Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 2, 150 – 172

Дослідження задач оптимального керування системами диференціальних рівнянь, лінійних по керуванню, методом усереднення

Тетяна Добродзій

(*Представлена М. О. Перестюком*)

Анотація. Обгрунтовано застосування методу усереднення до задачі оптимального керування системами диференціальних рівнянь, нелінійних по фазовій змінній і лінійних по керуванню. Доведено існування оптимального керування початкової та усередненої задач, а також близькість оптимальних траєкторій і критеріїв якості.

2001 MSC. 34H05, 93C15.

Ключові слова та фрази. Оптимальне керування, метод усереднення, близькість критеріїв якості.

Вступ

Ефективним методом розв'язання задач оптимального керування є метод усереднення. При його використанні початковій неавтономній задачі оптимального керування ставиться у відповідність усереднена автономна задача, що є простішою за вихідну. Даним питанням присвячено низку робіт (див., наприклад, [1, 6, 7]). Досить широко вони висвітлені в монографіях [2, 5]. Проте в [1] основна увага приділялася сталим керуванням, що значно звужує можливості керування системою. В [2] множина керувань усередненою системою будувалася за керуваннями початкової системи, що є нелегкою задачею. Відзначимо також, що в [1] і [2] множина керувань компактна. В [5] встановлено близькість між оптимальною траєкторією вихідної задачі та диференціальним включенням, побудованим спеціальним чином з використанням методу усереднення.

Стаття надійшла в редакцію 28.01.2009

У даній роботі множина керувань U_ε для початкової та усередненої систем співпадає, є опуклою і замкненою множиною, але не обов'язково компактною. При цьому доводиться існування оптимального керування початкової та усередненої задачі та встановлено зв'язок між оптимальним розв'язком початкової задачі та оптимальним розв'язком відповідної усередненої задачі, а також знаходяться умови, при яких оптимальне керування усередненої системи здійснює наближений оптимальний синтез точної системи.

1. Постановка задачі

Розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \varepsilon[A(t,x) + B(t,x)u_\varepsilon] \\ &x(0) = x_0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $t \geq 0$, $T > 0$ — деяка константа, $x \in D$ — фазовий вектор, D — область в $\mathbb{R}^n$, $u_\varepsilon \in U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m$ — вектор керування, U_ε — опукла і замкнена множина, $0 \in U_\varepsilon$ для довільного ε, A — вектор-функція, B — $n \times m$-матриця.

Керування $u_\varepsilon(t)$ вважаються допустимими, якщо

a) $u_\varepsilon(t) \in L_p(0, \frac{T}{\varepsilon})$ для деякого $p > 1$;

b) $u_\varepsilon(t) \in U_\varepsilon$ при $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$;

c) існує $\varepsilon_0 > 0$, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок задачі Коші (1.1) $x_\varepsilon(t, u_\varepsilon)$ визначений і єдиний на $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ та лежить в області D.

Множину таких керувань $u_\varepsilon(t)$ позначимо Ω_ε.

Потрібно знайти такі допустимі керування $u_\varepsilon(t)$, що забезпечують мінімальне значення функціоналу

$$J_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} [C(t,x) + F(t,u)]\,dt,$$

де $F(t,u)$ — опукла по u для довільного фіксованого t, неперервна за сукупністю змінних і така, що існує $a > 0$ та $\alpha \in \mathbb{R}$, що $F(t,u) \geq a|u|^p + \alpha$ та для деякого $K > 0$, $\varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} F(t,0)\,dt \leq K$ для довільного $\varepsilon > 0$.

Будемо вважати, що виконуються наступні умови:

1) Існують такі $A_0(x)$ і $B_0(x)$, що рівномірно по $x \in D$ справедливі наступні граничні співвідношення:

$$\lim_{T\to\infty} |\frac{1}{T}\int\limits_0^T A(t,x)\,dt - A_0(x)| = 0,$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T \|B(t,x) - B_0(x)\|^q\,dt = 0,$$

де q визначається з умови $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

2) $A(t,x)$, $B(t,x)$ — визначені, вимірні по t при кожному x, неперервні по x при майже всіх t, а $C(t,x)$ — визначена і неперервна при $t \geq 0$, $x \in D$;

3) $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ — обмежені сталою M при $t \geq 0$, $x \in D$;

4) $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$ —ліпшіцеві по x зі сталою L в області D.

Поставимо у відповідність задачі (1.1) на $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ наступну усереднену задачу:

$$\begin{aligned} &\dot{y} = \varepsilon[A_0(y) + B_0(y)\bar{u}_\varepsilon] \\ &y(0) = x_0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

де $\bar{u}_\varepsilon \in U_\varepsilon$, допустимі керування для усередненої системи задовольняють ті ж умови, що і допустимі керування задачі (1.1), причому умова c) виконується для розв'язку $y_\varepsilon(t, u_\varepsilon)$ усередненої задачі Коші (1.2). Множину таких керувань позначимо $\overline{\Omega}_\varepsilon$. Функціонал керування усередненої задачі має вигляд:

$$\bar{J}_\varepsilon(\bar{u}) = \varepsilon \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} [C(t,y) + F(t,\bar{u})]\,dt.$$

Позначимо $J_\varepsilon^* = \inf_{u_\varepsilon(t)\in\Omega_\varepsilon} J_\varepsilon(u)$, $\bar{J}_\varepsilon^* = \inf_{\bar{u}_\varepsilon(t)\in\overline{\Omega}_\varepsilon} \bar{J}_\varepsilon(\bar{u})$.

У роботі доводиться, що при певних умовах точна та усереднена задачі мають розв'язки при $\varepsilon < \varepsilon_0$ для деякого $\varepsilon_0 > 0$, і для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\eta)$, що при $\varepsilon < \varepsilon_1$:

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\bar{u}^*)| \le \eta,$$

$\bar{u}^*$ — оптимальне керування усередненою системою.

Зауваження 1.1. Якщо існує таке $C_0(x)$, що рівномірно по $x \in D$ виконується співвідношення

$$\lim_{T\to\infty}\left|\frac{1}{T}\int\limits_0^T C(t,x)\,dt - C_0(x)\right| = 0,$$

то функціоналом в усередненій задачі можемо взяти

$$\bar{J}_\varepsilon(\bar{u}) = \varepsilon\int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}}[C_0(y) + F(t,\bar{u})]\,dt. \qquad (*)$$

У подальшому будемо вважати, що для усередненої системи виконується наступна умова:

(A) Якщо керування $\bar{u}_\varepsilon \in \overline{\Omega}_\varepsilon$ задовольняють оцінку

$$\varepsilon\int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}}|\bar{u}_\varepsilon(t)|^p\,dt \le C,$$

де $C > 0$ та не залежить від ε та $\bar{u}_\varepsilon$, то існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(C)$, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок усередненої задачі $y_\varepsilon(t,\bar{u}_\varepsilon)$ лежить при $t \in [0,\frac{T}{\varepsilon}]$ в області D разом з деяким ρ-околом, причому ρ не залежить від ε і від $\bar{u}_\varepsilon$.

2. Допоміжні твердження

Для доведення вище анонсованих результатів нам будуть потрібні наступні леми. Перша з них — це певне узагальнення принципу усереднення.

Лема 2.1. *При виконанні умов* 1)–4) *та умови* (A) *для довільного* $\eta > 0$ *існує* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(C,\eta)$, *що при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *розв'язок точної системи* $x_\varepsilon(t,u_\varepsilon)$ *визначений на* $[0,\frac{T}{\varepsilon}]$, *і справедлива оцінка*

$$|x_\varepsilon(t,u_\varepsilon) - y_\varepsilon(t,u_\varepsilon)| \le \eta, \qquad t \in \left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$$

для кожного допустимого керування, що задавольняє умову (A).

Доведення. Візьмемо довільне $0 < \eta < \frac{\rho}{2}$ та зафіксуємо його. Переходячи в (1.1) та (1.2) до інтегральних представлень, маємо для довільного $t \geq 0$ до виходу розв'язку $x(t) = x_\varepsilon(t, u_\varepsilon)$ на границю області D

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t [A(s, x(s)) + B(s, x(s))u_\varepsilon]\, ds$$

та для $y(t) = y_\varepsilon(t, u_\varepsilon)$:

$$y(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t [A_0(y(s)) + B_0(y(s))u_\varepsilon]\, ds.$$

Тоді

$$\begin{aligned} x(t) - y(t) = \varepsilon \Bigg(\int\limits_0^t [A(s, x(s)) + B(s, x(s))u_\varepsilon(s)]\, ds \\ - \int\limits_0^t [A_0(y(s)) + B_0(y(s))u_\varepsilon(s)]\, ds \Bigg) \\ = \varepsilon \int\limits_0^t [A(s, x(s)) - A(s, y(s))]\, ds \\ + \varepsilon \int\limits_0^t [A(s, y(s)) - A_0(y(s))]\, ds \\ + \varepsilon \int\limits_0^t [B(s, x(s)) - B(s, y(s))]u_\varepsilon(s)\, ds \\ + \varepsilon \int\limits_0^t [B(s, y(s)) - B_0(y(s))]u_\varepsilon(s)\, ds. \end{aligned}$$

Використовуючи умову 4), маємо:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| \leq \varepsilon L \int\limits_0^t |x(s) - y(s)|\, ds \\ + \varepsilon \left| \int\limits_0^t [A(s, y(s)) - A_0(y(s))]\, ds \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\varepsilon L\int_0^t |x(s)-y(s)|\,|u_\varepsilon(s)|\,ds\\
&+\varepsilon\left|\int_0^t [B(s,y(s))-B_0(y(s))]u_\varepsilon(s)\,ds\right|\\
&\le \varepsilon L\int_0^t (1+|u_\varepsilon(s)|)|x(s)-y(s)|\,ds\\
&+\varepsilon\left|\int_0^t [A(s,y(s))-A_0(y(s))]\,ds\right|\\
&+\left(\varepsilon\int_0^t |B(s,y(s))-B_0(y(s))|^q\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\varepsilon\int_0^t |u_\varepsilon(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

З умови (A) отримуємо

$$
\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| \le \varepsilon L\int_0^t (1+|u_\varepsilon(s)|)|x(s)-y(s)|\,ds&\\
+\varepsilon\left|\int_0^t [A(s,y(s))-A_0(y(s))]\,ds\right|&\\
+C^{\frac{1}{p}}\left(\varepsilon\int_0^t \|B(s,y(s))-B_0(y(s))\|^q\,ds\right)^{\frac{1}{q}}&.
\end{aligned}
$$

Оцінимо окремо два останні інтеграли

$$
I_1=\left|\int_0^t [A(s,y(s))-A_0(y(s))]\,ds\right| \tag{2.1}
$$

та

$$
I_2=\varepsilon\int_0^t \|B(s,y(s))-B_0(y(s))\|^q\,ds. \tag{2.2}
$$

Розіб'ємо $[0,\frac{T}{\varepsilon}]$ на n рівних частин. Для довільного $t\in[t_i,t_{i+1}]$:

$$
\begin{aligned}
I_1 = \left| \int_0^t [A(s,y(s)) - A_0(y(s))]\,ds \right| \\
\le \varepsilon \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [A(s,y(s)) - A_0(y(s))]\,ds \right| \\
\le \varepsilon \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [A(s,y(s)) - A(s,y(t_i)) + A(s,y(t_i)) \right. \\
\left. - A_0(y(t_i)) + A_0(y(t_i)) - A_0(y(s))]\,ds \right| \\
\le \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (|A(s,y(s)) - A(s,y(t_i))| + |A_0(y(t_i)) - A_0(y(s))|)\,ds \\
+ \varepsilon \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [A(s,y(t_i)) - A_0(y(t_i))]\,ds \right| \\
\le 2L\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |y(s) - y(t_i)|\,ds + \varepsilon \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [A(s,y(t_i)) - A_0(y(t_i))]\,ds \right|.
\end{aligned}
$$

Оцінимо

$$
\begin{aligned}
|y(s) - y(t_i)| = \varepsilon \left| \int_{t_i}^{s} [A_0(y(\tau)) + B_0(y(\tau)) u_\varepsilon(\tau)]\,d\tau \right| \\
\le \varepsilon \int_{t_i}^{s} (|A_0(y(\tau))| + \|B_0(y(\tau))\| |u_\varepsilon(\tau)|)\,d\tau \\
\le \varepsilon M \int_{t_i}^{t_{i+1}} (1 + |u_\varepsilon(\tau)|) d\tau \le \frac{MT}{n} + M\varepsilon \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} |u_\varepsilon(s)|^p\,ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{T}{\varepsilon n} \right)^{\frac{1}{q}} \\
\le \frac{MT}{n} + M \left(\frac{T}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} |u_\varepsilon(s)|^p\,ds \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Використовуючи умову (A), маємо:

$$|y(s) - y(t_i)| \le \frac{MT}{n} + M\Big(\frac{T}{n}\Big)^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3}$$

Отже,

$$\begin{aligned} I_{11} = 2L\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} |y(s) - y(t_i)|\, ds \\ &\le 2L\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\frac{MT}{n} + M\Big(\frac{T}{n}\Big)^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{p}}\Big)\Big(\frac{T}{n\varepsilon}\Big) \\ &\le 2LMT\Big(\frac{T}{n} + \Big(\frac{T}{n}\Big)^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{p}}\Big). \end{aligned}$$

Зафіксуємо n так, щоб виконувалась нерівність

$$2LMT\Big(\frac{T}{n} + \Big(\frac{T}{n}\Big)^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{p}}\Big) \le \frac{\eta}{4},$$

і позначимо його n'.

Оцінимо

$$I_{12} = \varepsilon \Bigg| \sum_{=0}^{n-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} [A(s, y(t_i)) - A_0(y(t_i))]\, ds \Bigg|. \tag{2.4}$$

В силу умови 1) можна побудувати таку монотонно спадну функцію $\varphi(t) \to 0$, $t \to \infty$, що рівномірно по $y \in D$ справедлива нерівність

$$\Bigg| \int\limits_0^t [A(s, y) - A_0(y)]\, ds \Bigg| \le t\varphi(t).$$

Якщо $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ((крім $t \in [0, t_1]$, $t_1 < t_2$), то маємо

$$\begin{aligned} I_{12} \le \varepsilon \Bigg| \sum_{i=0}^{n-1} \Bigg(\int\limits_0^{t_{i+1}} [A(s, y(t_i)) - A_0(y(t_i))]\, ds \\ &- \int\limits_0^{t_i} [A(s, y(t_i)) - A_0(y(t_i))]\, ds \Bigg) \Bigg| \\ &\le \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Bigg| \int\limits_0^{t_{i+1}} [A(s, y(t_i)) - A_0(y(t_i))]\, ds \Bigg| \end{aligned}$$

$$+\left|\int\limits_0^{t_i}[A(s,y(t_i))-A_0(y(t_i))]\,ds\right|$$

$$\le \varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}\varphi(t_{i+1})+t_i\varphi(t_i))\le 2\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}\frac{T}{\varepsilon}\varphi\Big(\frac{T}{n\varepsilon}\Big)$$

$$\le 2nT\varphi\Big(\frac{T}{n\varepsilon}\Big).$$

Оскільки n — фіксоване, то при $\varepsilon<\varepsilon_0$ отримуємо:

$$\varepsilon\left|\int\limits_0^{t}[A(s,y(t_i))-A_0(y(t_i))]\,ds\right|\le\frac{\eta}{8}.$$

Якщо $t\in[0,t_1]$, то

$$\varepsilon\left|\int\limits_0^{t}[A(s,y(t_i))-A_0(y(t_i))]\,ds\right|$$

$$\le\varepsilon\int\limits_0^{t}(|A(s,y(t_i))|+|A_0(y(t_i))|)\,ds\le 2M\varepsilon\frac{T}{\varepsilon n}=\frac{2MT}{n}.$$

У цьому випадку зафіксуємо n так, щоб $\frac{2MT}{n}\le\frac{\eta}{8}$ і позначимо його n''. Візьмемо тепер $n=\max\{n',n''\}$. При фіксованому n, $\varphi(\frac{T}{n\varepsilon})\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, тобто для довільного $\eta>0$ існує $\varepsilon_0>0$, що для довільного $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ отримуємо:

$$\varepsilon\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}[A(s,y(t_i))-A_0(y(t_i))]\,ds\right|\le\frac{\eta}{4}.$$

Отже,

$$I_1=\left|\int\limits_0^{t}[A(s,y(s))-A_0(y(s))]\,ds\right|\le\frac{\eta}{2}.$$

Оцінимо тепер вираз I_2.

Знову розіб'ємо $[0,\frac{T}{\varepsilon}]$ на n рівних частин, для довільного $t\in[t_i,t_{i+1}]$ маємо:

$$I_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(s,y(s)) - B_0(y(s))\|^q \, ds$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(s,y(s)) - B(s,y(t_i)) + B(s,y(t_i))$$

$$- B_0(y(t_i)) + B_0(y(t_i)) - B_0(y(s))\|^q \, ds.$$

Використовуючи нерівність Мінковського, маємо

$$I_2 \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Bigg[\Bigg(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(s,y(t_i)) - B_0(y(t_i))\|^q \, ds \Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \Bigg(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (\|B(s,y(s)) - B(s,y(t_i))\| + \|B_0(y(t_i)) - B_0(y(s))\|)^q \, ds \Bigg)^{\frac{1}{q}} \Bigg]^q.$$

Використовуючи умову 4) та нерівність Єнсена маємо

$$I_2 \le 2^{q-1} \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Bigg(2L^q \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} |y(s) - y(t_i)|^q \, ds + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(s,y(t_i)) - B_0(y(t_i))\|^q \, ds \Bigg).$$

Для $|y(s) - y(t_i)|$ застосуємо раніше отриману оцінку, тоді

$$I_2 \le 2^{q-1} \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Big(2L^q M^q (\frac{T}{n} + \Big(\frac{T}{n}\Big)^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{p}} \Big)^q \frac{T}{\varepsilon n}$$

$$+ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(s,y(t_i)) - B_0(y(t_i))\|^q \, ds) \le 2^q L^q M^q \Big(\frac{T}{n} + \Big(\frac{T}{n}\Big)^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{p}} \Big)^q T$$

$$+ 2^{q-1} \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(s,y(t_i)) - B_0(y(t_i))\|^q \, ds.$$

Зафіксуємо n так, щоб виконувалась умова

$$\Big(2LM \Big(\frac{T}{n} + \Big(\frac{T}{n}\Big)^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{p}} \Big) \Big)^q T \le \frac{1}{2} \Big(\frac{\eta}{2C} \Big)^q,$$

і позначимо його n_1.

Оцінимо доданок

$$I_{21} = 2^{q-1}\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|B(s, y(t_i)) - B_0(y(t_i))\|^q \, ds.$$

В силу умови 1) рівномірно по $y \in D$

$$\int\limits_0^t \|B(s, y) - B_0(y)\|^q \, ds \le t\varphi(t).$$

Якщо $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ((крім $t \in [0, t_1]$, $t_1 < t_2$), то маємо

$$\begin{aligned} I_{21} \le 2^{q-1}\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Bigg(& \int\limits_0^{t_{i+1}} \|B(s, y(t_i)) - B_0(y(t_i))\|^q \, ds \\ & - \int\limits_0^{t_i} \|B(s, y(t_i)) - B_0(y(t_i))\|^q \, ds \Bigg) \\ & \le 2^{q-1}\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}\varphi(t_{i+1}) + t_i\varphi(t_i)) \\ & \qquad \le 2^q \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T}{\varepsilon}\varphi\Big(\frac{T}{n\varepsilon}\Big) \le 2^q nT\varphi\Big(\frac{T}{n\varepsilon}\Big). \end{aligned}$$

Оскільки n — фіксоване, то $\varphi(\frac{T}{n\varepsilon}) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Якщо $t \in [0, t_1]$, то

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int\limits_0^t \|B(s, y(t_i)) - B_0(y(t_i))\|^q \, ds \\ & \qquad \le \varepsilon \int\limits_0^t (\|B(s, y(t_i))\| + \|B_0(y(t_i))\|)^q \, ds \le \frac{2^q M^q T}{n}. \end{aligned}$$

Зафіксуємо n так, щоб $\frac{2^q M^q T}{n} \le \frac{\eta}{8}$, і позначимо його n_2. Вибираємо $n = \max\{n_1, n_2\}$. Таким чином, вибором достатньо малого ε маємо оцінку

$$2^q nT\varphi\Big(\frac{T}{n\varepsilon}\Big) + \frac{2^q M^q T}{n} \le \frac{1}{2}\Big(\frac{\eta}{2C}\Big)^q,$$

а отже,

$$\left(\varepsilon \int\limits_0^t \|B(s, y(s)) - B_0(y(s))\|^q\, ds\right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{\eta}{2C}.$$

Звідки

$$|x(t) - y(t)| \le \eta + \varepsilon L \int\limits_0^t (1 + |u_\varepsilon(s)|)|x(s) - y(s)|\, ds.$$

З леми Гронуолла–Беллмана отримаємо:

$$|x(t) - y(t)| \le \eta e^{\varepsilon L \int_0^t (1+|u_\varepsilon(s)|)\, ds}.$$

Але

$$\varepsilon L \int\limits_0^t (1 + |u_\varepsilon(s)|)\, ds \le LT + L\varepsilon \int\limits_0^t |u_\varepsilon(s)|\, ds$$
$$\le LT + L\left(\varepsilon \int\limits_0^t |u_\varepsilon(s)|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}} T^{\frac{1}{q}} \le L(T + C^{\frac{1}{p}} T^{\frac{1}{q}}).$$

Отже,

$$|x(t) - y(t)| \le \eta e^{L(T + C^{\frac{1}{p}} T^{\frac{1}{q}})}$$

до моменту виходу з області D. Проте $y(t)$ лежить в області D разом зі своїм ρ-околом, тому вибором η отримуємо, що $x(t)$ лежить в D разом з $\frac{\rho}{2}$ околом завжди.

Лему доведено. □

Лема 2.2. *При виконанні умов* 1)–4) *та умови* (*A*) *існує* $\varepsilon_0 > 0$, *що при* $\varepsilon < \varepsilon_0$*:*

1) *Множини* Ω_ε *і* $\overline{\Omega}_\varepsilon$ *— непорожні;*

2) $J_\varepsilon^* > -\infty$, $\bar{J}_\varepsilon^* > -\infty$*;*

3) *для мінімізуючих послідовностей* $u_\varepsilon^{(n)}$ *та* $\bar{u}_\varepsilon^{(n)}$ *справедливі оцінки*

$$\varepsilon \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} |u_\varepsilon^{(n)}(t)|^p \, dt \leq C_1$$
$$\varepsilon \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} |\bar{u}_\varepsilon^{(n)}(t)|^p \, dt \leq C_1, \tag{2.5}$$

причому C_1 *не залежить від* ε, *від* $u_\varepsilon^{(n)}$ *та від* $\bar{u}_\varepsilon^{(n)}$.

Доведення. Множини допустимих керувань Ω_ε і $\overline{\Omega}_\varepsilon$ — непорожні, оскільки керування $u_\varepsilon(t) \equiv 0$ задовольняє умову (A) при довільному $C > 0$, то розв'язок усередненої задачі $y(t)$ при $u_\varepsilon(t) = 0$ лежить в D разом з ρ-околом. Отже, виконуються умови леми 2.1, а тому $x_\varepsilon(t, 0)$ також лежить в області D при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ та $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$.

Нехай $b = \inf_{t \geq 0, x \in D} C(t, x)$. Оскільки $J_\varepsilon(u) \geq (\alpha + b)T$, то $J_\varepsilon^* \geq (\alpha + b)T$. З іншого боку $J_\varepsilon^* \leq J_\varepsilon(0)$. Оскільки $x_\varepsilon(t, 0) \in D$ при $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$, то за умовою 3) $|C(t, x_\varepsilon(t, 0))| \leq M$, а отже

$$J_\varepsilon^* \leq J_\varepsilon(0) = \varepsilon \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} [C(t, x_\varepsilon(t, 0)) + F(t, 0)] \, dt \leq MT + K,$$

тобто J_ε^* обмежений незалежною від ε сталою.

Нехай $u_\varepsilon^{(n)}$ — мінімізуюча послідовність допустимих керувань, що $J_\varepsilon(u_\varepsilon^{(n)})$ монотонно прямує до J_ε^*. Тому

$$\varepsilon \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} (a|u_\varepsilon^{(n)}(t)|^p + \alpha + b) \, dt$$
$$\leq \varepsilon \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} [C(t, x_\varepsilon(t, u_\varepsilon^{(n)}(t))) + F(t, u_\varepsilon^{(n)}(t))] \, dt \leq MT + K + 1.$$

Отже,

$$\varepsilon a \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} |u_\varepsilon^{(n)}(t)|^p \, dt \leq MT + K + 1 - (\alpha + b)T = (M - (\alpha + b))T + K + 1.$$

Звідки

$$\varepsilon \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} |u_\varepsilon^{(n)}(t)|^p \, dt \le \frac{(M-(\alpha+b))T+K+1}{a},$$

причому M, T, K, a, α, b не залежать ні від n, ні від ε.

Для $\bar{J}_\varepsilon^*$ та $\bar{u}_\varepsilon^{(n)}$ доведення аналогічне.

Лему доведено. □

3. Основний результат

Теорема 3.1. *При виконанні умов* 1)–4) *та умови* (A) *існує* $\varepsilon_0 > 0$, *що при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *точна та усереднена задачі мають розв'язки, і для довільного* $\eta > 0$ *існує* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\eta) \le \varepsilon_0$, *що при* $\varepsilon < \varepsilon_1$ *справедливе наступне твердження*

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*)| \le \eta,$$

де $\bar{u}_\varepsilon^*$ *— оптимальне керування усередненою системою.*

Доведення. Нехай $u_\varepsilon^{(n)}(t)$ — мінімізуюча послідовність допустимих керувань, таких що $J_\varepsilon(u_\varepsilon^{(n)})$ прямує до J_ε^*. Зауважимо, що J_ε^* існує, оскільки справедливою є оцінка $J_\varepsilon(u) \ge (\alpha+b)T$. Тоді за лемою 2.2 маємо, що $u_\varepsilon^{(n)}(t)$ задовольняє оцінку (2.5). Отже, можна вибрати підпослідовність (яку також позначимо $u_\varepsilon^{(n)}(t)$), що слабко збігається до $u_\varepsilon^*(t) \in L_p(0, \frac{T}{\varepsilon})$ і таку, що виконується (2.5). Тоді ([3, с. 173]) для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться опукла комбінація $b_k(t) = \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_\varepsilon^{(i)}(t)$ елементів $u_\varepsilon^{(i)}(t) \in U_\varepsilon$ ($\alpha_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i = 1$), що в L_p $b_k \to u_\varepsilon^*$, $k \to \infty$. Отже, існує майже всюди збіжна на $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ за мірою Лебега підпослідовність b_{k_l}, що $b_{k_l}(t) \to u_\varepsilon^*(t)$, $l \to \infty$ для майже всіх t. Оскільки U_ε — опукла та замкнена множина, то $\sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i u_\varepsilon^{(i)} \in U_\varepsilon$ і $u_\varepsilon^*(t) \in U_\varepsilon$ майже для всіх t .

Так як керування $u_\varepsilon^{(n)}(t)$ — допустимі, то $x^{(n)}(t) = x(t, u_\varepsilon^{(n)}(t))$ — визначені на $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ і лежать в області D для довільного n та довільного $\varepsilon > 0$. Для $x^{(n)}(t)$ маємо рівномірну оцінку

$$|x^{(n)}(t)| \le |x_0| + MT + MT^{\frac{1}{q}} \left(\varepsilon \int\limits_0^t |u_\varepsilon^{(n)}(s)|^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \le \widetilde{C}.$$

Рівностепенева неперервність функцій $x^{(n)}(t)$ на $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ випливає з наступних викладок:

$$
\begin{aligned}
&|x^{(n)}(t_2) - x^{(n)}(t_1)| \\
&\qquad = \varepsilon \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} [A(s, x^{(n)}(s)) + B(s, x^{(n)}(s)) u_\varepsilon^{(n)}(s)]\, ds \right| \\
&\qquad \le \varepsilon M \int\limits_{t_1}^{t_2} (1 + |u_\varepsilon^{(n)}(s)|)\, ds \\
&\qquad \le \varepsilon M |t_2 - t_1| + M \varepsilon^{\frac{1}{q}} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{q}} \left(\varepsilon \int\limits_{t_1}^{t_2} |u_\varepsilon^{(n)}(s)|^p\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \le \varepsilon M |t_2 - t_1| + \varepsilon^{\frac{1}{q}} M C^{\frac{1}{p}} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Таким чином, послідовність $\{x_n(t)\}$ компактна при $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$, а тому з неї можна вибрати підпослідовність, яку також позначимо $x^{(n)}(t)$, що рівномірно збігається до $x^*(t)$

$$
\lim_{n\to\infty} x^{(n)}(t) = x^*(t) \quad \text{при } t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right].
$$

Покажемо, що $x^*(t)$ є розв'язком, який відповідає $u_\varepsilon^*(t)$. Маємо

$$
\begin{aligned}
x^{(n)}(t) &= x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t [A(s, x^{(n)}(s)) + B(s, x^{(n)}(s)) u_\varepsilon^{(n)}(s)]\, ds \\
&= x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t [A(s, x^{(n)}(s)) - A(s, x^*(s)) + A(s, x^*(s)) \\
&\quad + B(s, x^{(n)}(s)) u_\varepsilon^{(n)}(s) - B(s, x^*(s)) u_\varepsilon^{(n)}(s) + B(s, x^*(s)) u_\varepsilon^{(n)}(s) \\
&\quad - B(s, x^*(s)) u_\varepsilon^*(s) + B(s, x^*(s)) u_\varepsilon^*(s)]\, ds \\
&= x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t [A(s, x^{(n)}(s)) - A(s, x^*(s))]\, ds \\
&\quad + \varepsilon \int\limits_0^t [A(s, x^*(s)) + B(s, x^*(s)) u_\varepsilon^*(s)]\, ds
\end{aligned}
$$

$$+ \varepsilon \int\limits_0^t B(s, x^*(s))[u_\varepsilon^{(n)}(s) - u_\varepsilon^*(s)]\, ds$$

$$+ \int\limits_0^t u_\varepsilon^{(n)}(s)[B(s, x^{(n)}(s)) - B(s, x^*(s))]\, ds.$$

Користуючись граничними співвідношеннями:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} |A(s, x^{(n)}(s)) - A(s, x^*(s))|\, ds = 0$$

та

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^t B(s, x^*(s))[u_\varepsilon^{(n)}(s) - u_\varepsilon^*(s)]\, ds = 0,$$

а також співвідношенням $\lim_{n\to\infty} B(t, x^{(n)}(t)) = B(t, x^*(t))$, що виконуються рівномірно, поза деякою множиною S довільної малої міри і нерівністю $\int_S |u_\varepsilon^{(n)}|\, ds \le (\int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} |u_\varepsilon^{(n)}|^p\, ds)^{\frac{1}{p}} |S|^{\frac{1}{p}}$, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} \|B(s, x^{(n)}(s)) - B(s, x^*(s))\| |u_\varepsilon^{(n)}(s)|\, ds = 0.$$

Звідки

$$x^*(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t [A(s, x^*(s)) + B(s, x^*(s)) u_\varepsilon^*(s)]\, ds.$$

Отже, $x^*(t)$ — розв'язок, що відповідає керуванню $u_\varepsilon^*(t)$ на $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$. З опуклості $F(t, u)$ маємо оцінку $J_\varepsilon(u_\varepsilon^*) \le \lim_{n\to\infty} J_\varepsilon(u_\varepsilon^{(n)})$ ([4, с. 227]). Отже, $u_\varepsilon^*(t)$ — оптимальне керування та $x^*(t)$ — оптимальна траєкторія.

Аналогічно встановлюється існування оптимального керування $\bar{u}_\varepsilon^*(t)$ та оптимальної траєкторії $\bar{y}^*(t)$ усередненої системи.

Покажемо далі, що для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\eta)$, що при довільному $\varepsilon < \varepsilon_1$:

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*)| \le \eta, \tag{3.1}$$

де $\bar{u}_\varepsilon^*$ — оптимальне керування усередненою системою.

Оскільки $\bar{u}_\varepsilon^*$ реалізує інфімум для усередненої задачі, то існує $\bar{u}_\varepsilon^{(n)}$ — мінімізуюча послідовність, що $\bar{J}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^{(n)}) \to \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*)$ при $n \to \infty$ монотонно. За означенням інфімуму маємо: для довільного $\eta_1 > 0$, такого що $\eta_1 < \eta < \frac{\rho}{2}$

$$\bar{J}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^{(n)}) < \bar{J}_\varepsilon^* + \eta_1$$

при $n \geq n_0(\varepsilon)$. За лемою 2.2 $\bar{u}_\varepsilon^{(n)}$ задовольняє умову (A), а отже, за лемою 2.1 маємо: існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta_1)$, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$|x_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^{(n)}(t)) - y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^{(n)}(t)| \leq \eta_1$$

при $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$ для всіх n. Візьмемо $\bar{u}_\varepsilon^{(n)}$, де $n > n_0(\varepsilon)$, і зафіксуємо n. Для даного фіксованого n позначимо $\bar{u}_\varepsilon^{(n)} = \bar{u}_\varepsilon^{\eta_1}(t)$. Дане керування допустиме і для точної задачі. Тому

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^* \leq J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^{\eta_1}(t)) \leq \bar{J}_\varepsilon^* + \eta_1 - \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^{\eta_1}(t)) + J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^{\eta_1}(t)) \\ = \bar{J}_\varepsilon^* + \eta_1 + J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^{\eta_1}(t)) - \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^{\eta_1}(t)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Також маємо, що

$$\begin{aligned} &|J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^{\eta_1}(t)) - \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^{\eta_1}(t))| \\ &\leq \varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} |C(t, x_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^{\eta_1}(t))) - C(t, y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^{\eta_1}(t)))|\, dt \leq L\eta_1 T. \end{aligned} \tag{3.3}$$

З оцінок (3.2) та(3.3) отримуємо:

$$J_\varepsilon^* \leq \bar{J}_\varepsilon^* + \eta_1 + L\eta_1 T = \bar{J}_\varepsilon^* + \eta_1(1 + LT) \tag{3.4}$$

при $\varepsilon < \varepsilon_0(\eta_1)$.

За означенням інфімуму для J_ε існує мінімізуюча послідовність $u_\varepsilon^{(n)}$, що

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon^{(n)}) < J_\varepsilon^* + \eta_1 \tag{3.5}$$

при досить великих n.

В силу леми 2.2 для керувань $u_\varepsilon^{(n)}$ виконана умова (A), а отже, за лемою 2.1 існує $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\eta_1)$, що при $\varepsilon < \varepsilon_2$

$$|x_\varepsilon(t, u_\varepsilon^{(n)}) - y_\varepsilon(t, u_\varepsilon^{(n)}| \leq \eta_1$$

при $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$ для довільного n.

Виберемо n достатньо великим, щоб виконувалась оцінка (3.5) і позначимо $u_\varepsilon^{(n)} = u_\varepsilon^{\eta_1}$, яке є очевидно допустимим керуванням. Тоді

$$\bar{J}_\varepsilon^* \le \bar{J}_\varepsilon(u_\varepsilon^{\eta_1}) \le \bar{J}_\varepsilon(u_\varepsilon^{\eta_1}) + J_\varepsilon^* + \eta_1 - J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\eta_1}) \\ = J_\varepsilon^* + \eta_1 + \bar{J}_\varepsilon(u_\varepsilon^{\eta_1}) - J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\eta_1}). \quad (3.6)$$

Аналогічно оцінці (3.3) маємо

$$|\bar{J}_\varepsilon(u_\varepsilon^{\eta_1}) - J_\varepsilon(u_\varepsilon^{\eta_1})| \le L\eta_1 T. \quad (3.7)$$

З нерівностей (3.6) та (3.7) отримуємо, що

$$\bar{J}_\varepsilon^* \le J_\varepsilon^* + \eta_1(1 + LT). \quad (3.8)$$

Отже, з (3.4) та (3.8) маємо

$$|J_\varepsilon^* - \bar{J}_\varepsilon^*| \le \eta_1(1 + LT). \quad (3.9)$$

Оскільки

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*)| = |J_\varepsilon^* - \bar{J}_\varepsilon^* + \bar{J}_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*)| \\ \le |J_\varepsilon^* - \bar{J}_\varepsilon^*| + |\bar{J}_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*)|, \quad (3.10)$$

то для виконання (3.1) також потрібно ще оцінити $|\bar{J}_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*)|$, де $\bar{u}_\varepsilon^*$ — оптимальне керування усередненою системою. Розв'язок $y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*)$ визначений на $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$. Для оптимального керування $\bar{u}_\varepsilon^*$ існує мінімізуюча послідовність $\bar{u}_\varepsilon^{(n)}$, що слабко збігається до $\bar{u}_\varepsilon^*$. За лемою 2.2 $\bar{u}_\varepsilon^{(n)}$ задовольняє умову (A), отже відповідні траєкторії усередненої системи $y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^{(n)})$ лежать в D разом з ρ-околом (за лемою 2.1). Оскільки $y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*)$ — рівномірна границя $y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^{(n)})$ для кожного ε, то $y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*)$ також лежить в D разом з деяким околом, що не залежить від ε.

Оцінимо $|x_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*) - y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*)|$ до моменту виходу $x_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*)$ з області D. Маємо

$$|x_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*) - y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*)| \le \varepsilon \left| \int_0^t [A(s, x_\varepsilon(s)) - A_0(y_\varepsilon(s))]\, ds \right.$$

$$\left. + \int_0^t [B(s, x_\varepsilon(s)) - B_0(y_\varepsilon(s))] u_\varepsilon^*(s)\, ds \right| \le \varepsilon \int_0^t |A(s, x_\varepsilon(s)) - A(s, y_\varepsilon(s))|\, ds$$

$$+ \varepsilon \left| \int_0^t A(s, y_\varepsilon(s)) - A_0(y_\varepsilon(s))\, ds \right| + \varepsilon \left| \int_0^t [B(s, x_\varepsilon(s)) - B_0(y_\varepsilon(s))] \bar{u}_\varepsilon^{(n)}(s)\, ds \right|$$

$$+\,\varepsilon\left|\int\limits_0^t [B(s,x_\varepsilon(s))-B_0(y_\varepsilon(s))](\bar u_\varepsilon^*(s)-\bar u_\varepsilon^{(n)}(s))\,ds\right|$$

$$\le \varepsilon L\int\limits_0^t |x_\varepsilon(s)-y_\varepsilon(s)|\,ds+\varepsilon\left|\int\limits_0^t [A(s,y_\varepsilon(s))-A_0(y_\varepsilon(s))]\,ds\right|$$

$$+\,\varepsilon\left|\int\limits_0^t [B(s,x_\varepsilon(s))-B(s,y_\varepsilon(s))+B(s,y_\varepsilon(s))-B_0(y_\varepsilon(s))]u_\varepsilon^{(n)}(s)\,ds\right|$$

$$+\,\varepsilon\left|\int\limits_0^t [B(s,x_\varepsilon(s))-B_0(y_\varepsilon(s))](\bar u_\varepsilon^*(s)-\bar u_\varepsilon^{(n)}(s))\,ds\right|$$

$$\le \varepsilon L\int\limits_0^t |x_\varepsilon(s)-y_\varepsilon(s)|\,ds+\varepsilon\left|\int\limits_0^t [A(s,y_\varepsilon(s))-A_0(y_\varepsilon(s))]\,ds\right|$$

$$+\varepsilon L\int\limits_0^t |x_\varepsilon(s)-y_\varepsilon(s)|\,|\bar u_\varepsilon^{(n)}(s)|\,ds+\varepsilon\left|\int\limits_0^t [B(s,y_\varepsilon(s))-B_0(y_\varepsilon(s))]\bar u_\varepsilon^{(n)}(s)\,ds\right|$$

$$+\,\varepsilon\left|\int\limits_0^t [B(s,x_\varepsilon(s))-B_0(y_\varepsilon(s))](\bar u_\varepsilon^*(s)-\bar u_\varepsilon^{(n)}(s))\,ds\right|$$

$$\le \varepsilon L\int\limits_0^t (1+|\bar u_\varepsilon^{(n)}(s)|)|x_\varepsilon(s)-y_\varepsilon(s)|\,ds+\varepsilon\left|\int\limits_0^t [A(s,y_\varepsilon(s))-A_0(y_\varepsilon(s))]\,ds\right|$$

$$+\,\varepsilon\left|\int\limits_0^t [B(s,y_\varepsilon(s))-B_0(y_\varepsilon(s))]\bar u_\varepsilon^{(n)}(s)\,ds\right|$$

$$+\,\varepsilon\left|\int\limits_0^t [B(s,x_\varepsilon(s))-B_0(y_\varepsilon(s))](\bar u_\varepsilon^*(s)-\bar u_\varepsilon^{(n)}(s))\,ds\right|.$$

Оцінимо окремо кожен з даних інтегралів. Позначимо

$$I_1'=\varepsilon\left|\int\limits_0^t [A(s,y_\varepsilon(s))-A_0(y_\varepsilon(s))]\,ds\right|$$

та

$$I_2'=\varepsilon\left|\int\limits_0^t [B(s,y_\varepsilon(s))-B_0(y_\varepsilon(s))]\bar u_\varepsilon^{(n)}(s)\,ds\right|.$$

Оцінка інтегралу I_1' здійснюється аналогічно оцінці інтегралу (2.1), враховуючи, що для $\bar{u}_\varepsilon^*$ виконується наступне співвідношення ([3, с. 173]):

$$\|\bar{u}_\varepsilon^*\|_p \leq \varliminf_{n\to\infty} \|\bar{u}_\varepsilon^{(n)}\|_p.$$

Отже, для керування $\bar{u}_\varepsilon^*$ виконується умова (A) та оцінка

$$|y_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(t_i)| \leq \frac{MT}{n} + M\Big(\frac{T}{n}\Big)^{\frac{1}{q}} C^{\frac{1}{p}}.$$

Таким чином, вибором n отримаємо нерівність $I_1' \leq \frac{\eta_1}{3}$.

Аналогічно оцінці (2.2), використовуючи нерівність Гельдера та оцінку для $|y_\varepsilon(s) - y_\varepsilon(t_i)|$, також отримуємо $I_2' \leq \frac{\eta_1}{3}$.

Отже, залишилося оцінити

$$I_3' = \varepsilon\left|\int_0^t [B(s, x_\varepsilon(s)) - B_0(y_\varepsilon(s))](\bar{u}_\varepsilon^*(s) - \bar{u}_\varepsilon^{(n)}(s))\, ds\right|.$$

До моменту виходу з області функція $B(s, x_\varepsilon(s)) - B_0(y_\varepsilon(s))$ — обмежена, тому для довільного моменту часу, що не перевищує моменту виходу $x_\varepsilon(s)$ з області D із слабкої збіжності $\bar{u}_\varepsilon^{(n)}$ до $\bar{u}_\varepsilon^*$, випливає, що для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ існує $n_0 = n_0(t, \varepsilon)$, що $I_3' \leq \frac{\eta_1}{3}$ при $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$.

Отже, до моменту виходу з області D справедлива оцінка

$$|x_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*) - y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*)| \leq \eta_1. \tag{3.11}$$

Оскільки $y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*)$ лежить в області D разом з ρ-околом, то з (3.11) маємо, що при $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ $x_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*)$ також лежить в області D. Тому

$$\begin{aligned}|\bar{J}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*) - J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*)| &\leq \varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} |C(t, y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*)) - C(t, x_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*))|\, dt \\ &\leq \varepsilon L \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} |x_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*) - y_\varepsilon(t, \bar{u}_\varepsilon^*)|\, dt \leq L\eta_1 T. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Отже, з (3.9), (3.10) і (3.12) маємо нерівність

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*)| \leq \eta_1(1 + LT) + \eta_1 LT = \eta_1(1 + 2LT) := \eta, \tag{3.13}$$

яку і потрібно було встановити.

Теорема доведена. $\square$

Наслідок 3.1. *При виконанні умов* 1)–4) *існує* $\varepsilon_0 > 0$, *що при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *точна та усереднена задачі з функціоналом* $(*)$ *мають розв'язки, і для довільного* $\eta > 0$ *існує* $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\eta) \le \varepsilon_0$, *що при* $\varepsilon < \varepsilon_1$ *справедливе наступне твердження*

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon^*)| \le \eta,$$

де $\bar{u}_\varepsilon^*$ — *оптимальне керування усередненою системою.*

4. Приклади

Проілюструємо доведену теорему прикладами застосування.

Приклад 4.1. Розглядається задача

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \varepsilon[A(t)x + f(t,x) + B(t)u_\varepsilon] \\ &x(0) = x_0, \\ &J_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} [C(t,x) + F(t,u)]\, dt \to \inf \end{aligned} \tag{4.1}$$

з виконанням умов теореми.

Нехай рівномірно по $x \in D$ виконується співвідношення

$$f_0(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t,x)\, dt = 0.$$

Поставимо у відповідність (4.1) усереднену систему, лінійну по фазовій змінній

$$\begin{aligned} &\dot{y} = \varepsilon[A_0 y + B_0 \bar{u}_\varepsilon] \\ &y(0) = x_0 \\ &\bar{J}_\varepsilon(\bar{u}) = \varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} [C(t,y) + F(t,\bar{u})]\, dt \to \inf. \end{aligned} \tag{4.2}$$

У випадку, коли $C(t,y)$ — невід'ємно визначена квадратична форма по y, а $F(t,\bar{u})$ — квадратична по $\bar{u}$, отримуємо задачу аналітичного конструювання лінійного регулятора зі сталими матрицями A_0 і B_0, розв'язання якої зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь Ріккаті. Зокрема, коли C і F не залежить від t, то це рівняння автономне, і в одномірному випадку воно точно інтегрується.

Приклад 4.2. Розглядається задача

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \varepsilon[A(t,x) + B(t,x)u_\varepsilon] \\ &x(0) = x_0, \\ &J_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} [C(t,x) + F(t,u)]\, dt \to \inf \end{aligned} \tag{4.3}$$

з виконанням умов теореми, де $F(t,0) \equiv 0$. Нехай існує $C_0(x)$, що рівномірно по x виконується співвідношення

$$\lim_{T\to\infty} \left| \frac{1}{T} \int_0^T C(t,x)\, dt - C_0(x) \right| = 0.$$

Поставимо у відповідність системі (4.3) наступну усереднену систему

$$\begin{aligned} &\dot{y} = \varepsilon[A_0(y) + B_0(y)\bar{u}_\varepsilon] \\ &y(0) = x_0 \\ &\bar{J}_\varepsilon(\bar{u}) = \varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} [C_0(y) + F(t,\bar{u})]\, dt. \end{aligned} \tag{4.4}$$

У тому випадку, коли $C_0 \equiv 0$, не розв'язуючи задачу (4.4), можемо стверджувати, що оптимальним керуванням усередненої системи буде керування $u^* = 0$, і це керування буде η-оптимальним для задачі (4.3).

Таким чином, застосування отриманих в роботі результатів дозволяє звести розв'язання задачі оптимального керування виду (1.1) до розв'язання простішої усередненої задачі (1.2). При цьому, на відміну від раніше відомих підходів, запропоновано нову, більш зручну процедуру усереднення, що полегшує розв'язання практичних задач оптимального керування.

Література

[1] В. А. Плотников, *Метод усреднения в задачах управления*, К.: Одесса: Лыбидь, 1992, 188 с.

[2] В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк, *Дифференциальние уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы*, Одесса: Астропринт, 1999, 354 с.

[3] К. Иосида, *Функциональный анализ*, М.: Мир, 1967, 624 с.

[4] Э. Б. Ли, Л. Маркус, *Основы теории оптимального управления*, М.: Наука, 1972, 576 с.

[5] В. Г. Гайцгори, *Управление системами с быстрыми и медленными движениями*, М.: Наука, 1991, 224 с.

[6] В. А. Плотников, И. А. Бойцова, *Усреднение в задачах оптимального управления системами с быстрыми и медленными переменными* // Проблемы управления и информатики, (2000), N 5, 152–156.

[7] M. S. Nikol'skii, *An optimal control problem with a small parameter* // Cybernetics and System Analysis, **38** (2002), N 3, 439–443.

Відомості про авторів

Тетяна В. Добродзій

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
вул. Володимирівська, 64
01033 Київ
Україна
E-Mail: notava@ukr.net