s)$ является аналитической во всей плоскости, кроме полюсов $s = -k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и $s = \frac{\gamma+1}{\alpha}$. Если $-\frac{\gamma+1}{\alpha} \notin \mathbb{Z}_+$, то эти полюса различные и простые. Берем $\sigma_n = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и прямоугольник

$$K_{n,m} := \{s \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} s| \le m,\ -\sigma_n \le \operatorname{Re} s \le \beta\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Если $\sigma_n \ne -\frac{\gamma+1}{\alpha}$, то по теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K_{n,m}} F(s)\, ds = \Sigma_n, \tag{4.2}$$

где Σ_n — сумма вычетов функции F в тех полюсах, которые попали в интервал $(-\sigma_n, \beta)$. Если $n > -\frac{1}{2}-\frac{\gamma+1}{\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то в интервале $(-\sigma_n, \beta)$ будут находиться только полюса $s = -k$, $k = 0, \ldots, n$, и $s = \frac{\gamma+1}{\alpha}$. Из оценок (3.4), (3.7) и равенства (3.5) (если $a > 1$) вытекает, что в левой части равенства (4.2) интегралы по горизонтальным отрезкам $s = \sigma \pm im$, $-\sigma_n \le \sigma \le \beta$, стремятся к нулю при $m \to +\infty$. Поэтому из (4.1) и (4.2) вытекает равенство

$$f(x, a, \gamma, \alpha) = \Sigma_n + I_n, \quad I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma_n - i\infty}^{-\sigma_n + i\infty} F(s)\, ds, \quad \sigma_n \ne -\frac{\gamma+1}{\alpha}. \tag{4.3}$$

Сначала найдем Σ_n. Из равенства (1.4) вытекает, что разложение в ряд Лорана функции $\zeta(\alpha s - \gamma, a)$ в окрестности полюса $s = \frac{\gamma+1}{\alpha}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\zeta(\alpha s - \gamma, a) = \frac{c_{-1}}{s - \frac{\gamma+1}{\alpha}} + c_0 + c_1 \left(s - \frac{\gamma+1}{\alpha} \right) + \ldots, \\ &c_{-1} = \frac{1}{\alpha}, \quad c_0 = -\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из формулы дополнения (3.1) вытекает, что разложение в ряд Лорана Γ-функции в окрестности полюса $s = -k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, имеет вид

$$\begin{aligned} &\Gamma(s) = \frac{a_{-1}}{s+k} + a_0 + a_1 (s+k) + \ldots, \\ &a_{-1} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)}, \quad a_0 = \frac{(-1)^k \Gamma'(k+1)}{\Gamma^2(k+1)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Таким образом, если $-\frac{\gamma+1}{\alpha} \notin \mathbb{Z}_+$, то при $n > -\frac{1}{2} - \frac{\gamma+1}{\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, справедливо равенство

$$\Sigma_n = \frac{1}{\alpha}\, \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\alpha}\right) x^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\, \zeta(-\alpha k - \gamma, a)\, x^k. \tag{4.6}$$

Если $-\frac{\gamma+1}{\alpha} = r \in \mathbb{Z}_+$, то при $n > -\frac{1}{2} - \frac{\gamma+1}{\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, справедливо равенство

$$\Sigma_n = \operatorname*{res}_{s=-r} F(s) + \sum_{\substack{k=0,\\ k\ne r}}^{n} \operatorname*{res}_{s=-k} F(s), \tag{4.7}$$

где вычеты в точках $s = -k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \ne r$, вычисляются как и выше. Для вычисления вычета функции F в точке $s = -r$ надо учесть следующее разложение в ряд Тейлора функции x^{-s} в окрестности точки $s=-r$

$$x^{-s}=b_0+b_1(s+r)+\cdots, \quad b_0=x^r, \quad b_1=-x^r\ln x.$$

Учитывая равенства (4.4) и (4.5), соответственно, при $\frac{\gamma+1}{\alpha}=-r$ и $k=r$, получаем следующее разложение в ряд Лорана функции F в окрестности полюса $s=-r$

$$\left.\begin{aligned} F(s)=&\frac{B_{-2}}{(s+r)^2}+\frac{B_{-1}}{(s+r)}+B_0+B_1(s+r)+\cdots,\\ B_{-2}=&c_{-1}a_{-1}b_0=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)}\,x^r,\\ B_{-1}=&c_{-1}a_{-1}b_1+c_{-1}a_0b_0+c_0a_{-1}b_0. \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Поэтому

$$\operatorname*{res}_{s=-r}F(s)=B_{-1}=\frac{(-1)^r x^r}{\Gamma(r+1)}\left(-\frac{\ln x}{\alpha}+\frac{\Gamma'(r+1)}{\Gamma(r+1)}\,\frac{1}{\alpha}-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right). \tag{4.9}$$

Оценим теперь интеграл I_n в (4.3). Если $\sigma_n\neq-\frac{\gamma+1}{\alpha}$, то

$$|I_n|\leq\frac{x^{\sigma_n}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\Gamma(-\sigma_n+it)|\,|\zeta(-\alpha\sigma_n-\gamma+i\alpha t,a)|\,dt, \quad n\in\mathbb{Z}_+, \quad x>0. \tag{4.10}$$

Сходимость интеграла в (4.10) вытекает из равенства

$$|\Gamma(-\sigma_n+it)|=\frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi t)\,|\Gamma(1+\sigma_n-it)|}$$

и оценок (3.3) и (3.7) (в случае $a>1$ надо ещё учесть равенство (3.5)). Таким образом, асимптотические разложения (1.7) и (1.8) доказаны.

Случай $0<\alpha\leq1$ в теореме 1.1

Для фиксированных $0<\alpha\leq1$, $\gamma\in\mathbb{R}$ и произвольного $\varepsilon>0$ берем

$$n(\varepsilon,\gamma,\alpha):=\max\left\{\frac{1-\gamma}{\alpha}-\frac{1}{2};\frac{|\gamma|}{\varepsilon}-\frac{1}{2};1\right\}.$$

Тогда при всех натуральных $n\geq n(\varepsilon,\gamma,\alpha)$ выполняются неравенства

$$\alpha\sigma_n+\gamma\geq1; \quad |\gamma|\leq\varepsilon\sigma_n\leq\varepsilon|\sigma_n-it|, \quad t\in\mathbb{R}; \quad \sigma_n>1.$$

Если $0 < a \le 1$, то из (3.6) и (3.3) вытекает, что при всех натуральных $n \ge n(\varepsilon, \gamma, \alpha)$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства (надо еще учесть, что $|\sin w| \le e^{|\operatorname{Im} w|}$, $w \in \mathbb{C}$)

$$
\begin{aligned}
&|\zeta(-\alpha\sigma_n - \gamma + i\alpha t, a)| \\
&\qquad \le \frac{2|\Gamma(1 + \alpha\sigma_n + \gamma - i\alpha t)|}{(2\pi)^{1+\alpha\sigma_n+\gamma}}\, e^{\frac{\pi}{2}\alpha|t|}\zeta(1 + \alpha\sigma_n + \gamma) \\
&\le \frac{C(\gamma)}{(2\pi)^{\alpha\sigma_n}}\, e^{\frac{\pi}{2}\alpha|t|}\, |\alpha\sigma_n + \gamma - i\alpha t|^{\alpha\sigma_n+\gamma+\frac{1}{2}} e^{-\alpha\sigma_n} e^{-\alpha|t| \operatorname{arctg} \frac{\alpha|t|}{\alpha\sigma_n+\gamma}} \\
&\qquad \le \frac{C(\gamma)}{(2\pi)^{\alpha\sigma_n}}\, e^{\frac{\pi}{2}\alpha|t| - \alpha|t| \operatorname{arctg} \frac{\alpha|t|}{\alpha\sigma_n+\gamma}} e^{-\alpha\sigma_n} (\alpha + \varepsilon)^{\alpha\sigma_n+\gamma+\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \times |\sigma_n - it|^{\alpha\sigma_n+\gamma+\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

где $C(\gamma) = \frac{2\zeta(2)e^{\frac{1}{6}-\gamma}}{(2\pi)^{\gamma+1/2}}$, а $\zeta(s) := \zeta(s, 1)$ — дзета-функция Римана. Здесь мы воспользовались неравенствами

$$
\zeta(1 + \alpha\sigma_n + \gamma) \le \zeta(2),
$$

$$
|\alpha\sigma_n + \gamma - i\alpha t| \le \alpha|\sigma_n - it| + |\gamma| \le (\alpha + \varepsilon)|\sigma_n - it|.
$$

Так как при всех $n \ge n(\varepsilon, \gamma, \alpha)$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\sigma_n - it| \ge \sigma_n \ge 1$, то при этих же n и t

$$
|\sigma_n - it|^{\gamma} \le |\sigma_n - it|^{|\gamma|} \le \sigma_n^{|\gamma|} \left(1 + \frac{|t|}{\sigma_n}\right)^{|\gamma|} \le \sigma_n^{|\gamma|} (1 + |t|)^{|\gamma|}.
$$

Окончательно получаем, что при всех $n \ge n(\varepsilon, \gamma, \alpha)$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$
\begin{aligned}
&|\zeta(-\alpha\sigma_n - \gamma + i\alpha t, a)| \\
&\qquad \le \frac{C(\gamma)}{(2\pi)^{\alpha\sigma_n}}\, e^{\frac{\pi}{2}\alpha|t| - \alpha|t| \operatorname{arctg} \frac{\alpha|t|}{\alpha\sigma_n+\gamma}} e^{-\alpha\sigma_n} (\alpha + \varepsilon)^{\alpha\sigma_n+\gamma+\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad \times |\sigma_n - it|^{\alpha\sigma_n+\frac{1}{2}} \sigma_n^{|\gamma|} (1 + |t|)^{|\gamma|}. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Из (3.3) вытекает, что при всех $n \ge n(\varepsilon, \gamma, \alpha)$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$
\begin{aligned}
|\Gamma(-\sigma_n + it)| &= \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi t)\, |\Gamma(1 + \sigma_n - it)|} \\
&\qquad \le (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{6}} e^{-\pi|t|} |\sigma_n - it|^{-\sigma_n-\frac{1}{2}} e^{\sigma_n} e^{|t| \operatorname{arctg} \frac{|t|}{\sigma_n}}.
\end{aligned}
$$

Из (4.11) и последнего неравенства вытекает, что при $n \geq n(\varepsilon,\gamma,\alpha)$, $t \in \mathbb{R}$ и $0 < a \leq 1$ выполняется неравенство

$$
\begin{aligned}
&|\zeta(-\alpha\sigma_n - \gamma + i\alpha t, a)\,\Gamma(-\sigma_n + it)| \\
&\leq \frac{C_1(\gamma)}{(2\pi)^{\alpha\sigma_n}}\, e^{\psi(t)+(1-\alpha)\sigma_n}(\alpha+\varepsilon)^{\alpha\sigma_n+\gamma+\frac{1}{2}}|\sigma_n - it|^{(\alpha-1)\sigma_n}\sigma_n^{|\gamma|}\,(1+|t|)^{|\gamma|}\,,
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

где $C_1(\gamma) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{6}} C(\gamma)$ и

$$
\begin{aligned}
\psi(t) &= -\pi|t| + |t| \operatorname{arctg}\frac{|t|}{\sigma_n} + \frac{\pi}{2}\alpha|t| - \alpha|t| \operatorname{arctg}\frac{\alpha|t|}{\alpha\sigma_n+\gamma} \\
&= -\frac{\pi}{2}|t| - (1-\alpha)|t|\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{|t|}{\sigma_n}\right) \\
&\quad + \alpha|t|\left(\operatorname{arctg}\frac{|t|}{\sigma_n} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha|t|}{\alpha\sigma_n+\gamma}\right) \leq -\frac{\pi}{2}|t| + |\gamma|.
\end{aligned}
$$

Здесь мы учли, что $0 < \alpha \leq 1$, и воспользовались неравенством

$$
|\operatorname{arctg} v - \operatorname{arctg} u| = \left|\int_u^v \frac{dx}{x^2+1}\right| \leq \left|\int_u^v \frac{dx}{x^2}\right| = \left|\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right|,\ u, v > 0.
$$

Учитывая в (4.12) неравенство $|\sigma_n - it|^{(\alpha-1)\sigma_n} \leq \sigma_n^{(\alpha-1)\sigma_n}$ и оценку для $\psi(t)$, получаем, что при всех $n \geq n(\varepsilon,\gamma,\alpha)$, $t \in \mathbb{R}$ и $0 < a \leq 1$ выполняется неравенство

$$
\begin{aligned}
&|\zeta(-\alpha\sigma_n - \gamma + i\alpha t, a)\,\Gamma(-\sigma_n + it)| \\
&\qquad \leq \frac{C_1(\gamma)e^{|\gamma|}}{(2\pi)^{\alpha\sigma_n}}\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|} e^{(1-\alpha)\sigma_n}(\alpha+\varepsilon)^{\alpha\sigma_n+\gamma+\frac{1}{2}}\sigma_n^{(\alpha-1)\sigma_n}\sigma_n^{|\gamma|}\,(1+|t|)^{|\gamma|}\,.
\end{aligned}
$$

Это неравенство применяем в (4.10) и получаем при $n \geq n(\varepsilon,\gamma,\alpha)$ следующую оценку для I_n из (4.3)

$$
\left.
\begin{aligned}
&|I_n| \leq \frac{x^{\sigma_n} e^{(1-\alpha)\sigma_n}(\alpha+\varepsilon)^{\alpha\sigma_n+\gamma+\frac{1}{2}}\sigma_n^{(\alpha-1)\sigma_n+|\gamma|}}{(2\pi)^{\alpha\sigma_n+1}}\, I(\gamma), \\
&I(\gamma) = C_1(\gamma)e^{|\gamma|}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,(1+|t|)^{|\gamma|}\, dt.
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.13}
$$

Если $0 < \alpha < 1$, то из (4.13) вытекает, что $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ для всех $x > 0$. Если $\alpha = 1$, то $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ для всех $x \in (0, \frac{2\pi}{1+\varepsilon})$ и, значит, для всех $x \in (0, 2\pi)$. Таким образом, в случае $0 < a \le 1$ вторая часть теоремы 1.1 доказана.

Если $a > 1$, то $a = p + a_0$, где $p \in \mathbb{N}$, $0 < a_0 \le 1$, и (см. (3.5))

$$|\zeta(-\alpha\sigma_n - \gamma + i\alpha t, a)| \le |\zeta(-\alpha\sigma_n - \gamma + i\alpha t, a_0)| + a(a-1)^{\alpha\sigma_n+\gamma}.$$

В этом случае в правой части неравенства (4.13) будет еще одно слагаемое:

$$\frac{x^{\sigma_n}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi|t|} |\sigma_n - it|^{-\sigma_n-\frac{1}{2}} e^{\sigma_n+\frac{1}{6}} e^{|t| \operatorname{arctg} \frac{|t|}{\sigma_n}} a(a-1)^{\alpha\sigma_n+\gamma}\, dt$$
$$\le \frac{x^{\sigma_n}}{\sqrt{2\pi}} \sigma_n^{-\sigma_n-\frac{1}{2}} e^{\sigma_n+\frac{1}{6}} a(a-1)^{\alpha\sigma_n+\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\, dt, \quad n \ge n(\varepsilon, \gamma, \alpha). \tag{4.14}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $|\sigma_n - it|^{-\sigma_n-\frac{1}{2}} \le \sigma_n^{-\sigma_n-\frac{1}{2}}$. Правая часть неравенства (4.14) стремится к 0 при $n \to \infty$ при всех $x > 0$. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2

Доказательство вытекает из теоремы 1.1 и очевидного равенства

$$\widetilde{f}(x, a, \gamma, \alpha) = f(x, a, \gamma, \alpha) - 2^{\gamma+1} f\left(2^\alpha x, \frac{a+1}{2}, \gamma, \alpha\right), \quad x > 0.$$

Доказательство теоремы 1.3

В (3.9) берем $\sigma = \beta \in \left(\max\left\{0, \frac{\gamma+1}{\alpha}\right\}, \mu\right)$ и x заменяем на $(k+a)^\alpha x$, $a > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$, $x > 0$. Полученные равенства

$$\frac{(k+a)^\gamma}{(x(k+a)^\alpha + 1)^\mu} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{\Gamma(\mu - s)\Gamma(s)}{\Gamma(\mu)} x^{-s} (k+a)^{-\alpha s+\gamma}\, ds$$

суммируем по $k \in \mathbb{Z}_+$. В левой части получим $g(x, a, \gamma, \alpha, \mu)$. В правой части меняем местами знак суммы и интеграла (это можно сделать в силу (3.2) и (3.3), если учесть, что $\alpha\beta - \gamma > 1$). Получаем, что при всех $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\mu > \max\left\{0, \frac{\gamma+1}{\alpha}\right\}$, $x > 0$ и $\max\left\{0, \frac{\gamma+1}{\alpha}\right\} < \beta < \mu$ справедливо равенство

$$g(x, a, \gamma, \alpha, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} G(s)\, ds,$$

где $G(s) = \frac{\Gamma(\mu-s)\Gamma(s)}{\Gamma(\mu)} x^{-s}\zeta(\alpha s-\gamma,a) = \frac{\Gamma(\mu-s)}{\Gamma(\mu)}F(s)$, а функция F из (4.1). В полуплоскости $\operatorname{Re} s<\mu$ особые точки функций G и F совпадают. Берем $\sigma_n = n+\frac{1}{2}$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Как и при доказательстве теоремы 1.1, учитывая (3.4), (3.7) и равенство (3.5) (если $a>1$), получаем при $\sigma_n \neq -\frac{\gamma+1}{\alpha}$ следующее равенство

$$g(x,a,\gamma,\alpha,\mu) = \Sigma_n + I_n,\ I_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\sigma_n-i\infty}^{-\sigma_n+i\infty} G(s)\,ds, \tag{4.15}$$

где Σ_n — сумма вычетов функции G в тех полюсах, которые попали в интервал $(-\sigma_n,\beta)$. Если $n>-\frac{1}{2}-\frac{\gamma+1}{\alpha}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, то в интервале $(-\sigma_n,\beta)$ будут находиться только полюса $s=-k$, $k=0,\ldots,n$, и $s=\frac{\gamma+1}{\alpha}$. Если $-\frac{\gamma+1}{\alpha}\notin\mathbb{Z}_+$, то эти полюса простые и

$$\operatorname*{res}_{s=\frac{\gamma+1}{\alpha}} G(s) = \frac{\Gamma\left(\mu-\frac{\gamma+1}{\alpha}\right)}{\Gamma(\mu)} \operatorname*{res}_{s=\frac{\gamma+1}{\alpha}} F(s) = \frac{\Gamma\left(\mu-\frac{\gamma+1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\alpha}\right)}{\Gamma(\mu)\,\alpha} x^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}},$$

$$\operatorname*{res}_{s=-k} G(s) = \frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}\,\frac{(-1)^k}{k!}\,\zeta(-\alpha k-\gamma,a)\,x^k, \quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Если $-\frac{\gamma+1}{\alpha}=r\in\mathbb{Z}_+$, то вычеты в точках $s=-k$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $k\neq r$, вычисляются как и выше. Для вычисления вычета функции G в точке $s=-r$ надо учесть (4.8), (4.9) и следующее разложение в ряд Тейлора функции $\frac{\Gamma(\mu-s)}{\Gamma(\mu)}$ в окрестности точки $s=-r$

$$\frac{\Gamma(\mu-s)}{\Gamma(\mu)} = A_0 + A_1(s+r)+\ldots, \quad A_0 = \frac{\Gamma(\mu+r)}{\Gamma(\mu)}, \quad A_1 = -\frac{\Gamma'(\mu+r)}{\Gamma(\mu)}\,.$$

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{s=-r} G(s) &= B_{-1}A_0 + B_{-2}A_1 \\ &= \frac{\Gamma(\mu+r)(-1)^r x^r}{\Gamma(\mu)\Gamma(r+1)}\left(-\frac{\ln x}{\alpha} + \frac{\Gamma'(r+1)}{\alpha\,\Gamma(r+1)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma'(\mu+r)}{\alpha\,\Gamma(\mu+r)}\right).\end{aligned}$$

Оценим интеграл I_n в (4.15). Если $n\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma_n\neq-\frac{\gamma+1}{\alpha}$ и $x>0$, то

$$|I_n| \le \frac{x^{\sigma_n}}{2\pi\Gamma(\mu)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\mu+\sigma_n-it)|\,|\Gamma(-\sigma_n+it)|\,|\zeta(-\alpha\sigma_n-\gamma+i\alpha t,a)|\,dt. \tag{4.16}$$

Сходимость интеграла в (4.16) доказывается точно так же, как и сходимость интеграла в (4.10). Теорема 1.3 доказана.

Доказательство теоремы 1.4

Если $\mu > \max\left\{0, \frac{\gamma+1}{\alpha}\right\}$, то доказательство вытекает из теоремы 1.3 и равенства

$$\widetilde{g}(x,a,\gamma,\alpha,\mu) = g(x,a,\gamma,\alpha,\mu) - 2^{\gamma+1} g\left(2^\alpha x, \frac{a+1}{2}, \gamma,\alpha,\mu\right), \quad x > 0.$$

Если $\mu > \max\left\{0, \frac{\gamma}{\alpha}\right\}$, то доказательство такое же, как и доказательство теоремы 1.3. Следует учесть, что в этом случае при всех $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\mu > \max\left\{0, \frac{\gamma}{\alpha}\right\}$, $x > 0$ и $\max\left\{0, \frac{\gamma}{\alpha}\right\} < \beta < \mu$ справедливо равенство

$$\widetilde{g}(x,a,\gamma,\alpha,\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \widetilde{G}(s)\,ds,$$

где $\widetilde{G}(s) = \frac{\Gamma(\mu-s)\Gamma(s)}{\Gamma(\mu)} x^{-s}\widetilde{\zeta}(\alpha s-\gamma, a)$.

5. Доказательство теорем 2.1, 2.2 и 2.3

Лемма 5.1. *Пусть $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\alpha > 0$. Тогда не существуют такие постоянные $p, \beta, c \in \mathbb{R}$, для которых при $x > 0$ выполнялось бы одно из тождеств $x^\beta e^{p\,x} f(x,a,\gamma,\alpha) \equiv c$ или $x^\beta e^{p\,x}\widetilde{f}(x,a,\gamma,\alpha) \equiv c$.*

Доказательство. Предположим, что $x^\beta e^{p\,x} f(x,a,\gamma,\alpha) \equiv c$, $x > 0$. Тогда $c > 0$ и из асимптотики $f(x,a,\gamma,\alpha) \sim a^\gamma e^{-a^\alpha x}$, $x \to +\infty$, вытекает, что $p = a^\alpha$ (если $p > a^\alpha$ или $p < a^\alpha$, то, соответственно, $c = +\infty$ или $c = 0$, что невозможно). Тогда $\beta = 0$ (если $\beta > 0$ или $\beta < 0$, то, соответственно, $c = +\infty$ или $c = 0$, что невозможно) и $c = a^\gamma$. Поэтому $f(x,a,\gamma,\alpha) \equiv a^\gamma e^{-a^\alpha\,x}$, $x > 0$, но $f(x,a,\gamma,\alpha) > a^\gamma e^{-a^\alpha\,x}$ при всех $x > 0$.

Предположим, что $x^\beta e^{p\,x}\widetilde{f}(x,a,\gamma,\alpha) \equiv c$, $x > 0$. Из асимптотики $\widetilde{f}(x,a,\gamma,\alpha) \sim a^\gamma e^{-a^\alpha x}$, $x \to +\infty$, вытекает, что $c > 0$. Аналогично, как и выше, получаем, что $\widetilde{f}(x,a,\gamma,\alpha) \equiv a^\gamma e^{-a^\alpha\,x}$, $x > 0$. Тогда $\widetilde{f}(x,a+1,\gamma,\alpha) \equiv a^\gamma e^{-a^\alpha\,x} - \widetilde{f}(x,a,\gamma,\alpha) \equiv 0$, $x > 0$, но $\widetilde{f}(x,a+1,\gamma,\alpha) > 0$ при больших $x > 0$. Лемма 5.1 доказана. □

Доказательство теоремы 2.1

Для $a > 0$, $\gamma + 1 > 0$, $\alpha > 0$, $\mu > \frac{\gamma+1}{\alpha}$, $p \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$ определим следующую функцию переменной $x > 0$

$$\varphi(x,a,\gamma,\alpha,\mu,c,p) := \frac{c}{(p+x)^{\mu-\frac{\gamma+1}{\alpha}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\mu - \frac{\gamma+1}{\alpha}\right)}{\Gamma(\mu)} - S(x,a,\gamma,\alpha,\mu).$$

Легко проверить, что при всех $x > 0$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left\{\varphi(x,a,\gamma,\alpha,\mu,c,p)\right\} \\ &\qquad\qquad = \frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}\varphi(x,a,\gamma,\alpha,\mu+k,c,p), \\ &\varphi(x,a,\gamma,\alpha,\mu,c,p) \\ &\qquad = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}t^{\mu-\frac{\gamma+1}{\alpha}-1}\left(c\,e^{-pt} - t^{\frac{\gamma+1}{\alpha}} f(t,a,\gamma,\alpha)\right)dt. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Интегральное представление в (5.1) вытекает из неравенств $\mu > \frac{\gamma+1}{\alpha}$, $p \geq 0$ и асимптотик: $f(t,a,\gamma,\alpha) \sim a^\gamma e^{-a^\alpha t}$, $t \to +\infty$, и $f(t,a,\gamma,\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}\Gamma\big(\frac{\gamma+1}{\alpha}\big)t^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}}$, $t \to +0$ (см. теорему 1.1). Из этих асимптотик вытекает также, что $A_p(a,\gamma,\alpha) < +\infty \iff p < a^\alpha$ и $B_q(a,\gamma,\alpha) > 0 \iff q \geq a^\alpha$. Далее воспользуемся следующей теоремой [24–26].

Теорема 5.1 (Бернштейн–Хаусдорф–Уиддер). *Следующие два условия эквивалентны:*

1. *Функция $f \in C^\infty(0,+\infty)$ и неравенство $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$ выполняется для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $x > 0$.*
2. *$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,d\mu(t)$, $x > 0$, где μ неотрицательная борелевская мера на $[0,+\infty)$ такая, что интеграл сходится для всех $x > 0$. При этом мера μ конечна на $[0,+\infty)$ тогда и только тогда, когда $f(+0) < +\infty$.*

Из теоремы Бернштейна–Хаусдорфа–Уиддера и равенств (5.1) вытекает, что выполнение неравенств (2.7) для всех $\mu > \mu_0$ и $x > 0$ эквивалентно выполнению при всех $t > 0$ неравенств $Ae^{-pt} - t^{\frac{\gamma+1}{\alpha}} f(t,a,\gamma,\alpha) \geq 0$ и $Be^{-qt} - t^{\frac{\gamma+1}{\alpha}} f(t,a,\gamma,\alpha) \leq 0$. Последние неравенства эквивалентны неравенствам $A \geq A_p(a,\gamma,\alpha)$ и $B \leq B_q(a,\gamma,\alpha)$.

Из (1.7) вытекает, что $B_q(a,\gamma,\alpha) \leq \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{\alpha})}{\alpha} \leq A_p(a,\gamma,\alpha)$ при $0 \leq p < a^2 \leq q$. Если $a \geq 1$, то (см. неравенство (2.5) и текст ниже этого неравенства) $\frac{1}{2} \leq B_q(a,1,2)$, $A_p(a,1,2) \leq \frac{1}{2}$ при $0 \leq p \leq m(\infty,a)$, $q \geq a^2$ и, значит, $B_q(a,1,2) = A_p(a,1,2) = \frac{1}{2}$ при всех $a \geq 1$ и указанных p и q, в частности, при $p \in [0,a^2-a]$ (т.к. $a^2 - a < m(\infty,a)$).

Пусть $0 \leq p < a^\alpha$, $A \geq A_p(a,\gamma,\alpha)$ и $q \geq a^\alpha$, $B \leq B_q(a,\gamma,\alpha)$. Если при некотором $x \geq 0$ ($x > 0$, если $p = 0$) правое или левое неравенство в (2.7) обращается в равенство, то из интегрального представления (5.1) вытекает, что $A \equiv e^{pt}t^{\frac{\gamma+1}{\alpha}} f(t,a,\gamma,\alpha)$ или $B \equiv e^{qt}t^{\frac{\gamma+1}{\alpha}} f(t,a,\gamma,\alpha)$ при $t > 0$, что противоречит лемме 5.1. Теорема 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2

Для $a > 0$, $\gamma + 1 < 0$, $\alpha > 0$, $\mu > 0$, $p \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$ определим функцию

$$\psi(x, a, \gamma, \alpha, \mu, c, p) := \frac{c}{(p+x)^{\mu}} - S(x, a, \gamma, \alpha, \mu),\ x > 0.$$

Легко проверить, что при всех $x > 0$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left\{\psi(x, a, \gamma, \alpha, \mu, c, p)\right\} &= \frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}\psi(x, a, \gamma, \alpha, \mu+k, c, p), \\ \psi(x, a, \gamma, \alpha, \mu, c, p) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}t^{\mu-1}\left(c\, e^{-pt} - f(t, a, \gamma, \alpha)\right)\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Интегральное представление в (5.2) вытекает из неравенств $\mu > 0$, $p \geq 0$, асимптотики $f(t, a, \gamma, \alpha) \sim a^{\gamma} e^{-a^{\alpha} t}$, $t \to +\infty$, и равенства $f(+0, a, \gamma, \alpha) = \zeta(-\gamma, a) > 0$ (см. теорему 1.1). Из этих соотношений вытекает также, что $D_p(a, \gamma, \alpha) < +\infty \iff p \leq a^{\alpha}$ и $E_q(a, \gamma, \alpha) > 0 \iff q \geq a^{\alpha}$. Если $p \leq a^{\alpha}$, то функция $e^{pt} f(t, a, \gamma, \alpha)$ строго убывает по $t > 0$. Поэтому $D_p(a, \gamma, \alpha) = \zeta(-\gamma, a)$ при всех $p \leq a^{\alpha}$ и $E_{a^{\alpha}}(a, \gamma, \alpha) = a^{\gamma}$.

Из теоремы Бернштейна–Хаусдорфа–Уиддера и равенств (5.2) вытекает, что выполнение неравенств (2.9) для всех $\mu > \mu_0$ и $x > 0$ эквивалентно выполнению при всех $t > 0$ неравенств $De^{-pt} - f(t, a, \gamma, \alpha) \geq 0$ и $Ee^{-qt} - f(t, a, \gamma, \alpha) \leq 0$. Последние два неравенства эквивалентны неравенствам $D \geq D_p(a, \gamma, \alpha)$ и $E \leq E_q(a, \gamma, \alpha)$.

Пусть $0 \leq p \leq a^{\alpha}$, $D \geq D_p(a, \gamma, \alpha)$ и $q \geq a^{\alpha}$, $E \leq E_q(a, \gamma, \alpha)$. Если при некотором $x \geq 0$ ($x > 0$, если $p = 0$) правое или левое неравенство в (2.9) обращается в равенство, то из интегрального представления (5.2) вытекает, что $D \equiv e^{pt} f(t, a, \gamma, \alpha)$ или $E \equiv e^{qt} f(t, a, \gamma, \alpha)$ при $t > 0$, чего не может быть (см. лемму 5.1). Теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.3

Для $a > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\mu > \max\{\frac{\gamma}{\alpha}; 0\}$, $p \geq 0$, $c \in \mathbb{R}$ определим функцию

$$\widetilde{\psi}(x, a, \gamma, \alpha, \mu, c, p) := \frac{c}{(p+x)^{\mu}} - \widetilde{S}(x, a, \gamma, \alpha, \mu),\ x > 0.$$

Легко проверить, что при всех $x > 0$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left\{\widetilde{\psi}(x,a,\gamma,\alpha,\mu,c,p)\right\} = \frac{\Gamma(\mu+k)}{\Gamma(\mu)}\widetilde{\psi}(x,a,\gamma,\alpha,\mu+k,c,p),\\ &\widetilde{\psi}(x,a,\gamma,\alpha,\mu,c,p) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt}t^{\mu-1}\left(c\,e^{-pt}-\widetilde{f}(t,a,\gamma,\alpha)\right)dt. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Интегральное представление в (5.3) вытекает из неравенств $\mu > \max\{\frac{\gamma}{\alpha};0\}$, $p \ge 0$, асимптотики $\widetilde{f}(t,a,\gamma,\alpha) \sim a^{\gamma}e^{-a^{\alpha}t}$, $t \to +\infty$, и равенства $\widetilde{f}(+0,a,\gamma,\alpha) = \widetilde{\zeta}(-\gamma,a)$ (см. теорему 1.2). Из этих соотношений вытекает также, что $0 < C_p(a,\gamma,\alpha) < +\infty$ при $p \le a^{\alpha}$ и $C_p(a,\gamma,\alpha) = +\infty$ при $p > a^{\alpha}$, а также $F_q(a,\gamma,\alpha) > -\infty$.

Из теоремы Бернштейна–Хаусдорфа–Уиддера и равенств (5.3) вытекает, что выполнение неравенств (2.12) для всех $\mu > \mu_0$ и $x > 0$ эквивалентно выполнению при всех $t > 0$ неравенств $Ce^{-pt} - \widetilde{f}(t,a,\gamma,\alpha) \ge 0$ и $Fe^{-qt} - \widetilde{f}(t,a,\gamma,\alpha) \le 0$. Последние два неравенства эквивалентны неравенствам $C \ge C_p(a,\gamma,\alpha)$ и $F \le F_q(a,\gamma,\alpha)$.

Пусть $0 \le p \le a^{\alpha}$, $C \ge C_p(a,\gamma,\alpha)$ и $q \ge 0$, $F \le F_q(a,\gamma,\alpha)$. Если при некотором $x \ge 0$ ($x > 0$, если $p = 0$ или $q = 0$) правое или левое неравенство в (2.12) обращается в равенство, то из представления (5.3) вытекает, что $C \equiv e^{pt}\widetilde{f}(t,a,\gamma,\alpha)$ или $F \equiv e^{qt}\widetilde{f}(t,a,\gamma,\alpha)$ при $t > 0$, что невозможно в силу леммы 5.1. Теорема 2.3 доказана.

Литература

[1] А. Ф. Тиман, *Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона* // Докл. АН СССР, **74** (1950), N 1, 17–20.

[2] Л. В. Малей, *Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона* // Докл. АН БССР. Сер. физ.-техн., **3** (1961), 25–32.

[3] Э. Л. Штарк, *Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из* Lip 1 *от сингулярного интеграла Абеля-Пуассона* // Матем. заметки, **13** (1973), N 1, 21–28.

[4] В. А. Баскаков, *О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля-Пуассона* // Матем. заметки, **17** (1975), N 2, 169–180.

[5] К. М. Жигалло, Ю. И. Харкевич, *Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона* // Укр. мат. журн., **54** (2002), N 1, 43–52.

[6] В. П. Заставный, *О рядах, возникающих при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона* // Матем. заметки, **86** (2009), N 4, 497–511.

[7] А. О. Гельфонд, *Вычеты и их приложения*, М., Наука, 1966.

[8] В. П. Заставный, *Обобщённая формула Эйлера-Маклорена и её применение* // Труды ИПММ НАН Украины, **17** (2008), 51–60.

[9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 1927.

[10] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции, том 1*, М., Наука, 1973.

[11] Э. Я. Риекстыньш, *Оценки остатков в асимптотических разложениях*, Рига, Зинатне, 1986.

[12] Е. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, Москва, ОГИЗ, 1948.

[13] É. L. Mathieu, *Traité de Physique Mathématique. VI-VII: Théory de l'Élasticité des Corps Solides (Part 2)*, Paris, Gauthier-Villars, 1890.

[14] L. Berg, *Über eine Abschätzung von Mathieu* // Math. Nachr., **7** (1952), 257–259.

[15] J. G. van der Corput, L. O. Heflinger, *On the inequality of Mathieu* // Indagationes Mathematicae, **18** (1956), 15–20.

[16] E. Makai, *On the inequality of Mathieu* // Publ. Math. Debrecen, **5** (1957), 204–205.

[17] A. Elbert, *Asymptotic expansion and continued fraction for Mathieu's series* // Period. Math. Hungar., **13** (1982), 1–8.

[18] H. Alzer, J. L. Brenner, O. G. Ruehr, *On Mathieu's inequality* // J. Math. Anal. Appl., **218** (1998), 607–610.

[19] V. P. Zastavnyi, *Mathieu's series: inequalities, asymptotics and positive definiteness*, http://arxiv.org/abs/0901.1104v1 (2009).

[20] P. H. Diananda, *Some Inequalities Related to an Inequality of Mathieu* // Math. Ann., **250** (1980), 95–98.

[21] A. Hoorfar, F. Qi, *Some new bounds for Mathieu's series* // Abstract and Applied Analysis, **2007** (2007), Article ID 94854, 10 pages.

[22] Ž. Tomovski, R. Hilfer, *Some bounds for alternating Mathieu type series* // Journal of Mathematical Inequalities, **2** (2008), N 1, 17–26.

[23] V. P. Zastavnyi, *On a paper of Ž. Tomovski and R. Hilfer*, http://arxiv.org/abs/0901.4766v1 (2009).

[24] S. N. Bernstein, *Sur les fonctions absolument monotones* // Acta Math., **52** (1929), N 1, 1–66.

[25] F. Hausdorff, *Summationsmethoden und Momentfolgen. II* // Math. Zeitschrift, **9** (1921), 280–299.

[26] D. V. Widder, *Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral* // Trans. Amer. Math. Soc., **33** (1931), N 4, 851—892.

Сведения об авторах

Виктор П. Заставный

Донецкий национальный университет,
Университетская 24,
Донецк, 34001,
Украина
E-Mail: zastavn@rambler.ru