Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 3, 338 – 370

Влияние неоднородности абсорбции на процесс мгновенной компактификации носителя в задаче Коши для квазилинейного вырождающегося уравнения

Сергей П. Дегтярев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Изучается явление мгновенной компактификации носителя для параболического вырождающегося уравнения с двойной нелинейностью и неоднородной абсорбцией в случае медленной диффузии, когда начальные данные Коши являются, вообще говоря, радоновскими мерами и могут расти на бесконечности. В терминах локального поведения массы начальных данных и поведения неоднородности абсорбции на бесконечности для неотрицательного решения получено необходимое и достаточное условие наличия явления мгновенной компактификации носителя и в тех же терминах получены точные по порядку двусторонние оценки размеров носителя решения.

2000 MSC. 35K55, 35K65.

Ключевые слова и фразы. Мгновенная компактификация носителя, параболическое уравнение с двойной нелинейностью, двусторонние оценки носителя.

1. Постановка задачи и основной результат

В области $\mathbb{R}^N \times [0,T]$, N — размерность пространства $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, рассмотрим следующую задачу Коши для неизвестной функции $u(x,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\beta-1} u(x,t)) - \nabla(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + h(x,t) |u|^{\lambda-1} u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$|u|^{\beta-1} u(x,0) = |u_0|^{\beta-1} u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.2)$$

Статья поступила в редакцию 30.06.2009

где $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N})$, $\beta > 0$, $p > 0$, $\lambda > 0$ — заданные параметры, $h(x,t)$ — заданная строго положительная функция, а заданные начальные данные $|u_0|^{\beta-1} u_0(x)$ могут быть локально конечной радоновской мерой. Мы рассматриваем случай медленной диффузии и сильной абсорбции, что выражается в следующем ограничении на параметры задачи

$$\beta > 0, \quad p > 1 + \beta, \quad \lambda < \beta. \tag{1.3}$$

Строго положительная функция $h(x,t)$, растущая либо убывающая на бесконечности, предполагается, для простоты, непрерывной и удовлетворяющей следующему условию удвоения

$$C^{-1} h(k^{-1}x, \tau) \leq h(x,t) \leq C h(kx, \tau), \quad k \in [1,2], \ \tau \in [0,t], \tag{1.4}$$

где здесь и всюду ниже через C, γ, b мы будем обозначать все различные абсолютные константы либо константы, зависящие только от параметров задачи $\beta, p, \lambda, N, u_0$.

Кроме того, на протяжении всего текста статьи мы используем обозначения

$$d = p - 1 - \beta > 0, \quad d_\lambda = p - 1 - \lambda, \quad \Delta = \beta - \lambda,$$

$$k = Nd + \beta p, \quad k_\lambda = N d_\lambda + \beta p. \tag{1.5}$$

В случае однородной абсорбции, то есть когда $h(x,t) \equiv 1$, из работ, например, [1–12, 17] известно, что, если начальная функция $|u_0|^{\beta-1} u_0(x)$ является достаточно регулярной и убывающей на бесконечности (возможно, в некотором интегральном смысле), а также выполнено (1.3), то задача (1.1), (1.2) разрешима в слабом смысле и наблюдается явление мгновенной компактификации носителя решения, когда, несмотря на то, что носитель начальной функции может совпадать со всем пространством $\mathbb{R}^N$, у решения он становится компактным в любой сколь угодно малый момент времени $t > 0$.

При этом точные локальные энергетические методы, которые и мы применяем в данной работе, впервые были применены в работах [1, 2], что позволило рассмотреть широкий класс локально суммируемых с некоторой степенью начальных данных (в отличие от рассматривавшихся ранее непрерывных данных) и получить конкретные оценки размеров носителя решения. Более того, в работах [1, 2] был поставлен вопрос о поведении носителя решения в случае начальных данных, представляющих собой локально конечные меры Радона. Именно рассмотрение этого вопроса позволило в дальнейшем получить точные по порядку двусторонние оценки размеров носителя.

Настоящая работа посвящена изучению данного явления для задачи (1.1), (1.2) в случае неоднородной абсорбции (неоднородность моделируется наличием в уравнении растущего либо убывающего потенциала $h(x,t)$) и получению точных по порядку оценок размеров носителя слабого решения указанной задачи в терминах поведения начальной функции и потенциала, когда начальные данные являются локально конечными мерами.

Вопрос влияния неоднородности абсорбции на процесс мгновенной компактификации носителя решения рассматривался ранее в ряде работ. Отметим работы [5,8,12,13], где изучалась рассматриваемая нами ситуация неоднородной абсорбции и было при этом, в частности, выяснено то замечательное обстоятельство, что при растущем на бесконечности потенциале $h(x,t)$ явление мгновенной компактификации носителя наблюдается даже при растущих начальных данных. Однако эти результаты не содержат точных по порядку оценок размеров носителя в рассматриваемой нами ситуации, получение которых является, как отмечено, одной из целей данной работы.

Таким образом, целью данной работы является изучение влияния неоднородности абсорбции $h(x,t)$ на явление мгновенной компактификации носителя решения и при этом, с одной стороны, максимально расширить класс возможных начальных функций до локально конечных радоновских мер, а с другой стороны, получить точную по порядку двустороннюю оценку размера носителя решения с учетом поведения на бесконечности потенциала $h(x,t)$.

Что касается метода, применяемого нами в данной работе, то мы используем метод локальных интегральных оценок, развитый в работах [14–16].

Чтобы сформулировать основной результат введем еще несколько определений и обозначений.

Под слабым решением задачи (1.1), (1.2) на интервале времени $[0,T]$ мы понимаем измеримую функцию, обладающую следующими свойствами:

1) для любой функции $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ отображение

$$t \in [0,T] \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1} u(x,t)\zeta(x)\,dx$$

непрерывно;

2) для любой финитной по x достаточно гладкой функции $\eta(x,t)$ выполнено интегральное тождество

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1} u(x,t)\eta\, dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} u_{x_i}\eta_{x_i}\, dx\, d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} h(x,\tau)\, |u|^{\lambda-1} u\eta\, dx\, d\tau \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{\beta-1} u_0(x)\eta(x,0)\, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1} u(x,\tau)\eta_\tau(x,\tau)\, dx\, d\tau.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Из работ [18, 19] следует, что задача (1.1), (1.2) при заданном соотношении параметров (1.3) разрешима для начальных функций из $L_{1,loc}(\mathbb{R}^N)$ или для локально конечных радоновских мер в качестве начальных данных, не слишком растущих на бесконечности. А именно, пусть для $R > 0$

$$
|||u_0|||_R \equiv \sup_{\rho > R} \rho^{-\frac{k}{d}} \int\limits_{B_\rho(0)} \left| |u_0|^{\beta-1} u_0(x) \right| dx < \infty,
$$

где здесь и всюду ниже $B_\rho(x_0)$ означает шар радиуса ρ с центром в x_0, а интеграл по $B_\rho(x_0)$ от модуля начальной функции в случае, если эта функция представляет собой радоновскую меру, означает полную вариацию этой меры по шару $B_\rho(x_0)$. Тогда известно ([18,19]), что на некотором интервале времени $[0, T]$ для решения задачи (1.1), (1.2) справедлива оценка

$$
|||u(x,t)|||_R \le C\, |||u_0|||_R\,. \tag{1.7}
$$

Более того, из результатов работ [18, 19] следует, что слабое решение задачи локально ограничено при $t > 0$ и, кроме того, $u_{x_i} \in L_{p,loc}(\mathbb{R}^N \times (0,T))$, а также выполнена следующая оценка максимума модуля решения

$$
\sup |u(\cdot,t)|_{B_\rho(0)} \le C t^{-N/k} \rho^{p/d}\, |||u_0|||_R\,,\ \rho \ge R. \tag{1.8}
$$

Это, в частности, означает, что интегральное тождество (1.6) справедливо для финитных по x пробных функций $\eta(x,t) \in L_{p,loc}((0,T), W^1_{p,loc}(\mathbb{R}^N))$. Отметим также, что автору неизвестна единственность слабого решения задачи (1.1), (1.2) когда одновременно $\beta \ne 1$ и $p \ne 2$

и начальные данные не принадлежат $L_1(\mathbb{R}^N)$ (как в нашем случае, когда они принадлежат только $L_{1,loc}(\mathbb{R}^N)$). В то же время единственность сильных решений рассматриваемой задачи следует из результатов работы [20]. В связи с этим, ниже при доказательстве оценки снизу (1.15) размеров носителя решения мы считаем наше решение тем слабым решением, которое является пределом решений с гладкими финитными начальными данными (как и получается слабое решение в работах [18, 19]).

Чтобы сформулировать основной результат введем важный для нас показатель

$$\varkappa = \frac{p-1-\lambda}{p(\beta-\lambda)} = \frac{d_\lambda}{p\Delta} > 0. \tag{1.9}$$

Введем также другой показатель, связанный с неоднородностью абсорбции и присутствием в уравнении потенциала

$$\mu = \varkappa - \frac{1}{p} = \frac{p-1-\beta}{p(\beta-\lambda)} = \frac{d}{p\Delta} > 0. \tag{1.10}$$

Введем еще важный для нас "характерный радиус", связанный с заданной точкой $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$. Зафиксируем $\varepsilon_0 \in (0, 1/4)$ и положим здесь и всюду далее

$$D \equiv D(x_0, t) = \min\{t^{\varkappa} h^{\mu}(x_0, t),\ \varepsilon_0 |x_0|\}. \tag{1.11}$$

Отметим, что, так как мы рассматриваем только достаточно большие $|x_0|$, то при функциях $h(x, t)$, убывающих или не слишком сильно растущих на бесконечности, мы имеем $D = t^{\varkappa} h^{\mu}(x_0, t)$.

Кроме того, определим функцию

$$\begin{aligned}\varphi_t(x_0) = h^{-\frac{\beta}{\beta-\lambda}}(x_0, t) \frac{1}{\omega_N D^N} \int\limits_{|x-x_0|<D} |u_0(x)|^{\beta}\, dx \\ \equiv h^{-\frac{\beta}{\beta-\lambda}}(x_0, t) \fint\limits_{B_D(x_0)} |u_0(x)|^{\beta}\, dx,\end{aligned} \tag{1.12}$$

где ω_N объем единичного шара в $\mathbb{R}^N$, а также функцию

$$\varphi_t(\rho) \equiv \sup_{|x_0|=\rho} \varphi_t(x_0). \tag{1.13}$$

Теорема 1.1. *Если начальная функция в* (1.2) *неотрицательна (неположительна), то решение задачи* (1.1), (1.2) *обладает свойством мгновенной компактификации носителя тогда и только тогда, когда для начальной функции* $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ *(которая может быть радоновской мерой) выполнено условие*

$$\varphi_t(\rho) \to 0, \quad \rho \to \infty$$

при каком-либо $t > 0$ *(в этом случае, как легко проверить, сформулированное условие выполнено при любом* $t > 0$*). При этом существуют такие, зависящие от* $u_0(x)$ *константы* t_0, γ_0, γ_1 M_1, *что на интервале времени* $[0, t_0]$ *справедливы следующие оценки сверху и снизу размеров носителя решения*

$$S(t) \leq C\varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}), \tag{1.14}$$

$$S(t) \geq \varphi_{M_1 t}^{-1}(\gamma_1 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}), \tag{1.15}$$

где при нестрого монотонной функции $\varphi_t(\rho)$

$$\varphi_t^{-1}(s) \equiv \inf_{\rho} \left\{\rho : \varphi_t(k) < s,\ k > \rho\right\}. \tag{1.16}$$

Если же начальная функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, произвольно меняет знак, то оценка (1.14) *размера носителя сверху имеет место и в этом случае.*

Замечание 1.1. Из определения функции $\varphi_t(\rho)$ и из оценки (1.14) следует, что при растущей на бесконечности функции $h(x,t)$ мгновенная компактификация носителя решения наблюдается даже при начальных данных, растущих на бесконечности — точное соотношение возможного роста дается формулой (1.14). Кроме того, если $h(x,t)$ убывает на бесконечности, то от начальных данных требуется достаточно быстрое убывание, чтобы мгновенная компактификация имела место. Например, если $h(x,t)$ и $u_0(x)$ имеют степенное поведение на бесконечности, то есть $h(x,t) \sim |x|^q$, $u_0(x) \sim |x|^a$, $q, a \in \mathbb{R}$, то явление мгновенной компактификации носителя решения наблюдается тогда и только тогда, когда $-q + a(\beta - \lambda) < 0$, при этом $S(t) \sim t^{\frac{1}{-q+a(\beta-\lambda)}}$.

Замечание 1.2. Переходя к доказательству теоремы 1.1, отметим, что в соответствии с формулировкой этой теоремы мы будем в параграфах 2–5 данной статьи считать начальные данные, а, следовательно, и решение неотрицательными, не оговаривая это каждый раз отдельно. (При этом все приведенные в п. 2–4 доказательства и рассуждения не меняются для начальных данных и решений произвольного знака и остаются справедливыми.)

Отметим также, что при получении нужных нам интегральных соотношений мы будем умножать уравнение (1.1) на различные пробные функции с последующим интегрированием. Эти операции оправдываются выбором в интегральном тождестве (1.6) в качестве пробных функций срезок от стекловских усреднений решения, произведением нужных промежуточных операций и последующим предельным переходом по параметру усреднения в окончательном соотношении. Этот процесс вполне стандартен и описан, например, в [21], поэтому мы не останавливаемся на этом подробно.

Последующие параграфы статьи посвящены доказательству теоремы 1.1.

2. Условие на локальную энергию для локального обращения решения в ноль

В этом пункте мы докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть* $R > 0$, $\sigma \in (0,1)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $D = D(x_0,t)$ *определено в* (1.11). *Пусть* $0 < R_1 < R_2$, $R_2 = RD$, $R_1 = (1-\sigma)R_2$, $B_{R_i} = B_{R_i}(x_0) = \{x : |x - x_0| < R_i\}$, *и пусть здесь и ниже для краткости* $h = h(x_0,t)$. *Тогда существует константа* $\gamma_2 = \gamma_2(R,\sigma)$, *такая, что, если*

$$Y(t/2,R_2) \equiv \sup_{t/2<\tau<t} \int\limits_{B_{R_2}} u^{1+\beta}(x,\tau)\,dx + \int\limits_{t/2}^{t}\int\limits_{B_{R_2}} |\nabla u|^p \,dx\,d\tau$$

$$+ \int\limits_{t/2}^{t}\int\limits_{B_{R_2}} h(x,\tau)u^{1+\lambda}\,dx\,d\tau \le \gamma_2 t^{\frac{Nd_\lambda+p(1+\beta)}{p(\beta-\lambda)}} h^{\frac{Nd+p(1+\beta)}{p(\beta-\lambda)}}, \quad (2.1)$$

то $u(x,t) \equiv 0$ *на множестве* $B_{R_1}(x_0) \times [3t/4, t]$.

Доказательство. Пусть (для $n = 0,1,\dots$) $R_n = R_1 + (R_2 - R_1)2^{-n}$, $\overline{R}_n = (R_n + R_{n+1})/2$, $t_n = \frac{3t}{4} - \frac{t}{4}2^{-n}$, $\overline{t}_n = (t_n + t_{n+1})/2$, $B_n = B_{R_n}$ — сужающиеся концентрические шары с центром в x_0, $\overline{B}_n = B_{\overline{R}_n}$, $Q_n = B_n \times [t_n, t]$, $\overline{Q}_n = \overline{B}_n \times [\overline{t}_n, t]$. Пусть, далее, $\zeta_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ — срезающая функция для цилиндра Q_n, такая, что $\zeta_n \equiv 1$ на Q_{n+1}, $\zeta_n \ge 1/2$ на $\overline{Q}_n$, $\zeta_n \equiv 0$ вне Q_n, $|\nabla\zeta| \le C2^n(R_2 - R_1)^{-1}$, $|\zeta_t| \le C2^n t^{-1}$. Пусть еще ξ_n такие гладкие срезающие функции цилиндра $\overline{Q}_n$, что $\xi_n \equiv 1$ на Q_{n+1}, $\xi_n \equiv 0$ вне $\overline{Q}_n$, $|\nabla\xi| \le C2^n(R_2 - R_1)^{-1}$, $|\xi_t| \le C2^n t^{-1}$.

Умножим обе части уравнения (1.1) на $u(x,\tau)\xi_n^s(x,\tau)$, $s>p$, и проинтегрируем по $\overline{Q}_n$. Получим после интегрирования по частям:

$$\frac{1}{1+\beta}\int\limits_{\overline{B}_n} u^{1+\beta}(x,t)\xi_n^s\,dx+\int\limits_{\bar{t}_n}^{t}\int\limits_{\overline{B}_n}|\nabla u|^p\,\xi_n^s\,dx\,d\tau$$
$$+\int\limits_{\bar{t}_n}^{t}\int\limits_{\overline{B}_n}h(x,\tau)u^{1+\lambda}\xi_n^s\,dx\,d\tau=\frac{s}{1+\beta}\int\limits_{\bar{t}_n}^{t}\int\limits_{\overline{B}_n}u^{1+\beta}\xi_n^{s-1}\xi_{n\tau}\,dx\,d\tau$$
$$-s\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\bar{t}_n}^{t}\int\limits_{\overline{B}_n}|\nabla u|^{p-2}\,u_{x_i}u\xi_{nx_i}\xi_n^{s-1}\,dx\,d\tau\equiv I_1+I_2.$$

Оценим сумму I_2 по неравенству Юнга с $\varepsilon=1/2$ следующим образом

$$|I_2|\le C\iint\limits_{\overline{Q}_n}|\nabla u|^{p-1}\,\xi_n^s u\,|\nabla\xi_n|\,\xi_n^{-1}\,dx\,d\tau$$
$$\le\frac{1}{2}\iint\limits_{\overline{Q}_n}|\nabla u|^p\,\xi_n^s\,dx\,d\tau+C\iint\limits_{\overline{Q}_n}u^p\xi_n^{s-p}\,|\nabla\xi_n|^p\,dx\,d\tau.$$

Подставляя эту оценку в предыдущее неравенство, с учетом свойств функции $\xi_n(x,\tau)$, ввиду произвольности t, получаем соотношение

$$\sup_{t_{n+1}<\tau<t}\int\limits_{B_{n+1}}u^{1+\beta}(x,\tau)\,dx+\iint\limits_{Q_{n+1}}|\nabla u|^p\,dx\,d\tau+\iint\limits_{Q_{n+1}}h(x,\tau)u^{1+\lambda}\,dx\,d\tau$$
$$\le C2^n\left(t^{-1}\iint\limits_{\overline{Q}_n}u^{1+\beta}\,dx\,d\tau+(R_2-R_1)^{-p}\iint\limits_{\overline{Q}_n}u^p\,dx\,d\tau\right).\quad(2.2)$$

Определим функции $v_n(x,\tau)=\zeta_n(x,\tau)u(x,\tau)$. Заметим, что ввиду свойств функции $\zeta_n(x,\tau)$,

$$\iint\limits_{Q_{n+1}}|\nabla v_{n+1}|^p\,dx\,d\tau\le C\iint\limits_{Q_{n+1}}|\nabla u|^p\,dx\,d\tau+C2^{np}(R_2-R_1)^{-p}\iint\limits_{\overline{Q}_n}u^p\,dx\,d\tau.$$

Таким образом, учитывая то, что $\zeta_n\ge 1/2$ на $\overline{Q}_n$, из последних двух соотношений получаем, вводя величины Y_n:

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1} \equiv \sup_{t_{n+1}<\tau<t} \int\limits_{B_{n+1}} v_{n+1}^{1+\beta}(x,\tau)\,dx \\
+ \iint\limits_{Q_{n+1}} |\nabla v_{n+1}|^p\, dx\,d\tau + \iint\limits_{Q_{n+1}} h(x,\tau) v_{n+1}^{1+\lambda}\,dx\,d\tau \\
\le C2^{np}\Bigg(t^{-1}\iint\limits_{Q_n} v_n^{1+\beta}\,dx\,d\tau + (R_2-R_1)^{-p}\iint\limits_{Q_n} v_n^p\,dx\,d\tau\Bigg) \\
\equiv C2^{np}(I_1+I_2). \quad (2.3)
\end{aligned}
$$

Рассмотрим отдельно случаи $D = t^{\varkappa}h^{(\mu)} < \varepsilon_0|x_0|$ и $D = \varepsilon_0|x_0| \le t^{\varkappa}h^{(\mu)}$. Пусть сначала $D = t^{\varkappa}h^{(\mu)}$.

Рассмотрим сначала величину I_1 в правой части последнего неравенства. Оценим эту величину следующим образом

$$
I_1 \le t^{-1}\Bigg(\sup_{t_n<\tau<t}\int\limits_{B_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx\Bigg)^{1-\alpha}\int\limits_{t_n}^{t}\Bigg(\int\limits_{B_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx\Bigg)^{\alpha} d\tau, \quad (2.4)
$$

где $\alpha \in (0,1)$ выберем ниже. Применим к интегралу по B_n в конце последнего соотношения неравенство Ниренберга–Гальярдо и продолжим получающееся неравенство с учетом (1.4):

$$
\begin{aligned}
&\Bigg(\int\limits_{B_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx\Bigg)^{\alpha} \\
&\le C\Bigg(\int\limits_{B_n}|\nabla v_n|^p\,dx\Bigg)^{\alpha\omega_0\frac{1+\beta}{p}}\Bigg(\int\limits_{B_n} v_n^{1+\lambda}(x,\tau)\,dx\Bigg)^{\alpha(1-\omega_0)\frac{1+\beta}{1+\lambda}} \\
&\le Ch^{-\alpha(1-\omega_0)\frac{1+\beta}{1+\lambda}}\Bigg(\int\limits_{B_n}|\nabla v_n|^p\,dx\Bigg)^{\alpha\omega_0\frac{1+\beta}{p}} \\
&\times\Bigg(\int\limits_{B_n} h(x,\tau)v_n^{1+\lambda}(x,\tau)\,dx\Bigg)^{\alpha(1-\omega_0)\frac{1+\beta}{1+\lambda}}, \quad (2.5)
\end{aligned}
$$

где ω_0 определяется из равенства

$$
\frac{1}{1+\beta} = \omega_0\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{N}\Big) + (1-\omega_0)\frac{1}{1+\lambda}.
$$

Подчиним теперь α условию, чтобы сумма степеней интегралов в правой части (2.5) была равна 1:

$$\alpha\omega_0\frac{1+\beta}{p}+\alpha(1-\omega_0)\frac{1+\beta}{1+\lambda}=1.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\alpha=\left(1+\omega_0\frac{1+\beta}{N}\right)^{-1}=\frac{Nd_\lambda+p(1+\lambda)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)},\quad 1-\alpha=\frac{p(\beta-1)}{Nd_r+p(1+\beta)},$$

$$\alpha(1-\omega_0)\frac{1+\beta}{1+\lambda}=\frac{Nd+p(1+\beta)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}.$$

Учитывая, что сумма степеней интегралов в правой части (2.5) равна 1, проинтегрировав неравенство (2.5) по времени и применяя сначала неравенство Гельдера, а затем неравенство Юнга, получим

$$\int\limits_{t_n}^{t}\left(\int\limits_{B_n}v_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx\right)^{\alpha}d\tau$$
$$\leq Ch^{\frac{Nd+p(1+\beta)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}}\left(\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{B_n}|\nabla v_n|^p\,dx\,d\tau+\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{B_n}h(x,\tau)v_n^{1+\lambda}(x,\tau)\,dx\,d\tau\right).$$

Таким образом, из последнего неравенства, примененного к оценке (2.4), следует, что

$$I_1\leq Ct^{-1}h^{\frac{Nd+p(1+\beta)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}}Y_n^{1+(1-\alpha)}=Ct^{-1}h^{\frac{Nd+p(1+\beta)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}}Y_n^{1+\frac{p(\beta-\lambda)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}}. \quad (2.6)$$

Рассмотрим теперь величину I_2 в (2.3). Для оценки I_2 применим к интегралу по dx по B_n неравенство Ниренберга–Гальярдо вида (оно является простым следствием обычного неравенства Ниренберга–Гальярдо)

$$\int\limits_{B_n}v_n^p\,dx\leq C\left(\int\limits_{B_n}|\nabla v_n|^p\,dx\right)^{\omega_1}$$
$$\times\left(\int\limits_{B_n}v_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx\right)^{\omega_2\frac{p}{1+\beta}}\left(\int\limits_{B_n}v_n^{1+\lambda}(x,\tau)\,dx\right)^{\omega_3\frac{p}{1+\lambda}}$$

$$\leq Ch^{-\omega_3 \frac{p}{1+\lambda}} \left(\int\limits_{B_n} |\nabla v_n|^p \, dx \right)^{\omega_1} \left(\int\limits_{B_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\, dx \right)^{\omega_2 \frac{p}{1+\beta}}$$
$$\times \left(\int\limits_{B_n} h(x,\tau) v_n^{1+\lambda}(x,\tau)\, dx \right)^{\omega_3 \frac{p}{1+\lambda}}, \quad (2.7)$$

где числа $\omega_i \in (0,1)$, $i = 1,2,3$ определяются неоднозначно и подчинены условиям

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1, \\ \frac{1}{p} = \omega_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{N}) + \omega_2 \frac{1}{1+\beta} + \omega_3 \frac{1}{1+\lambda}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Как и выше при оценке I_1, подчиним числа ω_i условию, чтобы сумма степеней первого и последнего интегралов в (2.7) была равна 1:

$$\omega_1 + \omega_3 \frac{p}{1+\lambda} = 1. \quad (2.9)$$

Из системы (2.8)–(2.9) числа ω_i определяются уже однозначно и удовлетворяют условию $\omega_i \in (0,1)$. При этом, как показывают непосредственные вычисления,

$$\omega_2 \frac{p}{1+\beta} = \frac{pd_\lambda}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}, \qquad \omega_3 \frac{p}{1+\lambda} = \frac{p(1+\beta)}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}.$$

Интегрируя (2.7) по времени, вынося $(\sup_{t_n<\tau<t} \int_{B_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\, dx)^{\omega_2 \frac{p}{1+\beta}}$ и применяя неравенства Гельдера и Юнга, с учетом (2.9) получаем

$$\int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{B_n} v_n^p \, dx\, d\tau \leq Ch^{-\frac{p(1+\beta)}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}} \left(\sup_{t_n<\tau<t} \int\limits_{B_n} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\, dx \right)^{\omega_2 \frac{p}{1+\beta}}$$
$$\times \left(\int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{B_n} |\nabla v_n|^p \, dx\, d\tau + \int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{B_n} h(x,\tau) v_n^{1+\lambda}\, dx\, d\tau \right).$$

Следовательно, используя определение R_1 и R_2, для величины I_2 в правой части (2.3), имеем оценку

$$I_2 \leq C(R\sigma)^{-p} t^{-d_\lambda/(\beta-\lambda)} h^{-\frac{p(1+\beta)}{Nd_\lambda + p(1+\beta)} - \frac{d}{\beta-\lambda}} Y_n^{1+\frac{pd_\lambda}{Nd_\lambda + p(1+\beta)}}. \quad (2.10)$$

Из (2.3), (2.6) и (2.10) следует, что

$$Y_{n+1} \le C2^{np}\Big(t^{-1}h^{-\frac{Nd+p(1+\beta)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}}Y_n^{1+\frac{p(\beta-\lambda)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}}$$
$$+ (R\sigma)^{-p}t^{-d_\lambda/(\beta-\lambda)}h^{-\frac{p(1+\beta)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}-\frac{d}{\beta-\lambda}}Y_n^{1+\frac{pd_\lambda}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}}\Big).$$

На основании итеративной леммы 5.6 из [21] из последнего неравенства заключаем, что $Y_n \to 0$ при $n \to \infty$, если достаточно мала величина

$$C\Big(t^{-1}h^{-\frac{Nd+p(1+\beta)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}}Y_0^{\frac{p(\beta-\lambda)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}}$$
$$+ (R\sigma)^{-p}t^{-d_\lambda/(\beta-\lambda)}h^{-\frac{p(1+\beta)}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}-\frac{d}{\beta-\lambda}}Y_0^{\frac{pd_\lambda}{Nd_\lambda+p(1+\beta)}}\Big)$$
$$= C\Big\{\Big[t^{-1}h^{-\frac{k+p}{k_\lambda+p}}Y_0^{\frac{p(\beta-\lambda)}{k_\lambda+p}}\Big] + (R\sigma)^{-p}\Big[t^{-1}h^{-\frac{k+p}{k_\lambda+p}}Y_0^{\frac{p(\beta-\lambda)}{k_\lambda+p}}\Big]^{\frac{d_\lambda}{\beta-\lambda}}\Big\}.$$

Ясно, что указанная величина будет малой тогда и только тогда, когда мала величина в квадратных скобках $t^{-1}h^{-\frac{k+p}{k_\lambda+p}}Y_0^{\frac{p(\beta-\lambda)}{k_\lambda+p}}$, то есть, когда

$$Y_0 \le \gamma_2 t^{\frac{k_\lambda+p}{p\Delta}}h^{\frac{k+p}{p\Delta}}, \tag{2.11}$$

где число $\gamma_2 = \gamma_2(R,\sigma)$ достаточно мало.

Тем самым, ввиду определения величин Y_n, утверждение леммы 2.1 доказано в случае $D = t^{\varkappa}h^{\mu}$.

Пусть теперь $D = \varepsilon_0|x_0| \le t^{\varkappa}h^{\mu}$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему с применением итеративной леммы 5.6 из [21]. При этом интеграл I_1 в (2.3) оценивается точно так же, как и выше, что дает условие (2.1). Интеграл же I_2 в (2.3) мы в этом случае оценим так

$$(R_2-R_1)^{-p}\iint\limits_{Q_n} v_n^p\,dx\,d\tau \le |u|_0^d\,(R_2-R_1)^{-p}\iint\limits_{Q_n} v_n^{1+\beta}\,dx\,d\tau,$$

где

$$|u|_0 = \sup_{B_{R_2}\times[t/2,t]}|u(x,\tau)| \le C(u_0,R,\sigma,\varepsilon_0)t^{-\frac{N}{k}}D^{\frac{p}{d}}, \tag{2.12}$$

в силу оценки (1.8). Оценивая теперь последний двойной интеграл от $v_n^{1+\beta}$ так же, как и выше при оценке I_1, приходим, в результате, к условию

$$|u|_0^d\,D^{-p}h^{-\frac{k+p}{k_\lambda+p}}Y_0^{\frac{p\Delta}{k_\lambda+p}} \le \gamma_2.$$

Усиливая теперь последнее условие посредством оценки (2.12), приходим к условию

$$\left(t^{-\frac{N}{k}} D^{\frac{p}{d}}\right)^{d} D^{-p} h^{-\frac{k+p}{k_\lambda+p}} Y_0^{\frac{p\Delta}{k_\lambda+p}} \le \gamma_2,$$

или, как легко видеть, к условию

$$Y_0 \le \gamma_2 t^{\left(\frac{Nd}{k}\right)\frac{k_\lambda+p}{p\Delta}} h^{\frac{k+p}{p\Delta}}.$$

Так как мы рассматриваем значения $t \le 1$ и $\frac{Nd}{k} < 1$, то показатель степени t в последнем условии меньше, чем в (2.1), и, следовательно, последнее условие заведомо выполнено, если выполнено условие (2.1) с достаточно малым $\gamma_2 = \gamma_2(R, \sigma, u_0)$.

Тем самым лемма 2.1 доказана. □

3. Условия локального обращения решения в ноль в терминах локальной массы решения

В этом пункте мы получим оценки энергии решения, фигурировавшей в лемме 2.1 предыдущего пункта, через массу решения методом работ [14–16].

Лемма 3.1. *Пусть* $0 < r_1 < r_2$, $0 < t_2 < t_1 < t$, B_{r_i} *— шары с центром в* x_0 *радиуса* r_i. *Тогда для решения* $u(x,\tau)$ *задачи* (1.1), (1.2) *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} Y(t_1, r_1) \equiv \sup_{t_1<\tau<t} \int\limits_{B_{r_1}} u^{1+\beta}(x,\tau)\,dx \\ + \int\limits_{t_1}^{t} \int\limits_{B_{r_1}} |\nabla u|^p \,dx\,d\tau + \int\limits_{t_1}^{t} \int\limits_{B_{r_1}} h u^{1+r}\,dx\,d\tau \\ \le C\left[\frac{t-t_2}{(t-t_2)^{\frac{k+N}{k}}} \left(\sup_{t_2<\tau<t} \int\limits_{B_{r_2}} u^{\beta}\,dx \right)^{\frac{k+p}{k}} \right. \\ \left. + \frac{t-t_2}{(r_2-r_1)^{\frac{k+N}{\beta}}} \left(\sup_{t_2<\tau<t} \int\limits_{B_{r_2}} u^{\beta}\,dx \right)^{\frac{p}{\beta}} \right]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Если же с некоторым $\gamma > 0$ *выполнены условия* $r_2 - r_1 > \gamma(|x_0| + r_2)$ *и* $1 > t_2 > \gamma(t_1 - t_2)$, *то второе слагаемое в оценке* (3.1) *можно отбросить.*

Доказательство. Определим величины $t_n = t_2 + (t_1 - t_2)2^{-n}$, $\bar{t}_n = (t_n + t_{n+1})/2$, $r_n = r_2 - (r_2 - r_1)2^{-n}$, $\bar{r}_n = (r_n + r_{n+1})/2$ и последовательность расширяющихся (в отличие от леммы 2.1) областей $B_n = B_{r_n}$, $\overline{B}_n = B_{\bar{r}_n}$, $Q_n = B_n \times [t_n, t]$, $\overline{Q}_n = \overline{B}_n \times [\bar{t}_n, t]$. Пусть, далее, $\zeta_n(x,\tau)$ — гладкие срезающие функции, такие, что $\zeta_n \equiv 1$ на Q_n, $\zeta_n \geq 1/2$ на $\overline{Q}_n$, $\zeta_n \equiv 0$ вне Q_{n+1}, $|\zeta_{nt}| \leq C2^n(t_1 - t_2)^{-1}$, $|\nabla\zeta_n| \leq C2^n(r_2 - r_1)^{-1}$.

Полностью аналогично доказательству леммы 2.1, вводя вспомогательные функции $v_n(x,\tau) = \zeta_n(x,\tau)u(x,\tau)$, и учитывая, что

$$|\nabla v_n|^p \leq C\left(|\nabla u|^p + 2^{np}u^p\right), \tag{3.2}$$

так же, как мы получили неравенство (2.3) в доказательстве леммы 2.1, из уравнения (1.1) получаем для этих функций оценку

$$\begin{aligned} Y_n \equiv \sup_{t_{n+1}<\tau<t} \int\limits_{B_{n+1}} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\,dx &+ \iint\limits_{Q_{n+1}} |\nabla v_n|^p\,dx\,d\tau + \iint\limits_{Q_{n+1}} h v_n^{1+r}\,dx\,d\tau \\ &\leq Cb^n\left((t_1 - t_2)^{-1}\iint\limits_{Q_{n+2}} v_{n+1}^{1+\beta}\,dx\,d\tau + (r_2 - r_1)^{-p}\iint\limits_{Q_{n+2}} v_{n+1}^p\,dx\,d\tau\right) \\ &\equiv I_1 + I_2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где b — некоторая константа.

Оценим выражения I_1 и I_2 в правой части (3.3), применяя к интегралам по dx по B_{n+2} неравенство Ниренберга–Гальярдо. Имеем для I_1:

$$\int\limits_{B_{n+2}} v_{n+1}^{1+\beta}(x,\tau)\,dx \leq C\left(\int\limits_{B_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p\,dx\right)^{\omega_1\frac{1+\beta}{p}} \times \left(\int\limits_{B_{n+2}} v_{n+1}^{\beta}(x,\tau)\,dx\right)^{(1-\omega_1)\frac{1+\beta}{\beta}},$$

где ω_1 определяется из соотношения

$$\frac{1}{1+\beta} = \omega_1\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{N}\Big) + (1-\omega_1)\frac{1}{\beta}.$$

Интегрируя последнее неравенство по времени, вынося $\sup_{t_{n+2}<\tau<t}\int_{B_{n+2}} v_{n+1}^{\beta}(x,\tau)\,dx$ и применяя неравенство Гельдера, получаем

$$I_1 \le C\Bigg(\iint\limits_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p\,dx\Bigg)^{\omega_1\frac{1+\beta}{p}} b^n \times \frac{(t-t_{n+2})^{1-\omega_1\frac{1+\beta}{p}}}{(t_1-t_2)}\Bigg(\sup_{t_{n+2}<\tau<t}\int\limits_{B_{n+2}} v_{n+1}^{\beta}\,dx\Bigg)^{(1-\omega_1)\frac{1+\beta}{\beta}}.$$

Применяя теперь к правой части последнего соотношения неравенство Юнга с $\varepsilon=\delta/2$ (где δ достаточно мало и будет выбрано ниже), получаем

$$I_1 \le \frac{\delta}{2}\iint\limits_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p\,dx + C_\delta\Big(b^{\frac{1}{1-\omega_1\frac{1+\beta}{p}}}\Big)^n \frac{(t-t_{n+2})}{(t_1-t_2)^{\frac{1}{1-\omega_1\frac{1+\beta}{p}}}}\Bigg(\sup_{t_{n+2}<\tau<t}\int\limits_{B_{n+2}} v_{n+1}^{\beta}\,dx\Bigg)^{\frac{(1-\omega_1)\frac{1+\beta}{\beta}}{1-\omega_1\frac{1+\beta}{p}}}$$
$$\le \frac{\delta}{2}\iint\limits_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p\,dx + C_\delta b^n \frac{(t-t_2)}{(t_1-t_2)^{\frac{1}{1-\omega_1\frac{1+\beta}{p}}}} E^{M_1}, \quad (3.4)$$

где обозначено $E=\sup_{t_2<\tau<t}\int_{B_{r_2}} u^{\beta}(x,\tau)\,dx$, $M_1=\frac{(1-\omega_1)\frac{1+\beta}{\beta}}{1-\omega_1\frac{1+\beta}{p}}$.

Производя аналогичные оценки для выражения I_2 в правой части (3.3), имеем последовательно:

$$\int\limits_{B_{n+2}} v_{n+1}^{p}\,dx \le C\Bigg(\int\limits_{B_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p\,dx\Bigg)^{\omega_2}\Bigg(\int\limits_{B_{n+2}} v_{n+1}^{\beta}\,dx\Bigg)^{(1-\omega_2)\frac{p}{\beta}},$$

где ω_2 определяется из соотношения

$$\frac{1}{p}=\omega_2\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{N}\Big)+(1-\omega_2)\frac{1}{\beta}.$$

Далее, интегрируя по времени:

$$I_2=b^n(r_2-r_1)^{-p}\iint\limits_{Q_{n+2}} v_{n+1}^{p}\,dx\,d\tau \le \Bigg(\iint\limits_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p\,dx\,d\tau\Bigg)^{\omega_2}$$

$$\times b^n \frac{(t-t_{n+1})^{1-\omega_2}}{(r_2-r_1)^p} \left(\sup_{t_{n+2}<\tau<t} \int\limits_{B_{n+2}} v_{n+1}^{\beta}\, dx \right)^{(1-\omega_2)\frac{p}{\beta}}.$$

Применяя, наконец, неравенство Юнга с $\delta/2$, получаем, как и выше,

$$I_2 \le \frac{\delta}{2} \iint\limits_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p \, dx\, d\tau + C_\delta b^n \frac{(t-t_{n+1})}{(r_2-r_1)^{\frac{p}{1-\omega_2}}} E^{M_2}, \tag{3.5}$$

где $M_2 = \frac{p}{\beta}$.

Таким образом, применяя оценки (3.4) и (3.5) к неравенству (3.3), получаем

$$\begin{aligned} Y_n \equiv \sup_{t_{n+1}<\tau<t} \int\limits_{B_{n+1}} v_n^{1+\beta}(x,\tau)\, dx \\ + \iint\limits_{Q_{n+1}} |\nabla v_n|^p \, dx\, d\tau + \iint\limits_{Q_{n+1}} v_n^{1+r}\, dx\, d\tau \\ \le \delta \iint\limits_{Q_{n+2}} |\nabla v_{n+1}|^p \, dx\, d\tau + C_\delta b^n A, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$A \equiv \frac{(t-t_2)}{(t_1-t_2)^{\frac{1}{1-\omega_1\frac{1+\beta}{p}}}} E^{M_1} + \frac{(t-t_{n+1})}{(r_2-r_1)^{\frac{p}{1-\omega_2}}} E^{M_2}.$$

Применяя далее неравенство (3.6) последовательно по n, начиная с Y_0, получаем, что

$$Y_0 \le \delta^n \iint\limits_{Q_{n+1}} |\nabla v_{n+1}|^p \, dx\, d\tau + \left(\sum_{k=0}^{n} (b\delta)^k \right) C_\delta A. \tag{3.7}$$

Заметим теперь, что

$$\iint\limits_{Q_{n+1}} |\nabla v_{n+1}|^p \, dx\, d\tau \le C b^n \left(\int\limits_{t_2}^{t} \int\limits_{B_{r_2}} (|\nabla u|^p + u^p)\, dx\, d\tau \right) \le C(u) b^n.$$

Выбирая, наконец, δ из условия $\delta b = 1/2$ и переходя к пределу в (3.7), получаем, что

$$Y_0 \le CA.$$

Вычисляя теперь явным образом числа ω_1 и ω_2 из соответствующих соотношений и вычисляя показатели $M_1 = \frac{k+p}{k}$, $M_2 = \frac{p}{\beta}$,

$1/(1-\omega_1\frac{1+\beta}{p})=\frac{k+N}{k}$, $p/(1-\omega_2)=\frac{k+N}{\beta}$, получаем первое утверждение леммы.

Для завершения доказательства леммы заметим теперь, что, если выполнены условия второй части леммы $r_2-r_1>\gamma(|x_0|+r_2)$ и $1>t_2>\gamma(t_1-t_2)$, то интеграл в I_2 в соотношении (3.3) можно оценить, используя оценку (1.8) и обозначая

$$|v_{n+1}|_0=\sup_{Q_{n+2}}|v_{n+1}(x,\tau)|,$$

следующим образом

$$\begin{gathered}(r_2-r_1)^{-p}\iint\limits_{Q_{n+2}} v_{n+1}^p\,dx\,d\tau\le(r_2-r_1)^{-p}\,|v_{n+1}|_0^d\iint\limits_{Q_{n+2}} v_{n+1}^{1+\beta}\,dx\,d\tau\\ \le C(u_0)(r_2-r_1)^{-p}(t_2^{-\frac{N}{k}}(|x_0|+r_2)^{\frac{p}{d}})^d\iint\limits_{Q_{n+2}} v_{n+1}^{1+\beta}\,dx\,d\tau\\ \le Ct_2^{-\frac{Nd}{k}}\left(\frac{|x_0|+r_2}{r_2-r_1}\right)\iint\limits_{Q_{n+2}} v_{n+1}^{1+\beta}\,dx\,d\tau\le C(t_1-t_2)^{-1}\iint\limits_{Q_{n+2}} v_{n+1}^{1+\beta}\,dx\,d\tau,\end{gathered}$$

где мы учли, что $-\frac{Nd}{k}>-1$. Таким образом, в этом случае величину I_2 в соотношении (3.3) можно отбросить, изменив константу C в неравенстве.

Тем самым лемма 3.1 доказана. □

Теперь мы докажем лемму, дающую условие локального обращения решения в ноль в терминах локальной массы решения.

Лемма 3.2. *Пусть x_0, R, σ, R_1, R_2 и $Y(t/2,R_2)$ — такие же, как в лемме 2.1, $R_3=R_2(1+\sigma)$, $h=h(x_0,t)$, $D=D(x_0,t)$. Тогда существует константа $\gamma_3=\gamma_3(R,\sigma)>0$, такая, что условие леммы 2.1 выполнено, то есть $Y(t/2,R_2)\le\gamma_2 t^{\frac{k_\lambda+p}{p\Delta}}h^{\frac{k+p}{p(\beta-\lambda)}}$, если*

$$E\equiv E(t,R,\sigma)\equiv\sup_{t/4<\tau<t}\int\limits_{B_{R(1+\sigma)D}(x_0)}u^\beta\,dx \le\gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}\{\omega_N(R(1+\sigma)D)^N\},$$

то есть

$$h^{-\frac{\beta}{\beta-\lambda}}(x_0,t)\sup_{t/4<\tau<t}\;\fint\limits_{B_{R(1+\sigma)D}}u^\beta(x,\tau)\,dx\le\gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся леммой 3.1. При этом, как и в леммах 2.1, 3.1, мы рассмотрим отдельно два случая возможных значений радиуса $D = D(x_0, t)$.

Пусть сначала $D = D(x_0, t) = t^{\varkappa} h^{\mu} < \varepsilon_0 |x_0|$.

Положим в оценке (3.1) $r_1 = R_2 = RD$, $r_2 = R_3 = R(1+\sigma)D$, $t_1 = t/2$, $t_2 = t/4$. Тогда оценка (3.1) примет вид

$$Y(t/2, r_1) \leq C \left(t^{-\frac{N}{k}} E^{\frac{k+p}{k}} + t D^{-\frac{k+N}{\beta}} E^{\frac{p}{\beta}} \right) \equiv I_1 + I_2.$$

Найдем условия на E, при которых выполнено

$$I_1 \leq \frac{\gamma_2}{2} t^{\frac{k_\lambda + p}{p\Delta}} h^{\frac{k+p}{p\Delta}}, \qquad I_2 \leq t^{\frac{k_\lambda + p}{p\Delta}} h^{\frac{k+p}{p\Delta}}. \tag{3.8}$$

Первое из условий (3.8) выполнено, если при достаточно малом $\overline{\gamma}_3$

$$E^{\frac{k+p}{k}} \leq \overline{\gamma}_3 t^{\frac{N}{k} + \frac{k_\lambda + p}{p\Delta}} h^{\frac{k+p}{p\Delta}},$$

то есть при некотором γ_3

$$E \leq \gamma_3 \omega_N [R(1+\sigma)]^N t^{(\frac{N}{k} + \frac{k_\lambda + p}{p\Delta})\frac{k}{k+p}} h^{\frac{k+p}{p\Delta}\frac{k}{k+p}}$$
$$= \gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} \omega_N [R(1+\sigma)D]^N, \tag{3.9}$$

как показывают элементарные вычисления с использованием определений k, μ, $\varkappa$, D.

Аналогично второе из условий (3.8) имеет вид

$$E^{\frac{p}{\beta}} \leq \widetilde{\gamma}_3 t^{-1} D^{\frac{k+N}{\beta}} t^{\frac{k_\lambda + p}{p\Delta}} h^{\frac{k+p}{p\Delta}},$$

с некоторым достаточно малым $\widetilde{\gamma}_3$. Следовательно, второе из условий (3.8) выполнено, если при достаточно малом γ_3

$$E \leq \gamma_3 \omega_N [R(1+\sigma)]^N t^{\frac{\beta}{p}[-1+\varkappa\frac{k+N}{\beta} + \frac{k_\lambda + p}{p\Delta}]} h^{\frac{\beta}{p}[\frac{k+P}{p\Delta} + \mu\frac{k+N}{\beta}]}$$
$$= \gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} [\omega_N (R(1+\sigma))^N],$$

как показывает элементарный подсчет показателя степени. Уменьшая, если необходимо, константу γ_3 в (3.9), видим, что при выполнении этого условия справедливы обе оценки в (3.8). Тем самым лемма 3.2 доказана для случая $D = t^{\varkappa} h^{\mu} < \varepsilon_0 |x_0|$.

Пусть теперь $D = \varepsilon_0 |x_0| \leq t^{\varkappa} h^{\mu}$. Тогда, как легко проверить, при нашем выборе r_1, r_2, t_1, t_2 в лемме 3.1 выполнены условия второй части этой леммы, когда второе слагаемое в оценке (3.1) можно отбросить, и мы имеем такую оценку энергии

$$Y(t/2, r_1) \leq Ct^{-\frac{N}{k}} E^{\frac{k+p}{k}}.$$

Таким образом, достаточным для выполнения условий леммы 2.1 является условие

$$E^{\frac{k+p}{k}} \leq \overline{\gamma}_3 t^{\frac{N}{k}} t^{\frac{k_\lambda+p}{p\Delta}} h^{\frac{k+p}{p\Delta}},$$

то есть

$$E \leq \widetilde{\gamma}_3 t^{(\frac{N}{k}+\frac{k_\lambda+p}{p\Delta})\frac{k}{k+p}} h^{\frac{k}{p\Delta}} = \widetilde{\gamma}_3 t^{(\frac{N}{k}+\frac{k_\lambda+p}{p\Delta})\frac{k}{k+p}} h^{N\mu} h^{\frac{\beta}{\Delta}}.$$

Усилим это условие, пользуясь тем, что в рассматриваемом случае значений D

$$h^\mu \geq Dt^{-\varkappa}.$$

В результате получим условие

$$E \leq \widetilde{\gamma}_3 t^{(\frac{N}{k}+\frac{k_\lambda+p}{p\Delta})\frac{k}{k+p}-N\varkappa} D^N h^{\frac{\beta}{\Delta}}.$$

Непосредственный подсчет показателя степени t показывает, что он равен в точности $\frac{\beta}{\beta-\lambda}$, то есть условие на E принимает вид

$$E \leq \widetilde{\gamma}_3 D^N t^{\frac{\beta}{\Delta}} h^{\frac{\beta}{\Delta}} = \gamma_3 t^{\frac{\beta}{\Delta}} h^{\frac{\beta}{\Delta}} [\omega_N (R(1+\sigma)D)^N]$$

с некоторым достаточно малым $\gamma_3 = \gamma_3(R, \sigma)$.

Лемма 3.2 доказана. □

4. Оценка максимума модуля решения через массу решения

Оценки данного пункта носят вспомогательный характер и потребуются нам в следующем пункте при оценке массы решения через массу начальной функции. Содержащиеся в этом пункте утверждения аналогичны леммам 1–3 из [15] и поэтому мы приводим их без доказательства.

Лемма 4.1. *Пусть* $0 < R_1 < R_2$, $0 < t_2 < t_1 < t$, $0 < H_2 < H_1$, $(u-H)_+ \equiv \max\{u-H, 0\}$, B_{R_i} *шары соответствующего радиуса с центром в некоторой точке* x_0. *Тогда справедлива оценка*

$$\sup_{t_1<\tau<t} \int\limits_{B_{R_1}} (u-H_1)_+^{1+\beta}\, dx$$

$$+\int_{t_1}^{t}\int_{B_{R_1}} |\nabla(u-H_1)_+|^p\,dx\,d\tau+\int_{t_1}^{t}\int_{B_{R_1}} h(u-H_1)_+^{1+\lambda}\,dx\,d\tau$$
$$\le C\Bigg[\frac{A^{-|1-\beta|}}{t_1-t_2}\int_{t_2}^{t}\int_{B_{R_2}}(u-H_2)_+^{1+\beta}\,dx\,d\tau$$
$$+\frac{A^{-(1-\beta)_+}}{(R_2-R_1)^p}\int_{t_2}^{t}\int_{B_{R_2}}(u-H_2)_+^{p}\,dx\,d\tau\Bigg],\quad (4.1)$$

где $A=\frac{H_1-H_2}{H_1}$.

Лемма 4.2. *Пусть, как и выше в лемме* 4.1, $0<H_2<H_1$, $0<t_2<t_1<t$, $A=(H_1-H_2)/H_1$ *и пусть* $0<r_1<r_2$. *Тогда*

$$\sup_{t_1<\tau<t}\int_{B_{r_1}}(u-H_1)_+^{1+\beta}\,dx$$
$$+\int_{t_1}^{t}\int_{B_{r_1}} |\nabla(u-H_1)_+|^p\,dx\,d\tau+\int_{t_1}^{t}\int_{B_{r_1}} h(u-H_1)_+^{1+\lambda}\,dx\,d\tau$$
$$\le C[A^{-|1-\beta|\frac{k+N}{k}}\frac{t-t_2}{(t_1-t_2)^{\frac{k+N}{k}}}\left(\sup_{t_2<\tau<t}\int_{B_{r_2}}(u-H_2)_+^{\beta}\,dx\right)^{\frac{p+k}{k}}+$$
$$+A^{-(1-\beta)_+\frac{k+N}{\beta p}}\frac{t-t_2}{(r_2-r_1)^{\frac{k+N}{\beta}}}\left(\sup_{t_2<\tau<t}\int_{B_{r_2}}(u-H_2)_+^{\beta}\,dx\right)^{\frac{p}{\beta}}].\quad (4.2)$$

Лемма 4.3. *Пусть* $0<t_2<t_1<t$, $0<R_1<R_2$, $B_{R_i}=B_{R_i}(x_0)$. *Тогда*

$$\sup_{[t_1,t]\times B_{R_1}}|u|\le C\Bigg[\frac{t-t_2}{(t_1-t_2)^{\frac{k+N}{k}}}E^{\frac{p}{k}}(t_2,R_2)$$
$$+\frac{t-t_2}{(R_2-R_1)^{\frac{k+N}{\beta}}}E^{\frac{p}{\beta}-1}(t_2,R_2)\Bigg],\quad (4.3)$$

где

$$E(\theta,R)\equiv\sup_{\theta<\tau<t}\int_{B_R}u^{\beta}(x,\tau)\,dx.\quad (4.4)$$

Мы будем использовать оценку (4.3) в случае, когда $t_1 = t/2$, $t_2 = t/4$, $R_1 = R$, $R_2 = R(1+\sigma)$. В этом случае упомянутая оценка приобретает вид

$$|u|_{\infty,[t/2.t]\times B_R} \le C_\sigma \Big[t^{-\frac{N}{k}} E(t/4, R(1+\sigma))^{\frac{p}{k}} + \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E(t/4, R(1+\sigma))^{\frac{p}{\beta}-1} \Big]. \quad (4.5)$$

5. Оценка локальной массы решения через локальную массу начальной функции

В этом пункте мы получим оценку локальной массы решения $E(0,R)$ через локальную массу начальной функции.

В дальнейшем нам понадобится следующая простая вспомогательная лемма.

Лемма 5.1. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $0 < r < R$. Для неотрицательной интегрируемой функции $v(x)$*

$$\fint_{B_R} v(x)\,dx \equiv \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} v(x)\,dx \le C(N) \sup_{y\in B_R} \fint_{B_r(y)} v(x)\,dx. \quad (5.1)$$

Доказательство этой леммы элементарно и легко вытекает из того, что любой шар радиуса R можно покрыть шарами меньшего радиуса r в количестве не более, чем $C(N)(\frac{R}{r})^N$ штук.

Перейдем теперь непосредственно к локальным оценкам массы решения.

Лемма 5.2. *Пусть $R_1 = R > 0$, $R_2 = R(1+\sigma)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $B_\rho = B_\rho(x_0)$, $\rho > 0$, и пусть, далее,*

$$E_\rho = \sup_{0<\tau<t} \int_{B_\rho(x_0)} u^\beta(x,\tau)\,dx, \quad E_1 = E_{R_1},\ E_2 = E_{R_2}, \quad (5.2)$$

$$\mu_\rho = \int_{B_\rho(x_0)} u_0^\beta(x)\,dx. \quad (5.3)$$

Пусть еще для заданных t и R

$$A = \left(t^{-\frac{N}{k}} E_2^{\frac{p}{k}} + \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_2^{\frac{p}{\beta}-1} \right)^{\frac{d}{p}} \frac{t^{\frac{1}{p}}}{R}. \quad (5.4)$$

Тогда

$$E_1 \le \mu_{R_2} + C\sigma^{-C} E_2(A + A^p). \tag{5.5}$$

Доказательство. Пусть $\overline{R} = R(1+\sigma/4)$, $\zeta(x)$ — гладкая срезающая функция шара $B_{\overline{R}}$, равная 1 на B_R и равная нулю вне $B_{\overline{R}}$, $|\nabla\zeta| \le C/\sigma R$. Умножим уравнение (1.1) на $\zeta(x)$ и проинтегрируем по частям. Получим:

$$\int\limits_{B_{\overline{R}}} u^\beta(x,t)\zeta(x)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_{B_{\overline{R}}} h u^\lambda \zeta(x)\,dx\,d\tau$$
$$= \int\limits_{B_{\overline{R}}} u_0^\beta(x)\zeta(x)\,dx + \sum_{i=1}^N \int\limits_0^t \int\limits_{B_{\overline{R}}} |\nabla u|^{p-2} u_{x_i}\zeta_{x_i}\,dx\,d\tau$$
$$\le \int\limits_{B_{\overline{R}}} u_0^\beta(x)\zeta(x)\,dx + C\sigma^{-1}R^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_{B_{\overline{R}}} |\nabla u|^{p-1}\,dx\,d\tau,$$

и, таким образом,

$$E_1 \le \mu_{R_2} + C\sigma^{-1} I, \qquad I \equiv R^{-1} \int\limits_0^t \int\limits_{B_{\overline{R}}} |\nabla u|^{p-1}\,dx\,d\tau, \tag{5.6}$$

где мы использовали определения (5.2) и (5.3).

Нашей дальнейшей задачей будет оценка интеграла I в правой части (5.6) в терминах величины E_2. Оценим этот интеграл следующим образом (аналогично [20, 25]). Пусть $\mu, \theta > 0$ достаточно малы (будут выбраны ниже). Тогда, по неравенству Гельдера

$$\int\limits_0^t \int\limits_{B_{\overline{R}}} |\nabla u|^{p-1}\,dx\,d\tau$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_{B_{\overline{R}}} |\nabla u|^{p-1} \tau^{\mu\frac{p-1}{p}} u^{-\theta\frac{p-1}{p}} \tau^{-\mu\frac{p-1}{p}} u^{\theta\frac{p-1}{p}}\,dx\,d\tau \le$$
$$\le \left(\int\limits_0^t \int\limits_{B_{\overline{R}}} |\nabla u|^p \tau^\mu u^{-\theta}\,dx\,d\tau \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_0^t \int\limits_{B_{\overline{R}}} \tau^{-\mu(p-1)} u^{\theta(p-1)}\,dx\,d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\equiv J_1^{\frac{p-1}{p}} J_2^{\frac{1}{p}}. \tag{5.7}$$

Выберем θ из условия $\beta/(p-1) \le \theta < 1$ и оценим J_2 следующим образом, используя оценку (4.5):

$$J_2 \le \int\limits_0^t \tau^{-\mu(p-1)} d\tau \int\limits_{B_{\overline{R}}} |u|^{\theta(p-1)-\beta}_{\infty,[\tau/2,\tau]\times B_{\overline{R}}} u^\beta(x,\tau)\,dx$$

$$\le C \int\limits_0^t \tau^{-\mu(p-1)} d\tau \left[\tau^{-\frac{N}{k}} E_2^{\frac{p}{k}} + \sigma^{-\frac{k+N}{\beta}} \frac{\tau}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_2^{\frac{p}{\beta}-1}\right]^{\theta(p-1)-\beta} \int\limits_{B_{\overline{R}}} u^\beta(x,\tau)\,dx$$

$$\le C\sigma^{-C} t^{-\mu(p-1)+1} \left[t^{-\frac{N}{k}} E_2^{\frac{p}{k}} + \sigma^{-\frac{k+N}{\beta}} \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_2^{\frac{p}{\beta}-1}\right]^{\theta(p-1)-\beta} E_2$$

$$\equiv C\sigma^{-C} |u|_0^{\theta(p-1)-\beta} t^{-\mu(p-1)+1} E_2, \quad (5.8)$$

где мы воспользовались очевидным неравенством

$$C_1(a)(y^a+z^a) \le (y+z)^a \le C_2(a)(y^a+z^a), \quad y,z,a \ge 0, \quad (5.9)$$

обозначили

$$|u|_0 \equiv t^{-\frac{N}{k}} E_2^{\frac{p}{k}} + \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_2^{\frac{p}{\beta}-1}, \quad (5.10)$$

и считаем θ и μ выбранными так, что $-\mu(p-1) - \frac{N}{k}[\theta(p-1)-\beta] > -1$. Выберем, например, здесь и для дальнейшего

$$\theta = \frac{\beta}{p-1}, \quad \frac{Nd}{k}\frac{1}{p-1} < \mu < \frac{1}{p-1}. \quad (5.11)$$

Оценим теперь интеграл J_1, используя уравнение (1.1). Умножим уравнение (1.1) на $u^{1-\theta}(x,\tau)\zeta_1(x)\tau^\mu$ и проинтегрируем по $B_{\overline{\overline{R}}} \times [0,t]$, где $\overline{\overline{R}} = R(1+\sigma/2)$, $\zeta_1(x)$ — гладкая срезающая функция, равная 1 на $B_{\overline{R}}$ и равная нулю вне $B_{\overline{\overline{R}}}$, $|\nabla\zeta_1| \le C/\sigma R$. После оценок, аналогичных оценке (2.1) леммы 2.1, получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_{B_{\overline{R}}} |\nabla u|^p \tau^\mu u^{-\theta}\,dx\,d\tau$$

$$\le C\sigma^{-C}\left(\int\limits_0^t \int\limits_{B_{\overline{\overline{R}}}} \tau^{\mu-1} u^{1+\beta-\theta}\,dx\,d\tau + \frac{1}{R^p}\int\limits_0^t \int\limits_{B_{\overline{\overline{R}}}} \tau^\mu u^{p-\theta}\,dx\,d\tau\right)$$

$$\equiv C\sigma^{-C}(J_{11}+J_{12}). \quad (5.12)$$

Интегралы J_{11} и J_{12} оценим аналогично оценке (5.8) интеграла J_2 с использованием оценки (4.5) и неравенства (5.9). При этом легко проверить, что интегралы по $d\tau$ сходятся ввиду условий (5.11). Имеем в результате

$$J_{11} \le C\sigma^{-C} |u|_0^{1-\theta} t^{\mu} E_2, \quad J_{12} \le C\sigma^{-C} |u|_0^{p-\theta-\beta} t^{\mu+1} R^{-p} E_2. \tag{5.13}$$

Таким образом, из полученных оценок (5.6)–(5.8), (5.12), (5.13) следует, что в оценке (5.6)

$$\begin{aligned} I &\le \frac{1}{R} J_1^{\frac{p-1}{p}} J_2^{\frac{1}{p}} \le C\sigma^{-C} (J_{11} + J_{12})^{\frac{p-1}{p}} J_2^{\frac{1}{p}} \\ &\le C\sigma^{-C} \frac{E_2}{R} \left(|u|_0^{(1-\theta)\frac{p-1}{p}} t^{\mu\frac{p-1}{p}} + |u|_0^{(p-\theta-\beta)\frac{p-1}{p}} t^{(\mu+1)\frac{p-1}{p}} R^{-p\frac{p-1}{p}} \right) \\ &\qquad \times \left(|u|_0^{[\theta(p-1)-\beta]\frac{1}{p}} t^{[-\mu(p-1)+1]\frac{1}{p}} \right) \\ &= C\sigma^{-C} \frac{E_2}{R} \left(|u|_0^{\frac{p-1-\beta}{p}} t^{\frac{1}{p}} + |u|_0^{p-1-\beta} R^{-(p-1)} t \right) \\ &= C\sigma^{-C} E_2 (A + A^p), \end{aligned} \tag{5.14}$$

где A определено в (5.4). Тем самым лемма 5.2 доказана. □

Лемма 5.3. *Обозначим $l = \beta/(\beta - r)$, $h = h(x_0, t)$ и пусть $\sigma \in (0,1)$ задано. Существуют такие константы $t_0 = t_0(u_0)$, $\gamma_4 = \gamma_4(u_0)$, что для $t < t_0$ если x_0 таково, что при всех $y \in B_{\varepsilon_0|x_0|}(x_0)$ выполнено*

$$⨍_{B_D(y)} u_0^{\beta}(x)\, dx \equiv \frac{1}{\omega_N D^N} \int_{B_D(y)} u_0^{\beta}(x)\, dx \le \gamma_4 t^l h^l, \tag{5.15}$$

то тогда выполнено

$$E_{D,x_0} \equiv \sup_{0<\tau<t} \int_{B_D(x_0)} u^{\beta}(x,\tau)\, dx \le 2 \int_{B_{D(1+\sigma)}(x_0)} u_0^{\beta}(x)\, dx \equiv 2\mu_{D(1+\sigma)}(x_0). \tag{5.16}$$

Доказательство. Пусть $\rho_1 = R > 0$, $\rho_2 = R(1+\sigma)$. Определим последовательность сужающихся шаров $B_n = B_{\rho_n} = B_{\rho_n}(x_0)$ с радиусами $\rho_n = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)2^{-n}$. Применим неравенство (5.5) леммы 5.2 к соседним шарам B_n и B_{n+1}, обозначив при этом

$$E_n \equiv \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_n} u^\beta \, dx,$$

$$E_0 \equiv E_{R_2} \equiv \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_{R_2}} u^\beta \, dx, \tag{5.17}$$

$$E_\infty \equiv E_{R_1} \equiv \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_{R_1}} u^\beta \, dx.$$

Получим с некоторыми C_σ и b:

$$E_{n+1} \leq \mu_{R_2}(x_0) + C_\sigma b^n E_n (A_n + A_n^p), \tag{5.18}$$

где

$$A_n = \left(t^{-\frac{N}{k}} E_n^{\frac{p}{k}} + \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_n^{\frac{p}{\beta}-1} \right)^{\frac{d}{p}} \frac{t^{\frac{1}{p}}}{R}.$$

Из упоминавшейся уже леммы 5.6 из [21] следует, что будет выполнено неравенство

$$E_\infty \leq 2\mu_{R_2}(x_0), \tag{5.19}$$

если A_0 достаточно мало. Действительно, предположим противное, то есть $E_\infty > 2\mu_{R_2}(x_0)$. Тогда, так как последовательность E_n не возрастает, $\mu_{R_2} < E_{n+1}/2$ для всех n и из (5.18), и мы выводим, что

$$E_{n+1} \leq 2C_\sigma b^n E_n (A_n + A_n^p),$$

то есть, ввиду упомянутой итеративной леммы, $E_n \to 0$ при $n \to \infty$, если A_0 достаточно мало, что противоречит нашему предположению.

Итак, существует такое $\gamma_5 = \gamma_5(\sigma)$, что при выполнении условия

$$\left(t^{-\frac{N}{k}} E_0^{\frac{p}{k}} + \frac{t}{R^{\frac{k+N}{\beta}}} E_0^{\frac{p}{\beta}-1} \right)^{\frac{d}{p}} \frac{t^{\frac{1}{p}}}{R} \leq \gamma_5 \tag{5.20}$$

выполнено

$$E_R \leq 2\mu_{R(1+\sigma)}. \tag{5.21}$$

Пользуясь (5.9), запишем условие (5.20) в виде

$$t^{-\frac{N}{k}\frac{d}{p}+\frac{1}{p}} R^{-1} E_0^{\frac{d}{k}} + t^{\frac{d}{p}+\frac{1}{p}} R^{-\frac{k+N}{\beta}\frac{d}{p}-1} E_0^{\frac{p-\beta}{\beta}\frac{d}{p}} \leq \gamma_6.$$

После элементарного подсчета показателей, ввиду определений величин d и k, последнее неравенство можно записать в виде

$$\left[t^{\frac{\beta}{k}} R^{-1} E_0^{\frac{d}{k}} \right] + \left[t^{\frac{\beta}{k}} R^{-1} E_0^{\frac{d}{k}} \right]^{\frac{(p-\beta)k}{\beta p}} \leq \gamma_6.$$

Таким образом, условие (5.20) эквивалентно условию

$$t^{\frac{\beta}{k}} R^{-1} E_0^{\frac{d}{k}} \le \gamma_7, \tag{5.22}$$

где γ_7 достаточно мало.

Зафиксируем этот результат наших рассуждений в виде утверждения: *если R таково, что выполнено условие* (5.22)*, то выполнена оценка* (5.21).

Нашей целью является показать, что, как утверждается в лемме, оценка (5.21) справедлива для $R = D$.

Пусть сначала $D = \varepsilon_0 |x_0| \le t^{\varkappa} h^{\mu}$ и положим $R = D$. Тогда левую часть (5.22) можно оценить так

$$\begin{aligned} t^{\frac{\beta}{k}} R^{-1} E_0^{\frac{d}{k}} &= t^{\frac{\beta}{k}} \left(\sup_{0<\tau<t} D^{-\frac{k}{d}} \int\limits_{|x-x_0|<D(1+\sigma)} u^{\beta}(x,\tau)\, dx \right)^{\frac{d}{k}} \\ &\le t^{\frac{\beta}{k}} \left(\frac{1+2\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) \left[\sup_{0<\tau<t} |(1+2\varepsilon_0)x_0|^{-\frac{k}{d}} \int\limits_{|x|<(1+2\varepsilon_0)|x_0|} u^{\beta}(x,\tau)\, dx \right]^{\frac{d}{k}} \\ &\le t^{\frac{\beta}{k}} \left(\frac{1+2\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) \sup_{0<\tau<t} \left|\left|\left| u^{\beta}(\cdot,\tau) \right|\right|\right|_1^{\frac{d}{k}} \le t^{\frac{\beta}{k}} \left(\frac{1+2\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) C_0^{\frac{d}{k}} \left|\left|\left| u_0^{\beta} \right|\right|\right|_1^{\frac{d}{k}}. \end{aligned}$$

Поэтому ясно, что если t достаточно мало, $t \le t_0(\varepsilon_0, u_0)$, то при $R \ge D = \varepsilon_0 |x_0|$ условие (5.22) выполнено и, следовательно, выполнено (5.21), что доказывает утверждение леммы для таких D и оценку (5.21) для $R \ge \varepsilon_0 |x_0|$.

Пусть теперь $D = t^{\varkappa} h^{\mu} < \varepsilon_0 |x_0|$. Обозначим $R_0 = \varepsilon_0 |x_0|$ и покажем, что при выполнении (5.15) оценка (5.21) выполнена для радиусов, меньших, чем R_0. А именно, при $R < R_0$ оценим E_0 в левой части (5.22) так:

$$\begin{aligned} E_0 &= \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_{R(1+\sigma)}} u^{\beta}(x,\tau)\, dx \\ &\le \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_{R_0(1+\sigma)}} u^{\beta}(x,\tau)\, dx \le 2\mu_{R_0(1+\sigma)^2} \\ &\le 2\omega_N \left[R_0 (1+\sigma)^2 \right]^N \oint\limits_{B_{R_0(1+\sigma)^2}} u_0^{\beta}\, dx \\ &\le 2\omega_N \left[R_0 (1+\sigma)^2 \right]^N C(N) \gamma_4 t^l h^l, \end{aligned}$$

где $C(N)$ — константа из неравенства (5.1).

Применяя эту оценку к (5.22), видим, что достаточным для выполнения (5.22) является условие

$$t^{\frac{\beta}{k}} R^{-1} \left\{2\omega_N (1+\sigma)^{2N} C(N)\gamma_4\right\}^{\frac{d}{k}} R_0^{\frac{Nd}{k}} t^{l\frac{d}{k}} h^{l\frac{d}{k}} \le \gamma_7.$$

Пусть γ_4 настолько мало, что выражение в фигурных скобках удовлетворяет неравенству

$$\left\{2\omega_N (1+\sigma)^{2N} C(N)\gamma_4\right\}^{\frac{d}{k}} \le \gamma_7. \tag{5.23}$$

Тогда (5.22) выполнено для радиусов R_1:

$$R_1 = R_0^{\omega} t^{\frac{ld+\beta}{k}} h^{\frac{ld}{k}},$$

где обозначено $\omega = Nd/k$. Отметим, что, ввиду условия $t^{\varkappa} h^{\mu} < \varepsilon_0 |x_0| = R_0$, выполнено, как легко проверить, неравенство

$$R_1 \le R_0.$$

Таким образом, условие (5.23) позволяет нам описанным выше способом определить последовательность радиусов R_n, $n = 0, 1, \ldots$, таких, что для $n = 1, 2, \ldots$

$$R_n = R_{n-1}^{\omega} t^{\frac{ld+\beta}{k}} h^{\frac{ld}{k}} \tag{5.24}$$

и для которых выполнено условие (5.22), а, тем самым, и оценка (5.21), то есть

$$E_{R_n} \le 2\mu_{R_n(1+\sigma)}. \tag{5.25}$$

При этом нетрудно проверить, что, ввиду условия $t^{\varkappa} h^{\mu} < R_0$, указанная последовательность монотонно убывает и, следовательно, имеет конечный предел R_∞, который может быть найден из условия (5.24), то есть

$$R_\infty = R_\infty^{\frac{Nd}{k}} t^{\frac{ld+\beta}{k}} h^{\frac{ld}{k}},$$

откуда

$$R_\infty = \left(t^{\frac{ld+\beta}{k}} h^{\frac{ld}{k}}\right)^{\frac{k}{\beta p}} = t^{\varkappa} h^{\mu}.$$

Таким образом, переходя к пределу при $n \to \infty$ в соотношении (5.25), получаем утверждение леммы для $D = t^{\varkappa} h^{\mu}$.

Лемма доказана. $\square$

6. Доказательство теоремы 1.1

6.1. Оценка размеров носителя сверху

Пусть сначала для определенности $u_0(x) \geq 0$ и $\varphi_t(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$. Зафиксируем какое-либо одно число $\sigma \in (0,1)$ в леммах 5.3, 3.2 и 2.1 и зафиксируем число R в леммах 2.1 и 3.2 так, чтобы $R(1+\sigma) = 1$. Зафиксируем $t < t_0$ и пусть $x_0 \in \mathbb{R}^N$ таково, что $|x_0| \geq 4\varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}})$, где γ_0 достаточно мало и будет выбрано ниже. Тогда для $y \in B_{\varepsilon_0|x_0|}(x_0)$ будет выполнено

$$\oint\limits_{|x-y|<D} u_0^\beta(x)\,dx \leq C(N)\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} \leq \gamma_4 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}, \qquad (6.1)$$

если $\gamma_0 \leq \gamma_4/C(N)$. Тогда условия леммы 5.3 для этого x_0 будут выполнены и, следовательно, согласно (6.1)

$$E_{D,x_0} \leq 2 \int\limits_{|x-x_0|<(1+\sigma)D} u_0^\beta(x)\,dx \leq 2C_\sigma C(N)\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} \omega_N D^N.$$

Уменьшая, если нужно, число γ_0, видим, что тогда для нашего x_0 выполнены условия леммы 3.2 и

$$\sup_{t/4<\tau<t} \oint\limits_{|x-x_0|<D} u^\beta(x,\tau)\,dx \leq \gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}.$$

Но тогда, в силу леммы 3.2, выполнены условия леммы 2.1 с $R_1 = (1-\sigma)(1+\sigma)^{-1}D$, $R_2 = (1+\sigma)^{-1}D$ и, таким образом, $u \equiv 0$ на множестве $[3t/4, t] \times B_{(1-\sigma)(1+\sigma)^{-1}D}(x_0)$. Таким образом, для верхней границы носителя решения получаем оценку $S(t) \leq 4\varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}})$, то есть требуемую оценку (1.14), если t достаточно мало.

Если же начальные данные $u_0(x)$ произвольного знака, то

$$-|u_0(x)|^\beta \leq |u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x) \leq |u_0(x)|^\beta$$

и оценка размеров носителя сверху следует из уже доказанного в силу принципа сравнения (см. по этому поводу также следующий пункт).

Таким образом, оценка (1.14) доказана.

6.2. Оценка размеров носителя снизу

Приступая к доказательству оценки (1.15) размеров носителя снизу отметим, что мы будем пользоваться принципом сравнения решений задачи Коши (1.1), (1.2). При этом для $p = 2$ или $\beta = 1$ он хорошо известен (см., например, [22–24] для случая $p = 2$ и [25] для $\beta = 1$), а для произвольного случая $p \neq 2$ и одновременно $\beta \neq 1$ он следует из результатов работы [20]. Таким образом, мы пользуемся тем, что для двух начальных данных в (1.2) $|u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x)$ и $|v_0(x)|^{\beta-1}v_0(x)$ таких, что $|u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x) \leq |v_0(x)|^{\beta-1}v_0(x)$, для соответствующих решений задачи Коши (1.1), (1.2) выполнено $u(x,t) \leq v(x,t)$.

Пусть $|u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x)$ — произвольная неотрицательная локально суммируемая функция или локально конечная радоновская мера. Пусть $t > 0$ достаточно мало и фиксировано и пусть $|x_0| \leq \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}})$, то есть

$$\int\limits_{|x-x_0|<D} u_0^\beta(x)\,dx \geq \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} D^N.$$

Обозначим

$$v_0^\beta(x) = v_{0,t}^\beta(x) = \begin{cases} u_0^\beta(x), & |x-x_0| \leq D, \\ 0, & |x-x_0| > D, \end{cases}$$

и пусть $v(x,\tau)$ — соответствующее решение задачи Коши (1.1), (1.2) с начальной функцией $v_0^\beta(x)$. Тогда, по принципу сравнения, $u(x,\tau) \geq v(x,\tau)$. Более того, не ограничивая общности (уменьшая, если нужно, $v_0^\beta(x)$), мы будем считать, что

$$\int\limits_{|x-x_0|<D} v_0^\beta(x)\,dx = \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} D^N.$$

Тогда для всех точек $y_0 \in \mathbb{R}^N$ (в качестве x_0) и функции $v_0^\beta(x)$ выполнены условия леммы 5.3, а, следовательно, и оценка (5.16). Отсюда, ввиду определения функции $v_0^\beta(x)$, следует, что $v(x,\tau) \equiv 0$ на множестве $[0,t]\times\{|x-x_0| > D+(1+\sigma)D = (2+\sigma)D\}$, то есть при $\tau \in [0,t]$ носитель функции $v(x,\tau)$ содержится в шаре $B_t \equiv B_{(2+\sigma)D}(x_0)$.

Проинтегрируем теперь уравнение (1.1) по шару B_t, учитывая, что решение равно нулю в окрестности границы этого шара. Интегрирование по частям в диффузионном слагаемом дает

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{B_t} v^\beta\,dx + \int\limits_{B_t} h(x,\tau)v^\lambda\,dx = 0, \quad \tau\in[0,t]. \tag{6.2}$$

Оценка (1.4) и применение неравенства Гельдера дают ($h = h(x_0,t)$)

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_t} h(x,\tau)v^\lambda\,dx &\le Ch\int\limits_{B_t} v^\lambda\,dx\\ &\le Ch\biggl(\int\limits_{B_t} v^\beta\,dx\biggr)^{\frac{\lambda}{\beta}}\biggl(\int\limits_{B_t} dx\biggr)^{1-\frac{\lambda}{\beta}}\\ &= \biggl(\int\limits_{B_t} v^\beta\,dx\biggr)^{\frac{\lambda}{\beta}} MD^{N\frac{\beta-\lambda}{\beta}}h, \end{aligned} \tag{6.3}$$

где M — некоторая константа. Обозначая теперь $E(\tau)=\int_{B_t} v^\beta(x,\tau)\,dx$, из (6.1) и (6.2) получаем, что

$$\frac{dE}{d\tau} \ge -MhD^{N\frac{\beta-\lambda}{\beta}}E^{\frac{\lambda}{\beta}},$$

причем $E(0) = \int_{B_t} u_0^\beta(x)\,dx = \omega_N\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}D^N \equiv \gamma t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}D^N$. Интегрируя это дифференциальное неравенство, приходим к оценке

$$\begin{aligned}E(\tau)^{\frac{\beta-\lambda}{\beta}} &\ge E(0)^{\frac{\beta-\lambda}{\beta}} - \Bigl(\frac{\beta-\lambda}{\beta}\Bigr)MD^{N\frac{\beta-\lambda}{\beta}}h\tau\\ &\ge hD^{N\frac{\beta-\lambda}{\beta}}\left[\gamma^{\frac{\beta-\lambda}{\beta}}t - \Bigl(\frac{\beta-\lambda}{\beta}\Bigr)M\tau\right].\end{aligned}$$

Положим $\tau_0 = \frac{1}{2}\frac{\gamma^{\frac{\beta-\lambda}{\beta}}}{M}\frac{\beta}{\beta-\lambda}t \equiv m_0 t$. Тогда

$$E(m_0t) \ge \Bigl(\gamma^{\frac{\beta-\lambda}{\beta}}/2\Bigr)hD^{N\frac{\beta-\lambda}{\beta}}t > 0.$$

Таким образом, получаем, что для некоторого $m_0 = m_0(N,\sigma,\beta,\lambda)$

$$E(m_0t) \equiv \int\limits_{B_t(x_0)} v^\beta(x,m_0t) > 0.$$

Следовательно, $u(x,m_0t) \ge v(x,m_0t) > 0$ в окрестности точки x_0. Отсюда следуют два вывода.

С одной стороны, в случае, когда $\varphi_t(x_0)$ не стремится к нулю при $|x_0| \to \infty$ и мы имеем точки x_0 с рассмотренным свойством при любом малом t как угодно далеко от начала координат, это доказывает отсутствие мгновенной компактификации носителя: для любого малого момента времени вида $m_0 t$ найдется точка $x_0 = x_0(t)$ как угодно далеко от начала координат, такая, что $u(x, \tau) > 0$ в окрестности этой точки.

С другой стороны, если $\varphi_t(x_0) \to 0$ при $|x_0| \to \infty$, то положим $x_0 = x_0(t)$, где $|x_0| = \varphi_t^{-1}(\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-r}})$. Тогда

$$\oint\limits_{|x-x_0|<D(x_0, m_0^{-1}(m_0 t))} u_0^\beta(x)\, dx \geq \gamma_0 m_0^{-\frac{\beta}{\beta-\lambda}} (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} \equiv M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}},$$

и в то же время для всех $y \in \mathbb{R}^N$, таких, что $|y| > |x_0|$, по определению функции $\varphi_t^{-1}(s)$ выполнено

$$\oint\limits_{|x-y|<D(x_0, m_0^{-1}(m_0 t))} u_0^\beta(x)\, dx < \gamma_0 m_0^{-\frac{\beta}{\beta-\lambda}} (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} = M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}},$$

то есть, по определению, $|x_0| = \varphi^{-1}_{m_0^{-1}(m_0 t)}(M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}})$, причем $u(x_0, m_0 t) \neq 0$. Ввиду произвольности t, обозначая $m_0 t$ снова через t, видим, что для любого малого $t > 0$ найдется точка $x_0 = x_0(t/m_0)$ такая, что

$$|x_0(t/m_0)| = \varphi^{-1}_{m_0^{-1} t}(M_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}), \qquad u(x_0(t/m_0), t) \neq 0.$$

Следовательно, доказана оценка (1.15) с $M_1 = m_0^{-1}$ и $\gamma_1 = M_0$, а вместе с ней доказана и теорема 1.1.

Благодарности. В заключение автор хотел бы выразить свою искреннюю благодарность А. Е. Шишкову и А. Ф. Тедееву за внимание к данной работе и ценные обсуждения в ходе ее выполнения.

Литература

[1] R. Kersner, A. Shishkov, *Instantaneous shrinking of the support of energy solutions* // Journal of Math. Anal. and Appl., **198** (1996), 729–750.

[2] А. Е. Шишков, *Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка* // Матем. сб., **190** (1999), N 12, 129–156.

[3] S. N. Antontsev, J. I. Diaz, S. I. Shmarev, *Energy methods for the free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics*, 2002, Birkhauser, 334 p.

[4] S. N. Antontsev, J. I. Diaz, S. I. Shmarev, *The support shrinking properties for solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms* // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **4 (6)** (1995), N 1, 5–30.

[5] S. N. Antontsev, J. I. Diaz, S. I. Shmarev, *The support shrinking in solutions of parabolic equations with non-homogeneous absorption terms* // Bandle, C. (ed.) et al, Elliptic and parabolic problems, Proceedings of the 2nd European conference, Pont-a-Mousson, June 1994. Harlow: Longman Scientific & Technical, Pitman Res. Notes Math., 1995, Ser. 325, 24–39.

[6] А. С. Калашников, *О зависимости свойств решений параболических уравнений в неограниченных областях от поведения коэффициентов на бесконечности* // Матем. сб., **125 (167)** (1984), N 3(11), 398–409.

[7] А. С. Калашников, *О поведении вблизи начальной гиперплоскости решений задачи Коши для параболических систем с нелинейной диссипацией* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского, Изд-во Моск. ун-та, М., **16** (1992), 106–113.

[8] А. С. Калашников, *О квазилинейных вырождающихся параболических уравнениях с сингулярными младшими членами и растущими начальными данными* // Дифференциальные уравнения, **29** (1993), N 6, 999–1009.

[9] У. Г. Абдуллаев, *О мгновенном сжатии носителя решения нелинейного вырождающегося параболического уравнения* // Мат. заметки, **63** (1998), N 3, 323–331.

[10] У. Г. Абдуллаев, *О точных локальных оценках носителя решений в задачах для нелинейных параболических уравнений* // Матем. сб., **186** (1995), N 8, 3–24.

[11] M. Ughi, *Initial behavior of the free boundary for a porous media equation with strong absorption* // Advances in Math. Sciences and Applications, Gakkotosho, Tokyo, **11** (2001), N 1, 333–345.

[12] Li Jun-Jie, *Instantaneous shrinking of the support of solutions to certain parabolic equations with unbounded initial data* // Nonlinear Analysis, **48** (2002), 1–12.

[13] Li Jun-Jie, Jing-jun, *Instantaneous shrinking of the support for solutions of parabolic variational inequalities* // Appl. Math., Ser. A, **20** (2005), N 3, 303–312.

[14] D. Andreucci, A. F. Tedeev, *Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations* // Advances in Differential Equations, **10** (2005), N 1, 89–120.

[15] D. Andreucci, A. F. Tedeev, *Finite speed of propagation for the thin film equation and other higher order parabolic equations with general nonlinearity* // Interfaces and free boundaries, **3** (2001),N 3, 233–264.

[16] D. Andreucci, A. F. Tedeev, *A Fujita type result for a degenerate Neumann problem in domains with non compact boundary* // J. Math. Anal. Appl., **231** (1999), 543–567.

[17] С. П. Дегтярев, *Об условиях мгновенной компактификации носителя решения и о точных оценках носителя в задаче Коши для параболического уравнения с двойной нелинейностью и абсорбцией* // Матем. сб., **199** (2008), N 4, 37–64.

[18] Kazuhiro Ishige, *On the existence of solutions of the Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation* // SIAM J. Math. Anal., **27** (1996), N 5, 1235–1260.

[19] H. J. Fan, *Cauchy Problem of Some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure* // Acta Mathematica Sinica, English Series, **20** (2004), N 4, 663–682.

[20] M. Tsutsumi, *On solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations with absorption* // J. Math. Anal. Appl, **132** (1988), 187–212.

[21] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: "Наука", 1967.

[22] M. Bertsch, *A class of degenerate diffusion equations with a singular nonlinear term* // Nonlinear Analysis, Methods&Applications, **7** (1983), N 1, 117–127.

[23] M. Bertsch, R. Kersner, L. A. Peletier, *Positivity versus localization in degenerate diffusion equations* // Nonlinear Analysis, Methods&Applications, **9** (1985), N 9, 987–1008.

[24] D. Aronson, M. G. Crandall, L. A. Peletier, *Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem* // Nonlinear Analysis, Methods&Applications, **6** (1982), N 10, 1001–1022.

[25] E. Di Benedetto, M. A. Herrero, *On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation* // Transaction of the AMS, **314** (1989), N 1, 187–224.

Сведения об авторах

Сергей Петрович Дегтярев

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 74
83114, Донецк
Украина
E-Mail: `spdegt@yahoo.com`