Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 3, 283 – 310

Аналог теоремы Биркгофа и полнота систем корневых векторов дифференциального оператора дробного порядка с матричными коэффициентами

Анна В. Агибалова

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Устанавлен аналог теоремы Биркгофа об асимптотике решений матричного дифференциального уравнения дробного порядка $n-\varepsilon$, а также в пространстве $L_1([0,1],\mathbb{C}^p)$ доказана полнота системы собственных и присоединенных функций граничной задачи для дифференциального оператора дробного порядка $n-\varepsilon$ с распадающимися нормированными краевыми условиями.

2000 MSC. 34L10.

Ключевые слова и фразы. Дифференциальный оператор, краевая задача, собственные и присоединенные функции, полнота.

1. Введение

Известно (см. [7]), что система собственных и присоединенных функций (ССПФ) оператора Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

с разделяющимися граничными условиями

$$y'(0) - h_0 y(0) = y'(1) - h_1 y(1) = 0$$

полна в пространстве $L^2[0,1]$ при любом комплекснозначном потенциале $q \in L^1[0,1]$ и любых $h_0, h_1 \in \mathbb{C}$. Подобный результат также имеет место для произвольных невырожденных граничных условий (см. [7]).

Статья поступила в редакцию 15.07.2009

Для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)} = \lambda y \tag{1.1}$$

произвольного целого порядка $n > 2$ исследование вопросов полноты и базисности ССПФ краевых задач восходит к классическим работам Биркгофа (см. [15]) и Тамаркина (см. [12]). Ими детально изучены краевые задачи для уравнения (1.1) с регулярными краевыми условиями (см. [8, §8]).

С другой стороны, задача с разделяющимися краевыми условиями для уравнения (1.1) в $L^2[0,1]$ является регулярной лишь тогда, когда число краевых условий в нуле равно числу краевых условий в единице и, в частности, порядок уравнения четен. Для уравнений (1.1) полнота ССПФ задачи с нерегулярными распадающимися граничными условиями впервые анонсирована М. В. Келдышем в [3], а доказана А. А. Шкаликовым (см. [14]) (для случая аналитических коэффициентов $p_k(\cdot)$ — несколько ранее А. П. Хромовым [13]). Вопросам полноты ССПФ краевых задач для уравнений (1.1) с нерегулярными (не обязательно распадающимися) краевыми условиями посвящены также работы В. С. Рыхлова (см., например, [9] и цитируемую там литературу).

В работе автора (см. [1]) результат А. А. Шкаликова был распространен на векторное уравнение вида

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) y^{(k)} = \lambda y, \qquad y = \mathrm{col}(y_1, \dots, y_p), \tag{1.2}$$

с матричными коэффициентами $P_k(x)$. Отметим также, что уравнению (1.2) с матричными коэффициентами посвящены работы Лужиной (см. [4, 5]).

Далее, в работе М. М. Маламуда и Л. Л. Оридороги (см. [16]) результат о полноте из [14] был распространен на случай уравнений дробного порядка $\alpha = n - \varepsilon$ вида

$$l_\alpha(D)y := D_x^{n-\varepsilon} y + \sum_{k=2}^{n} p_{n-k}(x) D_x^{n-k-\varepsilon} y = \lambda y. \tag{1.3}$$

Здесь $n \in \mathbb{Z}_+,\ n > 2$, $0 \le \varepsilon < 1$ и $D_x^{k-\varepsilon}$ обозначает оператор дробного дифференцирования

$$D_x^{k-\varepsilon} y = \frac{d^k}{dx^k} J^\varepsilon y = y^{(k-\varepsilon)}(x), \qquad J^\varepsilon y = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^x (x-t)^{\varepsilon-1} y(t)\, dt,$$

$J^0 = s - \lim_{\varepsilon\downarrow 0} J^\varepsilon = I,\ k \in \mathbb{Z}_+$.

В настоящей работе результаты М. М. Маламуда и Л. Л. Оридороги [16] обобщены на случай векторного уравнения (1.3) с аналитическими матричными коэффициентами $P_k(x)$.

Именно, для векторного уравнения (1.3) установлен аналог теоремы Биркгофа (см. [8, 15]) об асимптотике решений (для скалярного дифференциального уравнения дробного порядка такой аналог теоремы Биркгофа получен в [16]). Кроме того, доказаны полнота в пространствах $L_1([0,1],\mathbb{C}^p)$ и $L_2([0,1],\mathbb{C}^p)$ ССПФ для векторного уравнения (1.3) с распадающимися нормированными краевыми условиями вида

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} A_{jk} y^{(k-\varepsilon)}(0) = I_p y^{(k_j-\varepsilon)}(0) + \sum_{k=0}^{k_j-1} A_{jk} y^{(k-\varepsilon)}(0) = 0, \qquad j \in \{1,\dots,l\},$$

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{jk} y^{(k-\varepsilon)}(1) = I_p y^{(k_j-\varepsilon)}(1) + \sum_{k=0}^{k_j-1} B_{jk} y^{(k-\varepsilon)}(1) = 0, \qquad j \in \{l+1,\dots,n\}.$$

Здесь $y = \mathrm{col}(y_1,\dots,y_p)$, $n-1 \geqslant k_1 > k_2 > \dots > k_l \geqslant 0$, $n-1 \geqslant k_{l+1} > k_{l+2} > \dots > k_n \geqslant 0$, $P_k(x)$ — $(p\times p)$ матрицы-функции, A_{jk} и $B_{jk} \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $k \in \{0,\dots,n-1\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, I_p — единичная матрица порядка p.

2. Асимптотика решений матричного дифференциального уравнения дробного порядка

2.1 Рассмотрим сначала простейшее матричное дифференциальное уравнение

$$Z^{(\alpha)}(x,\lambda) = \lambda Z(x,\lambda) \tag{2.1}$$

порядка $\alpha = n-\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le \varepsilon < 1$. Для него поставим задачу Коши

$$D_x^\alpha Z_k(x,\lambda) = \lambda Z_k(x,\lambda), \qquad k \in \{1,2,\dots,n\}, \tag{2.2}$$

$$D_x^{\alpha-j} Z_k(0,\lambda) = \delta_{jk} I_p, \qquad j,\ k \in \{1,2,\dots,n\}, \tag{2.3}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Решения этой задачи имеют вид

$$Z_k(x,\lambda) = x^{\alpha-k}E_{1/\alpha}(\lambda x^{\alpha};\alpha-k+1)I_p, \tag{2.4}$$

где

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\mu+j\rho^{-1})}, \qquad \rho>0,\ \mu\in\mathbb{C},$$

функция типа Миттаг–Леффлера. Известно (см. [2, 10]), что $E_\rho(z;\mu)$ — целая функция порядка ρ и типа 1.

Пусть

$$n_1 := [(1-n+\varepsilon)/2], \qquad n_2 := [(n-\varepsilon)/2]$$

и

$$\omega_j = \exp(2\pi i j/\alpha), \quad j\in\{n_1, n_1+1,\dots,n_2\},$$

$$\beta = 2\pi\min\Big\{\Big\{\frac{n-\varepsilon}{4}\Big\}, 1-\Big\{\frac{n-\varepsilon}{4}\Big\}\Big\},$$

где $\{x\}$ обозначает дробную часть $x\in\mathbb{R}$.

В комплексной плоскости рассмотрим следующие секторы:

$$\begin{aligned}
\tilde S_\beta^- &= \{\lambda\in\mathbb{C} : -\pi<\arg\lambda<-\beta\};\\
S_\beta^- &= \{\lambda\in\mathbb{C} : -\beta<\arg\lambda<0\};\\
S_\beta^+ &= \{\lambda\in\mathbb{C} : 0<\arg\lambda<\beta\};\\
\tilde S_\beta^+ &= \{\lambda\in\mathbb{C} : \beta<\arg\lambda<\pi\}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

В каждом из этих секторов занумеруем числа $\{\omega_j\}_{n_1}^{n_2}$, так чтобы

$$\begin{aligned}
\Re(\omega_{j_1}\lambda^{1/\alpha}) > \Re(\omega_{j_2}\lambda^{1/\alpha}) > \dots > \Re(\omega_{j_q}\lambda^{1/\alpha}) > 0&\\
> \Re(\omega_{j_{q+1}}\lambda^{1/\alpha}) > \dots > \Re(\omega_{j_n}\lambda^{1/\alpha}).&
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь $\lambda^{1/\alpha}$ — ветвь многозначной в $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ функции, выделяемой начальным условием $1^{1/\alpha} := 1$.

Лемма 2.1. *Пусть $n\ge 3$, $m=[n/2]$ и $\varepsilon\in[0,1)$. Тогда уравнение (2.1) имеет фундаментальную систему матричных решений $\{\mathcal{E}_j(x;\lambda)\}_1^n$, голоморфную по $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ и удовлетворяющую асимптотике*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) &= \exp(\omega_{j_s}x\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})I_p + O(x^{-1}|\lambda|^{-\frac{1}{n-\varepsilon}})I_p, \qquad s\le q,\\
\mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) &= O(\min\{x^{-\varepsilon}|\lambda|^{-\frac{\varepsilon}{n-\varepsilon}},\ x^{-1}|\lambda|^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\})I_p, \qquad s>q,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

и

$$D_x^{\nu-\varepsilon}(\mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda)) = \omega_{j_s}^{\nu-\varepsilon}\lambda^{\frac{\nu-\varepsilon}{\alpha}}\exp(\omega_{j_s}x\lambda^{\frac{1}{\alpha}})I_p + O(x^{-\nu-n+\varepsilon}|\lambda|^{-\frac{1}{\alpha}})I_p, \quad s \le q,$$
$$D_x^{\nu-\varepsilon}(\mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda)) = O(\min\{|\lambda|^{\frac{\nu-\varepsilon}{\alpha}},\ x^{-\nu-n+\varepsilon}|\lambda|^{-\frac{1}{\alpha}}\})I_p, \qquad s > q. \tag{2.8}$$

Доказательство. i) Решения $\mathcal{E}_k(x,\lambda)$ уравнения (2.1) определим как решения системы матричных уравнений

$$x^{\alpha-k}E_{1/\alpha}(\lambda x^{\alpha};\alpha-k+1)I_p = \frac{1}{\alpha}\lambda^{\frac{k-\alpha}{\alpha}}\sum_{j=-m}^{m}\omega_j^k\mathcal{E}_{j+m+1}(x,\lambda) \quad k\in\{1,\dots,n\}, \tag{2.9}$$

при $n = 2m+1$ и

$$x^{\alpha-k}E_{1/\alpha}(\lambda x^{\alpha};\alpha-k+1)I_p = \frac{1}{\alpha}\lambda^{\frac{k-\alpha}{\alpha}}\sum_{j=-m}^{m-1}\omega_j^k\mathcal{E}_{j+m+1}(x,\lambda) \quad k\in\{1,\dots,n\} \tag{2.10}$$

при $n = 2m$.

С учетом равенства $m = [\frac{n}{2}]$ и равенства (2.5), системы (2.8) и (2.9) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=n_1}^{n_2}\omega_j^n\mathcal{E}_{j+m+1}(x,\lambda) = (n-\varepsilon)\lambda^{\frac{-\varepsilon}{n-\varepsilon}}Z_n(x;\lambda), \\ \sum\limits_{j=n_1}^{n_2}\omega_j^{n-1}\mathcal{E}_{j+m+1}(x,\lambda) = (n-\varepsilon)\lambda^{\frac{1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}Z_{n-1}(x;\lambda), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=n_1}^{n_2}\omega_j\mathcal{E}_{j+m+1}(x,\lambda) = (n-\varepsilon)\lambda^{\frac{n-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}Z_1(x;\lambda). \end{cases} \tag{2.11}$$

Обозначим через Ω_0 блочную матрицу из коэффициентов системы (2.10):

$$\Omega_0 := \begin{pmatrix} \omega_{n_1}^n I_p & \omega_{n_1+1}^n I_p & \dots & \omega_{n_2}^n I_p \\ \omega_{n_1}^{n-1} I_p & \omega_{n_1+1}^{n-1} I_p & \dots & \omega_{n_2}^{n-1} I_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n_1}^1 I_p & \omega_{n_1+1}^1 I_p & \dots & \omega_{n_2}^1 I_p \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

а через $\Omega_0^{-1} =: (a_{kj}I_p)_{k,j=1}^n$ матрицу, обратную к ней. Тогда решение системы (2.10) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{n_1+m+1}(x;\lambda) \\ \mathcal{E}_{n_1+1+m+1}(x;\lambda) \\ \vdots \\ \mathcal{E}_{n_2+m+1}(x;\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n}(n-\varepsilon)a_{1j}\lambda^{\frac{j-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}Z_{n-j+1}(x;\lambda) \\ \sum\limits_{j=1}^{n}(n-\varepsilon)a_{2j}\lambda^{\frac{j-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}Z_{n-j+1}(x;\lambda) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n}(n-\varepsilon)a_{nj}\lambda^{\frac{j-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}Z_{n-j+1}(x;\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Поскольку $n_1 = -m$, то решения $\{\mathcal{E}_{j+m+1}(x;\lambda)\}_{j=n_1}^{n_2}$ можно представить равенствами

$$\mathcal{E}_k(x;\lambda) = \sum_{j=1}^{n}(n-\varepsilon)a_{kj}\lambda^{\frac{j-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}Z_{n-j+1}(x;\lambda), \qquad k \in \{1,\dots,n\}. \tag{2.14}$$

Покажем, что полученная система решений обладает желаемыми свойствами (2.6)–(2.7). Система $\{\mathcal{E}_j(x;\lambda)\}_{j=1}^{n}$ является фундаментальной системой решений уравнения (2.1) при $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, поскольку такова система $\{(n-\varepsilon)\lambda^{\frac{k-\varepsilon}{n-\varepsilon}}Z_{n-k}(x;\lambda)\}_{k=0}^{n-1}$ и $\det\Omega_0 \neq 0$.

ii) Для доказательства соотношений (2.6) и (2.7) достаточно получить асимптотическое поведение решений $(n-\varepsilon)\lambda^{\frac{k-\varepsilon}{n-\varepsilon}}Z_j(x;\lambda)$, $j \in \{1,\dots,n\}$, уравнения (2.1).

Известно (см. [2] и [10]), что функция $E_\rho(z;\mu)$ допускает представление

$$E_\rho(z;\mu) = \rho \sum_{|\arg z + 2\pi j| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}} (\omega_j z^\rho)^{1-\mu}\exp(\omega_j z^\rho) \\ - \sum_{k=1}^{p}\frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho^{-1})} + O(|z|^{-1-p}), \quad z \to \infty. \tag{2.15}$$

Здесь первая сумма берется по значениям $j \in \mathbb{Z}$, для которых

$$|(\arg z + 2\pi j)/\alpha| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку

$$(\omega_j z^\rho)^{1-\mu}\exp(\omega_j z^\rho) = O(|z|^{-1}) \qquad \text{при} \quad \Re(\omega_j z^\rho) < 0,$$

то равенство (2.15) можно переписать в виде

$$E_\rho(z;\mu) = \rho\sum_{j=n_1}^{n_2}(\omega_j z^\rho)^{1-\mu}\exp(\omega_j z^\rho) + O(|z|^{-1}), \tag{2.16}$$

где предполагается, что z^ρ лежит в угле $\{z\in\mathbb{C}:\ |\arg z^\rho|<\pi\rho\}$.

Подставляя (2.16) в (2.5) и учитывая, что $\omega_j^{n-\varepsilon}=1$, имеем

$$Z_{n-k}(x;\lambda)=\frac{\lambda^{-\frac{k-\varepsilon}{n-\varepsilon}}}{n-\varepsilon}\sum_{j=n_1}^{n_2}\omega_j^{n-k}\exp(\omega_j x\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})I_p+O(x^{k-n}|\lambda|^{-1})I_p. \tag{2.17}$$

Поскольку $\{Z_k(x;\lambda)\}_1^n$ — решения задачи Коши (2.3)–(2.4), то при $x\to 0$ они ограничены. Отсюда можно заключить, что

$$\begin{aligned}(n-\varepsilon)\lambda^{\frac{k-\varepsilon}{n-\varepsilon}}&Z_{n-k}(x;\lambda)\\ &=\sum_{j=n_1}^{n_2}\omega_j^{n-k}\exp(\omega_j x\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})I_p+O(\min\{1,\ x^{k-n}|\lambda|^{-\frac{n-k}{n-\varepsilon}}\})I_p,\\ &\qquad k\in\{1,\dots,n-1\}\end{aligned} \tag{2.18}$$

и

$$\begin{aligned}(n-\varepsilon)\lambda^{-\frac{\varepsilon}{n-\varepsilon}}Z_n(x;\lambda)&=\sum_{j=n_1}^{n_2}\omega_j^{n}\exp(\omega_j x\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})I_p\\ &\quad+O(\min\{x^{-\varepsilon}|\lambda|^{-\frac{\varepsilon}{n-\varepsilon}},\ x^{-n}|\lambda|^{-\frac{n}{n-\varepsilon}}\})I_p.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Кроме того, из соотношений (см. [2])

$$D_x^{\nu-\varepsilon}Z_{n-k}(x;\lambda)=x^{k-\nu}E_{\frac{1}{n-\varepsilon}}(x^{n-\varepsilon}\lambda;k+1-\nu)I_p \tag{2.20}$$

следуют оценки

$$\begin{aligned}D_x^{\nu-\varepsilon}Z_{n-k}(x;\lambda)&=\frac{\lambda^{-\frac{k-\nu}{n-\varepsilon}}}{n-\varepsilon}\sum_{j=n_1}^{n_2}\omega_j^{\nu-k}\exp(\omega_j x\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})I_p\\ &+O(\min\{|\lambda|^{-\frac{k-\nu}{n-\varepsilon}}I_p,\ x^{k-\nu-n+\varepsilon}|\lambda|^{-1}\})I_p,\qquad \nu\in\{0,1,\dots n-1\}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Здесь использовано, что $\Gamma(k-\nu+1)=\infty$ при $\nu>k$.

Из равенств (2.21) следует, что

$$\begin{aligned}D_x^{\nu-\varepsilon}((n-\varepsilon)\lambda^{\frac{k-\varepsilon}{n-\varepsilon}}Z_{n-k})(x;\lambda)&=\lambda^{\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\sum_{j=n_1}^{n_2}\omega_j^{\nu-k}\exp(\omega_j x\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})I_p\\ +O(\min\{|\lambda|^{-\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}}I_p,\ x^{k-\nu-n+\varepsilon}|\lambda|^{-\frac{n-k}{n-\varepsilon}}\})I_p,&\qquad \nu\in\{0,1,\dots n-1\}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Подставляя (2.18) и (2.19) в (2.11) и учитывая, что $a_{l,k+1}$ — элементы обратной к Ω матрице, приходим к оценкам

$$\mathcal{E}_j(x;\lambda) = \exp(\omega_j x\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})I_p + O(\min\{x^{-\varepsilon}|\lambda|^{-\frac{\varepsilon}{n-\varepsilon}}, x^{-1}|\lambda|^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\})I_p, \\ j \in \{1,\dots,n\}. \quad (2.23)$$

А из (2.22) и (2.11) получаем, что

$$D_x^{\nu-\varepsilon}(\mathcal{E}_j(x;\lambda)) = \lambda^{\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\exp(\omega_j x\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})I_p \\ + O(\min\{|\lambda|^{\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}},\ x^{-\nu-n+\varepsilon}|\lambda|^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\})I_p. \quad (2.24)$$

Требуемые соотношения (2.6) и (2.7) теперь следуют из равенств (2.23) и (2.24). □

2.2 В этом пункте представлен аналог теоремы Биркгофа об асимптотике решений уравнения (1.1) (см. [15], а также [8]). Для этого понадобится обобщение леммы о системе интегральных уравнений (см. [8]).

Лемма 2.2. *Пусть S — неограниченная область в $\mathbb{C}$. Рассмотрим систему матричных интегральных уравнений вида*

$$Z_k(x;\lambda) = F_k(x;\lambda) + \sum_{j=1}^{r}\int_0^1 A_{kj}(x,\xi;\lambda)Z_k(\xi;\lambda)\,d\xi, \quad k \in \{1,2,\dots,r\}. \quad (2.25)$$

Предположим, что выполнены следующие условия

1) *матрицы-функции $F_k(x,\lambda)$ непрерывны по x, $x \in [a,b]$, для всех $k \in \{1,2,\dots,r\}$ и $\lambda \in S$;*

2) *при любом λ блочно-матричная функция $(A_{ij}(x,\xi;\lambda))_{i,j=1}^r$ непрерывна в интервалах $a \le x < \xi$ и $\xi < x \le b$;*

3) *при любых $(x,\xi) \in [a,b]\times[a,b]$ блочно-матричная функция $(A_{ij}(x,\xi;\lambda))_{i,j=1}^r$ аналитична по $\lambda \in S$;*

4) *равномерно по $(x,\xi) \in (a,b)\times(a,b)$ при $\lambda \to \infty$ ($\lambda \in S$) выполняются оценки*

$$A_{kj}(x,\xi;\lambda) = \mathbf{O}(|\lambda|^{-\rho}), \qquad k,j \in \{1,2,\dots,r\},$$

где $\mathbf{O}(|\lambda|^{-\rho})$ обозначает матрицу с элементами вида $O(|\lambda|^{-\rho})$.

Тогда существует R_0, такое что система (2.25) имеет единственное решение $\{Z_k(x;\lambda)\}_1^r$ при $\lambda \in S_{R_0} := \{\lambda \in S : |\lambda| > R_0\}$, функции $Z_k(x;\lambda)$ аналитические по λ и при любом $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ имеют следующую асимптотику

$$Z_k(x;\lambda) = F_k(x;\lambda)[1 + \mathbf{O}(|\lambda|^{-\rho})], \qquad \lambda \to \infty.$$

Следующая теорема распространяет известную теорему Биркгофа (см. [15], а также [8]) на случай матричного дифференциального уравнения дробного порядка

$$l_\alpha(D)Y = D_x^{n-\varepsilon}Y + \sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(x)D_x^{n-k-\varepsilon}Y. \tag{2.26}$$

Теорема 2.1. *Пусть $P_j(x) \in C[0,1] \times \mathbb{C}^{p\times p}$, $j \in \{2, \ldots, n\}$, и пусть S — один из секторов S_β^+, S_β^-, $\tilde{S}_\beta^+$ или $\tilde{S}_\beta^-$. Тогда существует фундаментальная система матричных решений $\{Y_k(x,\lambda)\}_1^n$ уравнения (2.26), голоморфная по $\lambda \in S_\beta(R_0) := \{\lambda \in S : |\lambda| > R_0\}$ и при достаточно большом R_0 допускающая асимптотическое представление*

$$Y_k(x;\lambda) = (I_p + \mathbf{O}(|\lambda|^{-\frac{1}{\alpha}}))\mathcal{E}_k(x;\lambda), \qquad k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{2.27}$$

$$D_x^{\nu-\varepsilon}(Y_k(x;\lambda)) = (I_p + \mathbf{O}(|\lambda|^{-\frac{1}{\alpha}}))D_x^{\nu-\varepsilon}\mathcal{E}_k(x;\lambda), \quad \nu \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{2.28}$$

Доказательство. Обозначим

$$m(Y) := \sum_{\nu=0}^{n-2} P_\nu(x)D_x^{\nu-\varepsilon}Y(x).$$

Тогда уравнение (2.26) можно переписать в виде

$$D_x^{n-\varepsilon}Y - \lambda Y = m(Y).$$

Согласно лемме 2.1, $\{\mathcal{E}_j(x,\lambda)\}_1^n$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения $D_x^{n-\varepsilon}Y - \lambda Y = \mathbf{0_p}$, где $\mathbf{0_p}$ — нулевая $(p \times p)$-матрица. Применяя метод вариации произвольных постоянных, перепишем уравнение (2.26) в эквивалентной форме

$$Y(x;\lambda) = \sum_{j=n_1}^{n_2} \mathcal{E}_j(x;\lambda)C_j(\lambda) + \int_0^1 K(x,\xi;\lambda)m_\xi(Y)\,d\xi, \tag{2.29}$$

где

$$K(x,\xi;\lambda) = \begin{cases} \mathbf{0_p}, & x \le \xi, \\ Z_1(x-\xi;\lambda), & x > \xi, \end{cases} \tag{2.30}$$

а $m_\xi(Y)$ обозначает значение $m(Y)$ в точке ξ.

Очевидно, что для произвольной непрерывной матрицы-функции $\Phi(\xi;\lambda)$

$$\int_0^1 (\Phi(\xi;\lambda)\mathcal{E}_j(x;\lambda))m_\xi(Y)\,d\xi = \left(\int_0^1 \varphi(\xi;\lambda)m_\xi(Y)\,d\xi\right)\mathcal{E}_j(x;\lambda).$$

Следовательно, для произвольного вырожденного ядра $\tilde{K}(x,\xi;\lambda)$ вида

$$\tilde{K}(x,\xi;\lambda) = \sum_{j=n_1}^{n_2} \Phi_j(\xi;\lambda)\mathcal{E}_j(x;\lambda)$$

любое решение интегрального уравнения

$$Y(x;\lambda) = \sum_{j=n_1}^{n_2} \mathcal{E}_j(x;\lambda)C_j(\lambda) + \int_0^1 (\tilde{K}(x,\xi;\lambda) + K(x,\xi;\lambda))m_\xi(Y)\,d\xi$$

является решением уравнения (2.29) и, следовательно, уравнения (2.26).

ii) Пусть вначале $s \le q$.

Рассмотрим вырожденные ядра

$$\tilde{K}_s(x,\xi;\lambda) := -\frac{\lambda^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{\alpha}\sum_{r=1}^{s-1}\omega_{j_r}\exp(-\omega_{j_r}\xi\lambda^{\frac{1}{\alpha}})\mathcal{E}_{j_r}(x;\lambda), \qquad s \le q, \tag{2.31}$$

и положим

$$K_s(x,\xi;\lambda) := K(x,\xi;\lambda) + \tilde{K}_s(x,\xi;\lambda), \qquad s \le q. \tag{2.32}$$

Покажем, что при каждом $s \le q$ и достаточно большом λ уравнение

$$Y_s(x;\lambda) = \mathcal{E}_s(x;\lambda) + \int_0^1 K_s(x,\xi;\lambda)m_\xi(Y_s)\,d\xi, \qquad s \le q, \tag{2.33}$$

имеет единственное решение, обладающее нужными свойствами (2.27), (2.28).

Применяя к уравнению (2.33) операторы $D_x^{\nu-\varepsilon}$, $\nu \in \{0,\ldots,n-1\}$, получаем, что любое его решение удовлетворяет системе матричных интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} D_x^{0-\varepsilon} Y_s(x;\lambda) = D_x^{0-\varepsilon}\mathcal{E}_s(x;\lambda) + \int_0^1 (D_x^{0-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda)) m_\xi(Y_s)\, d\xi, \\ D_x^{1-\varepsilon} Y_s(x;\lambda) = D_x^{1-\varepsilon}\mathcal{E}_s(x;\lambda) + \int_0^1 (D_x^{1-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda)) m_\xi(Y_s)\, d\xi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_x^{n-1-\varepsilon} Y_s(x;\lambda) \\ \qquad = D_x^{n-1-\varepsilon}\mathcal{E}_s(x;\lambda) + \int\limits_0^1 (D_x^{n-1-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda)) m_\xi(Y_s)\, d\xi. \end{cases} \tag{2.34}$$

Комбинируя равенства (2.7) и (2.21) (при $k = n-1$), из (2.30), (2.31) и (2.32) заключаем, что при $\nu \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned} &D_x^{\nu-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda) \\ &= \sum_{r\geq s} \left(\frac{\lambda^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}}{n-\varepsilon} \omega_{j_r}^{\nu-(n-1)} \exp(\omega_{j_r}(x-\xi)\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) \right) I_p + \\ &\qquad\qquad + O\left(|\lambda|^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}\right) I_p \quad \text{при } x > \xi; \\ &D_x^{\nu-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda) \\ &= \sum_{r<s} \left(-\frac{\lambda^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}}{n-\varepsilon} \omega_{j_r}^{\nu-(n-1)} \exp(\omega_{j_r}(x-\xi)\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) \right) I_p + \\ &\qquad + \exp(-\omega_{j_{s-1}}\xi\lambda^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}) O\left(|\lambda|^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}\right) I_p \quad \text{при } x < \xi. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Пусть

$$Z_{s,\nu}(x;\lambda) := \lambda^{-\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} \exp(-\omega_{j_s} x \lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) D_x^{\nu-\varepsilon} Y_s(x;\lambda), \\ s \in \{1, \dots, q\}, \quad \nu \in \{0, \dots, n-1\}. \tag{2.36}$$

Тогда систему (2.34) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\lambda^{\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} \exp(\omega_{j_s} x \lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) Z_{s,\nu}(x;\lambda) \\ &\quad = D_x^{\nu-\varepsilon}\mathcal{E}_s(x;\lambda) + \sum_{\eta=0}^{n-2} \int\limits_0^1 (D_x^{\nu-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda)) P_\eta(\xi) \big(Y_s^{(\eta-\varepsilon)}(\xi;\lambda)\big)\, d\xi \\ &\qquad = D_x^{\nu-\varepsilon}\mathcal{E}_s(x;\lambda) + \sum_{\eta=0}^{n-2} \int\limits_0^1 (D_x^{\nu-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda)) P_\eta(\xi) \lambda^{\frac{\eta-\varepsilon}{n-\varepsilon}} \\ &\qquad\qquad \times \exp(\omega_{j_s}\xi\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) Z_{s,\eta}(\xi;\lambda)\, d\xi, \\ &\qquad\qquad s \in \{1, \dots, q\}, \quad \nu \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Пусть

$$L_{s;\nu}(x,\xi;\lambda) := \exp(\omega_{j_s}(\xi - x)\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) D_x^{\nu-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda). \tag{2.38}$$

Тогда система (2.37) примет вид

$$\begin{gathered} Z_{s;\nu}(x;\lambda) = \lambda^{-\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} \exp(-\omega_{j_s} x \lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) D_x^{\nu-\varepsilon} \mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) \\ + \sum_{\eta=0}^{n-2} \left(\int_0^1 P_\eta(x) L_{s;\nu}(x,\xi;\lambda) \lambda^{\frac{\eta-\nu}{n-\varepsilon}} Z_{s;\eta}(\xi;\lambda)\, d\xi \right), \\ s \in \{1,\ldots,q\}, \quad \nu \in \{0,1,\ldots,n-1\}. \end{gathered} \tag{2.39}$$

Из (2.35) следует, что

$$L_{s;\nu}(x,\xi;\lambda) = O\left(\lambda^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}\right) I_p.$$

Так как коэффициенты $P_j(x)$ — ограниченные матрицы-функции, то матрицы-функции

$$\tilde{L}_{s;\eta,\nu}(x,\xi;\lambda) := \lambda^{\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}} P_\eta(\xi) L_{s;\nu}(x,\xi;\lambda) \tag{2.40}$$

также являются ограниченными, т.е. для их элементов выполняются неравенства

$$\begin{gathered} |(\tilde{L}_{s;\eta,\nu}(x,\xi;\lambda))_{kj}| \le B_{kj}, \\ k,\ j \in \{1,\ldots,p\}, \quad \nu \in \{0,1,\ldots,n-1\}, \quad s \in \{1,\ldots,q\}, \end{gathered} \tag{2.41}$$

с некоторыми константами B_{kj}, не зависящими от x, ξ и λ.

Значит, систему (2.39) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} Z_{s;\nu}(x;\lambda) = \lambda^{-\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} \exp(-\omega_{j_s} x \lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) D_x^{\nu-\varepsilon} \mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) \\ + \sum_{\eta=0}^{n-2} \left(\lambda^{-\frac{n-1-\eta}{n-\varepsilon}} \int_0^1 \tilde{L}_{s;\eta,\nu}(x,\xi;\lambda) Z_{s;\eta}(\xi;\lambda)\, d\xi \right), \\ s \in \{1,\ldots,q\}, \quad \nu \in \{0,1,\ldots,n-1\}. \end{gathered} \tag{2.42}$$

Пусть теперь

$$\begin{gathered} A_{s;\eta,\nu}(x,\xi;\lambda) := \lambda^{-\frac{n-1-\eta}{n-\varepsilon}} \tilde{L}_{s;\eta,\nu}(x,\xi;\lambda) \\ F_{s,\nu}(x,\lambda) := \lambda^{-\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} \exp(-\omega_{j_s} x \lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) D_x^{\nu-\varepsilon} \mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda). \end{gathered} \tag{2.43}$$

Тогда система (2.42) перепишется в виде

$$Z_{s;\nu}(x;\lambda) = F_{s;\nu}(x;\lambda) + \sum_{\eta=0}^{n-2} \int_0^1 A_{s;\eta,\nu}(x,\xi;\lambda) Z_{s;\eta}(\xi;\lambda)\, d\xi,$$
$$s \in \{1,\dots,q\}, \quad \nu \in \{0,1,\dots,n-1\}. \quad (2.44)$$

При каждом фиксированном $s \le q$ получили систему матричных интегральных уравнений вида (2.25). Проверим условия леммы 2.2. Если $S = S_\beta$, то очевидно, что условия 1) и 3) выполнены. Условие 2) обеспечивается равенствами (2.35) и определениями (2.38), (2.40) и (2.43). Наконец, так как $n-1-\eta \ge 1$, то из (2.43) следует, что

$$A_{s;\eta,\nu}(x,\xi;\lambda) = \mathbf{O}\left(\lambda^{-\frac{n-1-\eta}{n-\varepsilon}}\right) = \mathbf{O}\left(\lambda^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\right). \quad (2.45)$$

Следовательно, по лемме 2.2 система (2.44) имеет единственное решение $\{Z_{s;\nu}\}_{\nu=0}^{n-1}$, голоморфное по $\lambda \in S$ и допускающее асимптотическое разложение вида

$$Z_{s;\nu}(x;\lambda) = \lambda^{-\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} \exp(-\omega_{j_s} x \lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) D_x^{\nu-\varepsilon} \mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) \left(I_p + \mathbf{O}\left(\lambda^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\right)\right)$$
$$= \lambda^{-\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} \exp(-\omega_{j_s} x \lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) D_x^{\nu-\varepsilon} \mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) + \mathbf{O}\left(\lambda^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\right),$$
$$\lambda \in S,\ s \in \{1,\dots,q\}, \quad \nu \in \{0,1,\dots,n-1\}. \quad (2.46)$$

Из (2.36) следует, что $\{D_x^{\nu-\varepsilon} Y_s(x;\lambda)\}_{\nu=0}^{n-1}$ – единственное решение системы (2.34) при $\lambda \in S(R_0)$. Кроме того, система $\{D_x^{\nu-\varepsilon} Y_s(x;\lambda)\}_{\nu=0}^{n-1}$ удовлетворяет следующим соотношениям

$$D_x^{\nu-\varepsilon} Y_s(x;\lambda) = D_x^{\nu-\varepsilon} \mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) + \mathbf{O}\left(|\lambda|^{\frac{\nu-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}} \exp(\omega_{j_s} x \lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})\right),$$
$$s \in \{1,\dots.q\}, \quad \nu \in \{0,1,\dots,n-1\}. \quad (2.47)$$

С учетом (2.7) имеем

$$D_x^{\nu-\varepsilon} Y_s(x;\lambda) = D_x^{\nu-\varepsilon} \mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) \left(I_p + \mathbf{O}\left(|\lambda|^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\right)\right),$$
$$s \in \{1,\dots.q\}, \quad \nu \in \{0,1,\dots,n-1\}.$$

Докажем равенство (2.27). Поскольку коэффициенты $P_\nu(s)$ — ограниченные матрицы-функции, легко видеть, что для элементов $(m_\xi(Y_s))_{ij}$ матрицы $|m_\xi(Y_s)|$ выполнены неравенства

$$|(m_\xi(Y_s))_{ij}| \le c_{ij} \sum_{\nu=0}^{n-2} |(D_x^{\nu-\varepsilon} Y_s(\xi;\lambda))_{ij}| = O\left(|\lambda|^{\frac{n-2-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\right) \exp(-\omega_{j_s} \xi \lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}). \quad (2.48)$$

Далее, комбинируя оценку (2.6) для $\mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda)$ с оценкой (2.17) для $Z_1(x;\lambda)$, из (2.31) и (2.32) получаем

$$K_s(x,\xi;\lambda) = \lambda^{\frac{n-2-\varepsilon}{n-\varepsilon}} O\left(\exp(-\omega_{j_s}(x-\xi)\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})\right) I_p \\ + \exp(-\omega_{j_{s-1}}\xi\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) O\left(x^{-\varepsilon}|\lambda|^{-\frac{n-1}{n-\varepsilon}}\right) I_p. \quad (2.49)$$

Из соотношений (2.48) и (2.49) следует, что

$$K_s(x,\xi;\lambda)m_\xi(Y_s) = \mathbf{O}\left(|\lambda|^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} \exp(-\omega_{j_s}x\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})\right) + \mathbf{O}\left(x^{-\varepsilon}|\lambda|^{-\frac{1+\varepsilon}{n-\varepsilon}}\right). \quad (2.50)$$

Комбинируя (2.33), (2.50) и (2.6), получаем требуемые оценки

$$Y_s(x;\lambda) = \exp(\omega_{j_s}x\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}) \left(I_p + O\left(|\lambda|^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\right)\right) + O\left(x^{-\varepsilon}|\lambda|^{-\frac{\varepsilon}{n-\varepsilon}}\right) \quad s > q. \quad (2.51)$$

Таким образом, при $s \leq q$ система $\{Y_s(x;\lambda)\}_1^q$ решений уравнения (2.26) удовлетворяет оценкам (2.27) и (2.28).

iii) Рассмотрим убывающие решения, т. е. случай $s > q$.

Положим (сравн. с (2.35))

$$\tilde{K}_s(x,\xi;\lambda) := -\frac{\lambda^{-\frac{n-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}}{n-\varepsilon} \sum_{r=1}^{q} \omega_{j_r} \exp(-\omega_{j_r}\xi\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})\mathcal{E}_{j_r}(x;\lambda) \quad (2.52)$$

и

$$K_s(x,\xi;\lambda) := K(x,\xi;\lambda) + \tilde{K}_s(x,\xi;\lambda), \quad (2.53)$$

где $K(x,\xi;\lambda)$ определяется (2.30).

Комбинируя соотношение (2.7) с (2.21) (при $k = n-1$) и с учетом обозначений (2.30), (2.52) и (2.53), приходим к следующим оценкам

$$D_x^{\nu-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda) \\ = \sum_{r>q} \left(\frac{\lambda^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}}{n-\varepsilon} \omega_{j_r}^{\nu-(n-1)} \exp(\omega_{j_r}(x-\xi)\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})\right) I_p \\ + O\left(|\lambda|^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}\right) I_p = O\left(|\lambda|^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}\right) I_p, \quad \text{при } x > \xi,$$

$$D_x^{\nu-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda) \\ = \sum_{r\leq q} \left(-\frac{\lambda^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}}{n-\varepsilon} \omega_{j_r}^{\nu-(n-1)} \exp(\omega_{j_r}(x-\xi)\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}})\right) I_p \\ + \omega_{j_a}\xi\lambda^{-\frac{1}{n-\varepsilon}} O\left(|\lambda|^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}\right) I_p = O\left(|\lambda|^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}\right) I_p, \quad \text{при } x < \xi,$$

где $\nu \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Таким образом,

$$D_x^{\nu-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda) = O\left(|\lambda|^{-\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}}\right) I_p \quad \text{при } x \neq \xi, \quad s \in \{q+1, \dots, n\}. \tag{2.54}$$

Как и в предыдущем случае, уравнение (2.33) эквивалентно системе (2.34). Положим

$$Z_{s,\nu}(x;\lambda) = \lambda^{-\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} D_x^{\nu-\varepsilon} Y_s(x;\lambda). \tag{2.55}$$

Тогда система (2.34) примет вид

$$\begin{aligned} \lambda^{\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} Z_{s;\nu}(x;\lambda) = D_x^{\nu-\varepsilon}\mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) \\ + \sum_{\eta=0}^{n-2} \int_0^1 (D_x^{\nu-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda)) P_\eta(\xi) \lambda^{\frac{\eta-\varepsilon}{n-\varepsilon}} Z_{s;\eta}(\xi;\lambda)\, d\xi, \\ \nu \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Положим

$$\tilde{L}_{s;\eta,\nu}(x,\xi;\lambda) := \lambda^{\frac{n-1-\nu}{n-\varepsilon}} P_\eta(\xi) D_x^{\nu-\varepsilon} K_s(x,\xi;\lambda).$$

Тогда систему (2.56) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} Z_{s;\nu}(x;\lambda) = \lambda^{-\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} D_x^{\nu-\varepsilon}\mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) \\ + \sum_{\eta=0}^{n-2} \left(\lambda^{-\frac{n-1-\eta}{n-\varepsilon}} \int_0^1 \tilde{L}_{s;\eta,\nu}(x,\xi;\lambda) Z_{s;\eta}(\xi;\lambda)\, d\xi\right), \\ s \in \{1, \dots, n\}, \quad \nu \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Так как $P_\nu(x)$ — ограниченные матрицы-функции при всех $\nu \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, из равенств (2.54) следует, что функции $\tilde{L}_{s;\eta,\nu}(x,\xi;\lambda)$ равномерно ограничены, т. е. выполняется неравенство (2.41) для некоторой постоянной $C > 0$. Используя это, очевидное неравенство $\eta \leq n-2$, и повторяя рассуждения предыдущего этапа, приходим к выводу, что система (2.57) удовлетворяет условиям леммы 2.1.

Следовательно,

$$Z_{s;\nu}(x;\lambda) = \lambda^{-\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} D_x^{\nu-\varepsilon}\mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) + \mathbf{O}\left(\lambda^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}\right). \tag{2.58}$$

Из (2.58) и (2.55) следует, что

$$D_x^{\nu-\varepsilon} Y_s(x;\lambda) = D_x^{\nu-\varepsilon}\mathcal{E}_{j_s}(x;\lambda) + \mathbf{O}\left(|\lambda|^{\frac{\nu-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\right). \tag{2.59}$$

Комбинируя (2.7) и (2.59), имеем

$$D_x^{\nu-\varepsilon} Y_s(x;\lambda) = \mathbf{O}\left(|\lambda|^{\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\right). \tag{2.60}$$

Оценки (2.28) также следуют из (2.7) и (2.59).

Из формулы (2.60) с очевидностью вытекает

$$m_\xi(Y_s(x;\lambda)) = \mathbf{O}\left(|\lambda|^{\frac{n-2-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\right). \tag{2.61}$$

Доказательство оценок (2.27) (основанное на (2.61) и (2.54)) аналогично доказательству на предыдущем шаге.

iv) Покажем, что система $\{Y_j(x,\lambda)\}_1^n$ образует фундаментальную систему решений уравнения (2.26).

Пусть $\widetilde{K}_s(x,\xi;\lambda)$ — ядро вида (2.31) или (2.52). Тогда для каждого $s \in \{1,\dots,n\}$ оно допускает представление

$$\tilde{K}_s(x,\xi;\lambda) = \sum_{r=1}^{s-1} \varphi_{sr}(\xi;\lambda)\mathcal{E}_{j_r}(x;\lambda),$$

где

$$\varphi_{sr}(\xi;\lambda) = \begin{cases} -\alpha^{-1}\lambda^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}}\omega_{j_r}\exp(\omega_{j_r}\xi\lambda^{\frac{1}{\alpha}}), & r \le q,\\ 0, & r > q. \end{cases}$$

Значит, для каждого $s \in \{1,\dots,n\}$ уравнение (2.33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} Y_s(x;\lambda) &= \mathcal{E}_s(x;\lambda) + \int_0^1 \left(\sum_{r=1}^{s-1} \varphi_{sr}(\xi;\lambda)\mathcal{E}_{j_r}(x;\lambda) + K(x,\xi;\lambda)\right) m_\xi(Y_s)\,d\xi \\ &= \mathcal{E}_s(x;\lambda) + \sum_{r=1}^{s-1} C_{sr}(\lambda)\mathcal{E}_{j_r}(x;\lambda) + \int_0^1 K(x,\xi;\lambda) m_\xi(Y_s)\,d\xi, \end{aligned} \tag{2.62}$$

где

$$C_{sr}(\lambda) = \int_0^1 \Phi_{sr}(\xi;\lambda) m_\xi(Y_s)\,d\xi.$$

Вместе с равенствами (2.62) рассмотрим матричные уравнения

$$\tilde{Y}_s(x;\lambda) = \mathcal{E}_s(x;\lambda) + \int_0^1 K_s(x,\xi;\lambda) m_\xi(\tilde{Y}_s)\,d\xi, \qquad s \in \{1,2,\dots,n\}. \tag{2.63}$$

Согласно лемме 2.1, функции $\{\mathcal{E}_s(x,\lambda)\}_1^n$ образуют фундаментальную систему решений простейшего уравнения (2.1) и, следовательно, линейно независимы. Из (2.63) следует, что функции $\widetilde{Y}_s(x,\lambda)$ также линейно независимы. Таким образом, система $\{\widetilde{Y}_s(x,\lambda)\}_1^n$ – фундаментальная система решений уравнения (2.26).

Из (2.62) и (2.63) следует, что функция $V_s(x;\lambda) := \widetilde{Y}_s(x;\lambda) + \sum_{r=1}^{s-1} C_{sr}(\lambda)\widetilde{Y}_r(x;\lambda)$ удовлетворяет уравнению (2.62). Поскольку уравнение (2.62) имеет единственное решение при любом выбранном наборе $\{C_{sr}(\lambda)\}_{r=1}^{s-1}$, то $Y_s = V_s$ при каждом $s \in \{1,\ldots,n\}$, т. е.

$$Y_s(x;\lambda) = \widetilde{Y}_s(x;\lambda) + \sum_{r=1}^{s-1} C_{sr}(\lambda)\widetilde{Y}_r(x;\lambda), \qquad s \in \{1,\ldots,n\}. \tag{2.64}$$

Систему (2.64) можно представить в блочно-матричном виде

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ C_{21} & I_p & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{n,n-1} & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_1 \\ \widetilde{Y}_2 \\ \ldots \\ \widetilde{Y}_n \end{pmatrix}$$

с невырожденной блочной нижнетреугольной матрицей $T := (C_{kj})_{k,j=1}^n$ (где $C_{kj} = \mathbf{0_p}$ при $j > k$).

Следовательно, $\{Y_j(x;\lambda)\}_1^n$ — фундаментальная система решений уравнения (2.26) в $S_\beta(R_0)$, поскольку таковой является $\{\widetilde{Y}_j(x;\lambda)\}_1^n$. Это завершает доказательство теоремы. □

3. Полнота корневых подпространств

В пространстве $L_2([0,1],\mathbb{C}^p)$ рассмотрим уравнение

$$l_\alpha(D)y := D_x^{n-\varepsilon}y + \sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(x)D_x^{n-k-\varepsilon}y = \lambda y \tag{3.1}$$

с распадающимися нормированными граничными условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} A_{jk}y^{(k-\varepsilon)}(0) = I_p y^{(k_j-\varepsilon)}(0) + \sum_{k=0}^{k_j-1} A_{jk}y^{(k-\varepsilon)}(0) = \overrightarrow{0}, \qquad j \in \{1,\ldots,l\}, \tag{3.2}$$

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{jk}y^{(k-\varepsilon)}(1) = I_p y^{(k_j-\varepsilon)}(1) + \sum_{k=0}^{k_j-1} B_{jk}y^{(k-\varepsilon)}(1) = \overrightarrow{0}, \qquad j \in \{l+1,\ldots,n\}. \tag{3.3}$$

Здесь $\overrightarrow{0}$ — нулевой вектор-столбец высоты p, $y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_p)$, $n - 1 \geqslant k_1 > k_2 > \cdots > k_l \geqslant 0$, $n-1 \geqslant k_{l+1} > k_{l+2} > \cdots > k_n \geqslant 0$, $P_k(x)$ — $(p \times p)$ матрицы-функции, A_{jk} и $B_{jk} \in \mathbb{C}^{p\times p}$, $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Обозначим через L оператор, порожденный дифференциальным выражением $l_\alpha(D)$ и граничными условиями (3.2)–(3.3).

Определение 3.1. *Пусть λ_0— собственное значение оператора L и Z_0— соответствующий собственный вектор (т.е. $(L - \lambda_0)Z_0 = 0$). Говорят, что система функций $\{Z_j(x, \lambda)\}_{j=1}^{k}$ образует цепочку собственной $Z_0(x, \lambda)$ и присоединенных функций, соответствующих собственному значению λ_0, если*

$$a)\quad \left[\sum_{j=0}^{r} \frac{1}{j!} D_\lambda^j l(D)(Z_{r-j}(x, \lambda))\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0} = 0, \qquad r \in \{1, \ldots, k\},$$

b) каждая функция $Z_j(x, \lambda)$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, удовлетворяет граничным условиям (3.2)–(3.3).

Наряду с (3.1) рассмотрим уравнение

$$D_x^{n-\varepsilon} Y + \sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(x) D_x^{n-k-\varepsilon} Y = \lambda Y \tag{3.4}$$

относительно неизвестной матрицы-функции $Y(x)$. При этом матрицы-функции $P_{n-k}(x)$ предполагаются такими же, как и выше. Если $Y_1, \ldots, Y_n$ — фундаментальная система решений уравнения (3.4), то всякое решение уравнения (3.1) имеет вид

$$y = Y_1 c_1 + \cdots + Y_n c_n,$$

где c_j — произвольные постоянные векторы из $\mathbb{C}^p$, $j \in \{1, \ldots n\}$.

Определение 3.2. *Корневым подпространством оператора L, соответствующим собственному значению λ_0, называется совокупность собственных и присоединенных функций оператора L, соответствующих собственному значению λ_0.*

Лемма 3.1. *Пусть $\{\Phi_j(x, \lambda)\}_1^n$ — фундаментальная система $p \times p$-матричных решений уравнения (3.4), удовлетворяющая начальным условиям*

$$D_x^{\nu-1-\varepsilon} \Phi_j(0, \lambda) = \delta_{\nu j} I_p, \qquad j, \nu \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3.5}$$

В этом случае множество собственных значений $\sigma(L)$ оператора L совпадает с множеством $\{\lambda_m\}_1^\infty$ нулей целой функции

$$\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda;\Phi)$$
$$= \det\begin{pmatrix} U_1(\Phi_1(x,\lambda)) & U_1(\Phi_2(x,\lambda)) & \dots & U_1(\Phi_n(x,\lambda)) \\ U_2(\Phi_1(x,\lambda)) & U_2(\Phi_2(x,\lambda)) & \dots & U_2(\Phi_n(x,\lambda)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(\Phi_1(x,\lambda)) & U_n(\Phi_2(x,\lambda)) & \dots & U_n(\Phi_n(x,\lambda)) \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Кроме того, размерность корневого подпространства, соответствующего $\lambda_0 \in \sigma(L)$, равна кратности корня λ_0 как нуля целой функции $\Delta(\lambda)$.

Эта лемма доказывается так же, как для дифференциальных уравнений целого порядка. Как и в случае $\alpha = n \in \mathbb{N}$, целую функцию $\Delta(\lambda)$ вида (3.4) будем называть характеристическим определителем задачи (3.1)–(3.3).

Лемма 3.2. *Пусть $\sigma(L) = \{\lambda_m\}_1^\infty$ — множество нулей целой функции $\Delta(\lambda)$ и пусть ν_m — кратность нуля λ_m. Обозначим через $\Delta_j(x,\lambda;\Phi)$, $j \in \{1,\dots,pn\}$, определитель, полученный заменой j-ой строки характеристического определителя $\Delta(\lambda;\Phi)$ столбцами матриц Φ_k, $k \in \{1,\dots,n\}$. Тогда для каждого $j \in \{1,\dots,pn\}$ система функций*

$$\Delta_j(x,\lambda_m;\Phi),\ D_\lambda \Delta_j(x,\lambda;\Phi)|_{\lambda=\lambda_m}, \dots, \frac{1}{(\nu_m-1)!} D_\lambda^{\nu_m-1}\Delta_j(x,\lambda;\Phi)|_{\lambda=\lambda_m}$$

образует ССПФ, соответствующую $\lambda_m \in \sigma(L)$.

Лемма 3.3. *Пусть $\alpha := n-\varepsilon$, Ω_0 — матрица, определенная* (2.12). *Пусть S — один из секторов* (2.5) *и ω_j упорядочены как и в* (2.6)

Тогда определители

$$\Delta_\omega(\varepsilon) = \det\begin{pmatrix} \omega_{m_1}^{\varkappa_{p+1}} I_p & \omega_{m_2}^{\varkappa_{p+1}} I_p & \dots & \omega_{m_{n-p}}^{\varkappa_{p+1}} I_p \\ \omega_{m_1}^{\varkappa_{p+2}} I_p & \omega_{m_2}^{\varkappa_{p+2}} I_p & \dots & \omega_{m_{n-p}}^{\varkappa_{p+2}} I_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m_1}^{\varkappa_n} I_p & \omega_{m_2}^{\varkappa_n} I_p & \dots & \omega_{m_{n-p}}^{\varkappa_n} I_p \end{pmatrix},$$
$$\Delta_a(\varepsilon) = \det\begin{pmatrix} a_{n-p+1,\varkappa_1} I_p & a_{n-p+2,\varkappa_1} I_p & \dots & a_{n,\varkappa_1} I_p \\ a_{n-p+1,\varkappa_2} I_p & a_{n-p+2,\varkappa_2} I_p & \dots & a_{n,\varkappa_2} I_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-p+1,\varkappa_p} I_p & a_{n-p+2,\varkappa_p} I_p & \dots & a_{n,\varkappa_p} I_p \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

отличны от нуля при $\varepsilon \in [0,1)$.

Доказательства лемм 3.2 и 3.3 аналогичны доказательствам в [16].

Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 3.1. *Пусть $P_j(x)$, $j \in \{2, \dots, n\}$ — аналитические матрицы-функции, $x \in \mathbb{R}$, и $2l \geq n$. Тогда система собственных и присоединенных функций граничной задачи* (3.1), (3.2), (3.3) *полна в пространстве $L_1([0,1], \mathbb{C}^p)$.*

Доказательство. i) На этом шаге установим связь между характеристическими определителями, построенными по фундаментальным системам $\{\Phi_j(x,\lambda)\}_1^n$ и $\{Y_k(x,\lambda)\}_1^n$, определенным соответственно в лемме 3.1 и теореме 2.1.

По теореме 2.1 функции $\{Y_k(x,\lambda)\}_1^n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.1) в секторе $S_\beta(R_0) := \{\lambda \in S_\beta : |\lambda| > R_0\}$. Следовательно, при $\lambda \in S_\beta(R_0)$ система $\Phi_k(x,\lambda)$ допускает представление

$$\Phi_k(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} Y_j(x,\lambda) C_{kj}(\lambda), \qquad \lambda \in S_\beta(R_0), \quad k \in \{1, \dots, n\}, \tag{3.8}$$

где $C_{kj}(\lambda)$ — $(p \times p)$-матрицы.

Следуя [8], введем обозначение $[A] = A + \mathbf{O}\left(\lambda^{-1/\alpha}\right)$. Комбинируя соотношения (2.4), (2.28) и (3.4), получаем

$$D_x^{\nu-\varepsilon} Y_k(0,\lambda) = \left[D_x^{\nu-\varepsilon} \mathcal{E}_k(0,\lambda)\right], \tag{3.9}$$

$$D_x^{\nu-\varepsilon} \Phi_k(0,\lambda) = D_x^{\nu-\varepsilon} Z_{n-k+1}(0,\lambda), \tag{3.10}$$

$k, \nu+1 \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим через

$$C(\lambda) := \begin{pmatrix} C_{11}(\lambda) & C_{12}(\lambda) & \dots & C_{1n}(\lambda) \\ C_{21}(\lambda) & C_{22}(\lambda) & \dots & C_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1}(\lambda) & C_{n2}(\lambda) & \dots & C_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

блочную $(pn \times pn)$-матрицу из коэффициентов системы (3.7). Из (2.11) и (2.4) следует, что

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) & \mathcal{E}_1^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) & \dots & \mathcal{E}_1^{(n-1-\varepsilon)}(0,\lambda) \\ \mathcal{E}_2^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) & \mathcal{E}_2^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) & \dots & \mathcal{E}_2^{(n-1-\varepsilon)}(0,\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{E}_n^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) & \mathcal{E}_n^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) & \dots & \mathcal{E}_n^{(n-1-\varepsilon)}(0,\lambda) \end{pmatrix}$$
$$= (n-\varepsilon)\Omega_0^{-1} \mathrm{diag}\left(\lambda^{\frac{-\varepsilon}{n-\varepsilon}} I_p, \lambda^{\frac{1-\varepsilon}{n-\varepsilon}} I_p, \dots, \lambda^{\frac{n-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}} I_p\right). \tag{3.12}$$

Из (3.12) следует равенство

$$\mathcal{E}_k^{(\nu-\varepsilon)}(0,\lambda) = D_x^{\nu-\varepsilon} \mathcal{E}_k(0,\lambda) = (n-\varepsilon) a_{k,\nu+1} \lambda^{\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}} I_p. \tag{3.13}$$

Комбинируя (3.8) и (3.13), получаем

$$D_x^{j-1-\varepsilon}Y_k(0,\lambda)=[D_x^{\nu-\varepsilon}\mathcal{E}_k(0,\lambda)]=(n-\varepsilon)[a_{kj}]I_p\lambda^{\frac{j-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}},\\ k,j\in\{1,\dots,n\}. \quad (3.14)$$

Найдем матрицы $C_{kj}(\lambda)$. Из системы (2.10) имеем

$$Z_{n-k+1}(x,\lambda)=\frac{1}{n-\varepsilon}\sum_{j=n_1}^{n_2}\omega_j^{n-k+1}\lambda^{-\frac{k-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\mathcal{E}_{j+m+1}(x,\lambda)\\ =\frac{1}{n-\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}\omega_{-m+j-1}^{n-k+1}\lambda^{-\frac{k-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\mathcal{E}_j(x,\lambda).$$

С учетом равенства (3.13)

$$D_x^{\nu-\varepsilon}Z_{n-k+1}(0,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\omega_{-m+j-1}^{n-k+1}a_{k,\nu+1}\lambda^{\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\lambda^{-\frac{k-1-\varepsilon}{n-\varepsilon}}I_p. \quad (3.15)$$

Из (3.7) получаем

$$D_x^{\nu-\varepsilon}\Phi_k(0,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}D_x^{\nu-\varepsilon}Y_j(0,\lambda)C_{kj}(\lambda)\\ =[\text{см. } (3.8)]=\sum_{j=1}^{n}[D_x^{\nu-\varepsilon}Y_j(0,\lambda)]C_{kj}=\\ =[\text{см. } (3.13)]=\sum_{j=1}^{n}(n-\varepsilon)\lambda^{\frac{\nu-\varepsilon}{n-\varepsilon}}[a_{k,\nu+1}]I_pC_{kj}(\lambda). \quad (3.16)$$

Из условия (3.10) и равенств (3.15) и (3.16) получаем

$$C_{kj}(\lambda)=\frac{1}{n-\varepsilon}\lambda^{\frac{-k+1+\varepsilon}{n-\varepsilon}}\left[\omega_{j-m-1}^{n+1-k}\right]I_p. \quad (3.17)$$

Обозначим

$$A(\lambda;\Phi):=\begin{pmatrix}U_1(\Phi_1) & \dots & U_1(\Phi_n)\\ U_2(\Phi_1) & \dots & U_2(\Phi_n)\\ \dots & \dots & \dots\\ U_n(\Phi_1) & \dots & U_n(\Phi_n)\end{pmatrix},\\ A(\lambda;Y):=\begin{pmatrix}U_1(Y_1) & \dots & U_1(Y_n)\\ U_2(Y_1) & \dots & U_2(Y_n)\\ \dots & \dots & \dots\\ U_n(Y_1) & \dots & U_n(Y_n)\end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Из (3.7) и (3.18) вытекает равенство

$$A(\lambda;\varphi)=A(\lambda;Y)C^{\top}(\lambda), \tag{3.19}$$

откуда получаем

$$\Delta(\lambda;\Phi)=\Delta(\lambda;Y)\det C(\lambda).$$

С учетом (3.17)

$$\Delta(\lambda):=\Delta(\lambda;\Phi)=[M]\lambda^{\frac{p(n+2n\varepsilon-n^2)}{2(n-\varepsilon)}}\Delta(\lambda;Y),\quad M\neq 0. \tag{3.20}$$

ii) На этом шаге с помощью равенства (3.20) мы получим оценку на характеристический определитель $\Delta(\lambda)$.

Пусть $\Lambda=\{\lambda\in S_\beta^+:\lambda=\lambda_0 t,\ t\in\mathbb{R}_+,\ \arg\lambda_0>0\}$ — луч в секторе S_β^+. Занумеруем числа $\{\omega_j\}_{-m}^{n-m-1}$, так чтобы

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\omega_{m_1})>\dots>\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\omega_{m_q})>0\\&\qquad>\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\omega_{m_{s+1}})>\dots>\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\omega_{m_n)}\qquad \text{при } \lambda\in\Lambda.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Заметим, что $q=2[\alpha/4]+1$. Предположим еще, что луч $\Lambda(\subset S_\beta^+)$ выбран таким образом, чтобы

$$\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\omega_{m_i})\neq\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\omega_{m_j})\neq 0\qquad \text{при } i\neq j. \tag{3.22}$$

Из предположений (3.8) и (3.21) следует

$$\begin{aligned}U_j(Y_k)&=Y_k^{(k_j-\varepsilon)}(0)+\sum_{r=0}^{k_j-1}A_{jr}Y_k^{(r-\varepsilon)}(0)=\left[D_x^{k_j-\varepsilon}\mathcal{E}_k(0,\lambda)\right]\\&=[\text{см. } (3.13)]=(n-\varepsilon)\left[a_{k,k_j+1}\right]\lambda^{\frac{k_j-\varepsilon}{n-\varepsilon}}I_p,\quad j\in\{1,\dots,l\}.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}U_j(Y_k)&=Y_k^{(k_j-\varepsilon)}(1)+\sum_{r=0}^{k_j-1}B_{jr}Y_k^{(r-\varepsilon)}(1)\\&=[\text{см. } (2.27)]=\left[D_x^{k_j-\varepsilon}\mathcal{E}_k(1,\lambda)\right]=\left[\omega_{-m+k-1}^{k_j-n}\right]\lambda^{\frac{k_j-\varepsilon}{n-\varepsilon}}e^{\omega_{-m+k-1}\lambda^{\frac{1}{n-\varepsilon}}},\\&\qquad j\in\{l+1,\dots,n\},\end{aligned} \tag{3.24}$$

если $k-m-1\in\{m_1,m_2,\dots,m_q\}$, т.е. $\operatorname{Re}\omega_{k-m-1}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}>0$. Для других значений k (то есть при $\operatorname{Re}\lambda^{1/\alpha}\omega_{k-m-1}<0$) имеем

$$U_j(Y_k)=\mathbf{O}(1),\qquad j\in\{l+1,\dots,n\}. \tag{3.25}$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta(\lambda;Y):=\det\begin{pmatrix}U_1(Y_1(x,\lambda)) & U_1(Y_2(x,\lambda)) & \dots & U_1(Y_n(x,\lambda))\\ U_2(Y_1(x,\lambda)) & U_2(Y_2(x,\lambda)) & \dots & U_2(Y_n(x,\lambda))\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ U_n(Y_1(x,\lambda)) & U_n(Y_2(x,\lambda)) & \dots & U_n(Y_n(x,\lambda))\end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

По предположению теоремы $l \geq n/2 \geq q$, поэтому последние $n-l$ ($\leq q$) строк и первые q столбцов этого определителя состоят из экспоненциально растущих по λ функций. Подставляем соотношения (3.23), (3.24) и (3.25) в $\Delta(\lambda;Y)$, из каждой строки определителя выносим λ в соответствующей степени и раскладывая полученный определитель по последним $n-l$ строкам, получаем

$$\Delta(\lambda;Y)=[1]\lambda^{\tilde{k}}\exp\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\tilde{\omega}\right)\cdot\Delta_\omega\cdot\Delta_a,\qquad \lambda\in\Lambda, \tag{3.27}$$

где Δ_ω и Δ_a определены равенствами (3.7) при $p=l$, $\tilde{k}:=p(n-\varepsilon)^{-1}(k_1+\dots+k_n-n\varepsilon)$ и $\tilde{\omega}:=p(\omega_{m_1}+\dots+\omega_{m_{n-l}})$.

Согласно лемме 3.3, $\Delta_\omega\Delta_a\neq 0$. Комбинируя (3.20) и (3.27), получаем следующую оценку для характеристического определителя:

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda)=\Delta(\lambda;\Phi)&=\Delta(\lambda;Y)\det C(\lambda)\\ &=[1][M]\lambda^{\tilde{k}}\exp\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\tilde{\omega}\right)\Delta_\omega\cdot\Delta_a\lambda^{\frac{p(n+2n\varepsilon-n^2)}{2(n-\varepsilon)}}\\ &=[M_1]\lambda^{\varkappa}\exp\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\tilde{\omega}\right),\qquad \lambda\in\Lambda,\end{aligned} \tag{3.28}$$

где $\varkappa=2^{-1}p\alpha^{-1}(2(\varkappa_1\dots+\varkappa_n)-n(n-1))$ и $M_1:=M\Delta_\omega\Delta_a\neq 0$.

iii) Обозначим через $A_j(x,\lambda;Y)$ матрицу, полученную заменой j-ой строки блочной матрицы $A(\lambda;Y)$ столбцами матриц Y_k, $k\in\{1,\dots,n\}$, $j\in\{pl+1,\dots,pn\}$. Тогда матрицы $A_j(x,\lambda;\Phi)$ и $A_j(x,\lambda;Y)$ связаны тем же соотношением (3.19), что и матрицы $A(\lambda;\Phi)$ и $A(\lambda;Y)$. Отсюда их определители $\Delta_j(x,\lambda;\Phi)$ и $\Delta_j(x,\lambda;Y)$ связаны (подобно (3.20)) равенством

$$\Delta_j(x,\lambda;\Phi)=[M]\lambda^{\frac{p(n+2n\varepsilon-n^2)}{2(n-\varepsilon)}}\Delta_j(x,\lambda;Y),\quad j\in\{pl+1,\dots,pn\},$$

откуда

$$\frac{\Delta_j(x,\lambda;\Phi)}{\Delta(\lambda;\Phi)}=\frac{\Delta_j(x,\lambda;Y)}{\Delta(\lambda;Y)}. \tag{3.29}$$

Асимптотические оценки

$$\Delta_j(x,\lambda;Y)=\lambda^{\tilde{k}-\frac{k_j-\varepsilon}{n-\varepsilon}}e^{\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\tilde{\omega}\right)}e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\omega_{m_{n-l}}(x-1)}\begin{pmatrix} B_1\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\\ \vdots \\ B_p\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\end{pmatrix},\quad j\in\{pl+1,\dots,pn\},$$

($B_1,\dots,B_p$ — константы, не зависящие от λ и x) получаются как и оценка для $\Delta(\lambda;Y)$.

iv) Пусть вектор-функция $g(x)=(g_1(x),\dots,g_p(x))$, $g_k(x)\in L_\infty[0,1]$, $k\in\{1,\dots,p\}$, ортогональна ССПФ задачи (3.1)–(3.3). Рассмотрим целые функции

$$\Upsilon_j(\lambda):=\int\limits_0^1 g(x)\Delta_j(x,\lambda;\Phi)\,dx,\qquad j\in\{pl+1,\dots,pn\}.$$

Покажем, что $\Upsilon_j(\lambda)\equiv 0$, $j\in\{pl+1,\dots,pn\}$. Поскольку $D_\lambda^r\Upsilon_j(\lambda)|_{\lambda=\lambda_m}=0$, $\lambda_m\in\sigma(L)$, $r\in\{0,1,\dots,\nu_m-1\}$, то функция

$$G_j(\lambda):=\frac{\Upsilon_j(\lambda)}{\Delta(\lambda;\Phi)},\qquad j\in\{pl+1,\dots,pn\},$$

является целой. Поэтому чтобы показать, что $\Upsilon_j(\lambda)\equiv 0$ для $j\in\{pl+1,\dots,pn\}$, достаточно доказать, что $G_j(\lambda)\equiv 0$, $j\in\{pl+1,\dots,pn\}$.

С учетом (3.29) имеем

$$\frac{\Delta_j(x,\lambda;\Phi)}{\Delta(\lambda;\Phi)}=[M_2]\lambda^{-\frac{k_j-\varepsilon}{n-\varepsilon}}e^{\lambda\omega_{l+1}(x-1)}\begin{pmatrix} B_1\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\\ \vdots \\ B_p\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\end{pmatrix},\quad j\in\{pl+1,\dots,pn\}. \tag{3.30}$$

Учитывая (3.30) и неравенство $\mathrm{Re}(\lambda\omega_{l+1})>0$, $x\in(0,1)$, получаем

$$\begin{aligned}|G_j(\lambda)|&=\left|\int\limits_0^1 g(x)\overline{\frac{\Delta_j(x,\lambda;\Phi)}{\Delta(\lambda;\Phi)}}\,dx\right|\\ &\leqslant |[M_2]|\cdot|\lambda|^{-\frac{k_j-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\int\limits_0^1\left|e^{\lambda\omega_{l+1}(x-1)}\right|\left|\sum_{k=1}^p g_k(x)\overline{[B_k]}\right|dx\\ &\leqslant [M_3]|\lambda|^{-\frac{k_j-\varepsilon}{n-\varepsilon}}\int\limits_0^1 e^{(x-1)\,\mathrm{Re}(\lambda\omega_{l+1})}\,dx\end{aligned}$$

$$= \frac{[M_3]|\lambda|^{-\frac{k_j-\varepsilon}{n-\varepsilon}}}{\operatorname{Re}(\lambda\omega_{l+1})}\left(1 - e^{-\operatorname{Re}(\lambda\omega_{l+1})}\right).$$

Здесь $M_3 = |[M_2]| \cdot \|g\|_{L_\infty([0,1],\mathbb{C}^p)} \sum_{k=1}^{p} |\overline{[B_k]}|$. Очевидно, что $|G_j(\lambda)| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty,\ \lambda \in S,\ j \in \{pl+1, \dots, pn\}$. Из теоремы Фрагмена–Линделефа и теоремы Лиувилля следует, что $G_j(\lambda) \equiv 0,\ j \in \{pl+1, \dots, pn\}$, откуда

$$\int\limits_0^1 g(x)\overline{\Delta_j(x,\lambda;\Phi)}\,dx \equiv 0, \qquad j \in \{pl+1, \dots, pn\}. \tag{3.31}$$

Пусть $\Phi_1(x,\lambda), \dots, \Phi_n(x,\lambda)$ — фундаментальная система решений матричного уравнения (3.4), удовлетворяющая условиям

$$D_x^{\alpha-k}\Phi_s(0,\lambda) = T_{ks}, \qquad k, s \in \{1, \dots, n\}. \tag{3.32}$$

При этом числовые матрицы T_{ks} выбраны таким образом, что матрицы-функции $\Phi_1(x,\lambda), \dots, \Phi_{n-l}(x,\lambda)$ удовлетворяют всем краевым условиям (3.2), а матрицы-функции $\Phi_{n-l+k}(x,\lambda),\ k \in \{1, \dots, n-l+1\}$, удовлетворяют всем краевым условиям (3.2), кроме краевого условия при $j = k$, причем $U_k(\Phi_{n-l+k}) = D_{n-l+k}$, где D_{n-l+k} — некоторые диагональные матрицы. Тогда $\Delta_j(x,\lambda;\Phi)$ можно представить в виде линейной комбинации столбцов $\Phi_m^s(x,\lambda)$ матриц $\Phi^s(x,\lambda),\ s \in \{1, \dots, n\},\ m \in \{1, \dots, p\},\ j \in \{pl+1, \dots, pn\}$:

$$\Delta_j(x,\lambda;\Phi) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{p} q_{sm}^j(\lambda)\Phi_m^s(x,\lambda) = \sum_{s=1}^{n-l}\sum_{m=1}^{p} q_{sm}^j(\lambda)\Phi_m^s(x,\lambda), \tag{3.33}$$

так как $q_{sm}^j \equiv 0$ при $s > n-l$, что следует из свойств выбранной фундаментальной системы и выполнения для функций $\Delta_j(x,\lambda;\Phi)$ всех краевых условий в нуле, $j \in \{pl+1, \dots, pn\}$. Очевидно, определитель

$$\begin{vmatrix} q_{11}^{pl+1}(\lambda)\cdots q_{1p}^{pl+1}(\lambda) & q_{21}^{pl+1}(\lambda)\cdots q_{2p}^{pl+1}(\lambda)\cdots q_{n-l,1}^{pl+1}(\lambda)\cdots q_{n-l,p}^{pl+1}(\lambda) \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ q_{11}^{pn}(\lambda)\ \cdots\ q_{1p}^{pn}(\lambda) & q_{21}^{pn}(\lambda)\ \cdots\ q_{2p}^{pn}(\lambda)\ \cdots q_{n-l,1}^{pn}(\lambda)\cdots q_{n-l,p}^{pn}(\lambda) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда принимая во внимание (3.31), получаем

$$\int\limits_0^1 g(x)\overline{\Phi_m^j(x,\lambda)}\,dx \equiv 0, \quad j \in \{pl+1, \dots, pn\},\ m \in \{1, \dots, p\}. \tag{3.34}$$

С другой стороны, матричные решения $\Phi_1(x,\lambda),\ldots,\Phi_n(x,\lambda)$ с помощью оператора преобразования (см. [11], а также [6]) допускают представление

$$\Phi_s(x,\lambda) = (I+K)Z_s = Z_s(x,\lambda) + \int\limits_0^x K(x,t)Z_s(t,\lambda)\,dt, \quad s\in\{1,\ldots,n\}, \tag{3.35}$$

где $Z_s(x,\lambda)$ — решения простейшего уравнения вида (3.4) (т.е. $P_k(x)\equiv 0,\ k\in\{0,\ldots,n-1\}$) с теми же начальными условиями (3.32). Имеем

$$\begin{aligned}\overrightarrow{0} &= \int\limits_0^1 \Phi_j(x,\lambda)\overline{g}(x)^\top\,dx \\ &= \int\limits_0^1 \left((I+K)Z_j(x,\lambda)\right)\overline{g}(x)^\top\,dx \\ &= \int\limits_0^1 Z_j(x,\lambda)\overline{h(x)}\,dx,\end{aligned}$$

где

$$h(x) = (I+K^*)g^\top = g^\top(x) + \int\limits_x^1 \overline{K(t,x)}g^\top(t)\,dt.$$

Поскольку система функций $\{Z_s(x,\lambda)\}_{\lambda\in S}$ полна в $L_2([0,1],\ \mathbb{C}^{p\times p})$, то $h(x)=\overrightarrow{0}$. Так как K^* — вольтерров оператор, то $g^\top(x)=\overrightarrow{0}$. Полнота матричной системы функций $\{Z_s(x,\lambda)\}_{\lambda\in S}$ следует из полноты решений задачи Коши для простейшего уравнения в скалярном случае. $\square$

Замечание 3.1. Заметим, что решения $\{Z_j(x,\lambda)\}_1^{n-1}$ задачи Коши (2.3)–(2.4) непрерывны на отрезке $[0,1]$. Из (3.35) следует, что таковыми являются и решения $\{\Phi_j(x,\lambda)\}_1^{n-1}$ задачи Коши (3.1), (3.4). С другой стороны, из равенства (2.5) следует, что $Z_n(x,\lambda)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} Z_n(x,\lambda) &= \frac{x^{-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)}I_p + \widetilde{z}_1(x,\lambda)I_p, \\ \widetilde{z}_1(x,\lambda) &:= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j x^{\alpha(j+1)-n}}{\Gamma(\alpha-n+1+\alpha j)},\end{aligned} \tag{3.36}$$

где $\widetilde{z}_1(x,\lambda) \in C[0,1]$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Комбинируя (4.1) с (3.35), получаем представление для $\Phi_n(x,\lambda)$:

$$\Phi_n(x,\lambda) = \frac{x^{-\varepsilon}}{\Gamma(1-\varepsilon)} I_p + \widetilde{\varphi}_n(x,\lambda) I_p, \tag{3.37}$$

где $\widetilde{\varphi}_n(x,\lambda) \in C[0,1]$ при $\lambda \in \mathbb{C}$. Теперь из (3.37) следует, что собственные функции задачи (3.1)–(3.3) принадлежат пространству $L_p([0,1],\mathbb{C}^p)$ при $p < 1/\varepsilon$. Следовательно, теорема 3.1 верна и для пространств $L_p([0,1],\mathbb{C}^p)$ с $p < 1/\varepsilon$.

Благодарности. В заключение автор выражает благодарность М. М. Маламуду и Л. Л. Оридороге за постановку задачи и ценные замечания в процессе ее выполнения.

Литература

[1] А. В. Агибалова, *О краевых задачах для обыкновенного дифференциального оператора с матричными коэффициентами* // Український математичний вісник, **5** (2008), N 3, 293–304.

[2] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, Москва, 1966, 671 с.

[3] М. В. Келдыш, *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых уравнений* // Доклады АН СССР, **77** (1951), N 1, 11–14.

[4] Л. М. Лужина, *Регулярные спектральные задачи в пространстве вектор-функций* // Вестник Московского ун-та. Сер.I. Математика. Механика, (1988), N 1, 31–35.

[5] Л. М. Лужина, *О регулярности спектральных задач с дополнительными условиями во внутренних точках* // Матем. заметки, **49** (1991), вып. 3, 151–153.

[6] М. М. Маламуд, *Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробного порядка* // Труды Моск. Матем. Общества, **55** (1994), 57–122.

[7] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения.* Киев, "Наукова думка", 1977, 332 с.

[8] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Москва, "Наука", 1969, 526 с.

[9] В. С. Рыхлов, *Полнота собственных функций некоторых классов нерегулярных дифференциальных операторов* // Ученые записки ТНУ. Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика", (2003), N 1, 176–181.

[10] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и их приложения*, Минск, "Наука и техника", 1987, 688 с.

[11] Л. А. Сахнович, *Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами* // Матем. сборник, **46** (1958), 61–76.

[12] Я. Д. Тамаркин, *О некоторых задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Петроград, 1917.

[13] А. П. Хромов, *Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися граничными условиями* // Матем. сборник, **70** (1966), 310–329.

[14] А. А. Шкаликов, *О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями* // Функциональный анализ и его приложения, **10** (1976), N 4, 69–80.

[15] G. D. Birkhoff, *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a papameter* // Trans. Amer. Math. Soc., **9** (1908), 219–231.

[16] M. M. Malamud, L. L. Oridoroga, *Analog of the Birkhoff theorem and the completeness results for fractional order differential equations* // Rus. Jour. of Math. Physics, **8** (2001), N 3, 287–308.

Сведения об авторах

Анна Владимировна Агибалова

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
Донецк 83055,
Украина
E-Mail: `AgAnnette@rambler.ru`