Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 3, 394 – 405

Обобщение леммы Римана–Лебега

Роальд М. Тригуб

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В статье рассматривается следующая задача: найти вещественную функцию ϕ, которая удовлетворяет предельному условию

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_a^b f(t)e^{i\phi(\lambda t)}\,dt = 0$$

для всех $f \in L(a,b)$.

Множество таких функций обозначим через $(R-L)(a,b)$. Найден критерий принадлежности функции ϕ классу $(R-L)(a,b)$. Этот критерий используется для нахождения эффективного необходимого и отдельно достаточного условий. В частности, если $0 \le a < b \le +\infty$ и ϕ выпукла около $+\infty$, то для того чтобы $\phi \in (R-L)(a,b)$, необходимо и достаточно

$$\lim_{t\to+\infty}(\phi(2t)-\phi(t)) = \infty.$$

Полученные результаты проиллюстрированы примерами.

2000 MSC. 42A38.

Ключевые слова и фразы. Преобразование Фурье.

1. Введение. Формулировка результатов

Рассмотрим следующую задачу. При какой измеримой вещественной функции ϕ на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{i\phi(\lambda t)}\,dt = 0 \tag{1.1}$$

для любой функции $f \in L(\mathbb{R}_+)$? Множество таких функций ϕ обозначим через $R-L$. Классическая лемма Римана–Лебега состоит в том, что линейная функция (не константа) принадлежит $R-L$.

Статья поступила в редакцию 30.01.2008

ISSN 1810 – 3200.

Очевидно, что если $\phi(t) \in R-L$, то $\phi(t)+c$ при $c \in \mathbb{R}$, $\phi(\delta t)$ при $\delta > 0$ и $-\phi(t)$ принадлежат $R-L$, а принадлежность $R-L$ зависит от поведения функции только около $+\infty$ (см. также ниже теорему 1.1).

Менее очевидно, что если $\phi \in R-L$ и ограничена, то при достаточно малом $\delta > 0$ функция $\delta\phi \notin R-L$ (см. необходимое условие (2.4)), а функция $\phi_\delta(t) = \delta \sin t$, например, принадлежит $R-L$ лишь для значений δ из вполне определённой бесконечно большой последовательности (см. примеры в п. 3).

Теорема 1.1. *Для того чтобы $\phi \in R-L$, необходимо, чтобы для любого $\delta \in [0,1)$*

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int_{\delta R}^{R} e^{i\phi(t)}\, dt = 0, \tag{1.2}$$

и достаточно, чтобы это условие (1.2) *выполнялось хотя бы для одного $\delta \in [0,1)$.*

Теорема 1.2. *Пусть функция ϕ выпукла* (*вверх или вниз*) *около $+\infty$. Для того чтобы $\phi \in R-L$, необходимо и достаточно:*

$$\lim_{t\to+\infty} (\phi(2t) - \phi(t)) = \infty.$$

Эта теорема анонсирована автором в лекциях на симпозиуме "Fourier series methods in complex analysis" [1, 1.1].

Теорема 1.3. *Пусть функция ϕ такова, что существует число $T > 0$ и целозначная функция $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{Z}$, при которых*

$$\phi(t+T) = \phi(t) + 2\pi h(t) \qquad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Тогда $\phi \in R-L$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^T e^{i\phi(t)}\, dt = 0.$$

В частности, если $\phi_o(t+\pi) = \phi_o(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, то функция $\phi(t) = \phi_o(t) + (2h(t)+1)t$, где $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{Z}$, принадлежит $R-L$.

Отметим, кстати, что единственная функция ϕ, удовлетворяющая условиям теорем 1.2 и 1.3 (одновременно) — это линейная функция.

См. также п. 3 (III), в котором вместо $\mathbb{R}_+$ рассмотрен случай произвольного промежутка $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

2. Доказательства

Доказательство теоремы 1.1. Интеграл в условии (1.1) есть линейный непрерывный функционал на $L(\mathbb{R}_+)$ и при любом $\lambda > 0$

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{i\phi(\lambda t)}\, dt \right| \le \int_0^\infty |f(t)|\, dt.$$

Поэтому достаточно (и необходимо, конечно) проверить искомое равенство (1.1) для всех функций f из какого-либо плотного в $L(\mathbb{R}_+)$ множества. В качестве такого подмножества возьмём все финитные ступенчатые функции, т. е. все функции вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k h_{b_k}(t) \qquad (0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n),$$

где $h_b(t) = 1$ при $0 \le t \le b$ и $h_b(t) = 0$ при $t > b$ (индикатор $[0, b]$), $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $1 \le k \le n$.

В силу линейности функционала можно ограничиться функцией h_b при $b > 0$. Но

$$\int_0^\infty h_b(t) e^{i\phi(\lambda t)}\, dt = \int_0^b e^{i\phi(\lambda t)}\, dt = b \cdot \frac{1}{R} \int_0^R e^{i\phi(t)}\, dt \qquad (R = b\lambda).$$

Таким образом, доказано, что $\phi \in R-L$ в том и только в том случае, если

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^R e^{i\phi(t)}\, dt = 0. \tag{2.3}$$

Из условия (2.3) сразу следует условие (1.2) при любом $\delta \in (0, 1)$, так как

$$\frac{1}{R} \int_{\delta R}^R e^{i\phi(t)}\, dt = \frac{1}{R} \int_0^R e^{i\phi(t)}\, dt - \delta \frac{1}{\delta R} \int_0^{\delta R} e^{i\phi(t)}\, dt.$$

Пусть теперь выполнено условие (1.2) при некотором $\delta \in (0,1)$. Выведем из него условие (2.3).

Возьмём $\varepsilon > 0$. В силу (1.2) найдётся число M такое, что при $R > M$

$$\left| \int\limits_{\delta R}^{R} e^{i\phi(t)}\, dt \right| < \varepsilon R.$$

Выберем натуральное число N так, чтобы $\delta^N < \varepsilon$. Тогда при любом $R > M\delta^{1-N}$

$$\left| \int\limits_{0}^{R} e^{i\phi(t)}\, dt \right| = \left| \int\limits_{0}^{R\delta^N} e^{i\phi(t)}\, dt + \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{R\delta^k}^{R\delta^{k-1}} e^{i\phi(t)}\, dt \right|$$

$$\le R\delta^N + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon R\delta^{k-1} < \varepsilon R + \varepsilon R \cdot \frac{1}{1-\delta} = \frac{2-\delta}{1-\delta}\varepsilon R.$$

Теорема 1.1 доказана. $\square$

Аналогичный критерий можно привести для существования предела $\lim \int_0^\infty f(t)g(\lambda t)\, dt$ с любой ограниченной функцией g при $\lambda \to +\infty$ и $\lambda \to +0$. См. [2, 1.1].

Выведем из теоремы 1.1 необходимые условия принадлежности $R - L$.

Следствие. *Пусть $\phi \in R - L$. Тогда полная вариация любой функции, совпадающей с ϕ почти всюду , на отрезке $[R, 2R]$ при $R \to +\infty$ стремится к $+\infty$ и при любом $\delta \in [0,1)$*

$$\varliminf_{R\to+\infty} \omega(\phi; \delta R, R) \ge \pi, \tag{2.4}$$

где $\omega(g; a, b) = \operatorname{ess\,sup}\{|g(x) - g(y)|,\ x, y \in [a, b]\}$– колебание функции на $[a, b]$. При этом число π в этом условии увеличить нельзя.

Доказательство. Предположим, что при $\delta \in [0,1)$ найдётся $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ такое, что при некоторой последовательности $R_n \to \infty$ $\omega(\phi; \delta R_n, R_n)$ $\le \pi - 2\varepsilon$. Тогда существует последовательность $c_n \in \mathbb{R}$ такая, что почти всюду

$$|\phi(t) - c_n| \leq \frac{\pi - 2\varepsilon}{2}$$

и

$$\frac{1}{R_n}\left|\int\limits_{\delta R_n}^{R_n} e^{i\phi(t)}\,dt\right| = \frac{1}{R_n}\left|\int\limits_{\delta R_n}^{R_n} e^{i(\phi(t)-c_n)}\,dt\right| \geq \frac{1}{R_n}\left|\int\limits_{\delta R_n}^{R_n} \cos(\phi(t)-c_n)\,dt\right| \geq (1-\delta)\sin\varepsilon > 0.$$

В силу теоремы 1.1 $\phi \notin R - L$.

Точность неравенства (2.4) видна на примере $\phi(t) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\sin t$ (см. пример $\phi_{a,b}$ в п. 3).

При любом натуральном N $(1+\frac{1}{2N})^N < \sqrt{e} < 2$. Поэтому полная вариация

$$V_R^{2R}(\phi) \geq V_R^{R(1+\frac{1}{2N})^N} = \sum_{k=0}^{N-1} V_{R(1+\frac{1}{2N})^k}^{R(1+\frac{1}{2N})^{k+1}}(\phi) \geq \sum_{k=0}^{N-1} \omega\Big(\phi; R\Big(1+\frac{1}{2N}\Big)^k, R\Big(1+\frac{1}{2N}\Big)^{k+1}\Big).$$

Но в силу (4) при любом N существует число R_N такое, что при $R \geq R_N$ и $k = 0$, а значит, и при $k \geq 1$

$$\omega\Big(\phi; R\Big(1+\frac{1}{2N}\Big)^k, R\Big(1+\frac{1}{2N}\Big)^{k+1}\Big) > 1.$$

Но тогда при $R \geq R_N$ $V_R^{2R}(\phi) > N$, т. е. $\lim_{R\to\infty} V_R^{2R}(\phi) = +\infty$. Следствие доказано. □

Доказательство теоремы 1.2. Если функция $\phi \in R - L$ и монотонна около $+\infty$, то в силу следствия при $R \to +\infty$

$$|\phi(2R) - \phi(R)| = V_R^{2R}(\phi) \to \infty.$$

А если ϕ выпукла около $+\infty$, то при больших t она монотонна и необходимость в теореме 1.2 доказана.

Можно считать, что ϕ возрастает (в случае убывания заменяем ϕ на $-\phi$). Так как $\phi(t) \equiv \text{const} \notin R-L$, то можно считать, что $\phi'(t) > 0$ при больших t за исключением, быть может, счётного числа точек, в которых существуют обе односторонние производные, и, напр., правая производная ϕ' монотонна.

Пусть $\lim_{R\to+\infty}(\phi(2R) - \phi(R)) = \infty$.

Докажем соотношение (1.2) при $\delta = \frac{1}{2}$.

После интегрирования по частям

$$\frac{1}{R}\int\limits_R^{2R} e^{i\phi(t)}\,dt = \frac{1}{iR}\int\limits_R^{2R}\frac{1}{\phi'(t)}\,de^{i\phi(t)}$$

$$= \frac{1}{iR}\Big[\frac{1}{\phi'(t)}e^{i\phi(t)}\Big]_R^{2R} - \frac{1}{iR}\int\limits_R^{2R} e^{i\phi(t)}\,d\Big(\frac{1}{\phi'(t)}\Big),$$

применяя обычную оценку интеграла Стилтьеса $|\int_a^b f dg| \le V_a^b(g) \times \max|f(x)|$, получим

$$\Big|\frac{1}{R}\int\limits_R^{2R} e^{i\phi(t)}\,dt\Big| \le \frac{1}{R}\Big(\frac{1}{|\phi'(2R)|} + \frac{1}{|\phi'(R)|}\Big) + \frac{1}{R}V_R^{2R}\Big(\frac{1}{\phi'}\Big).$$

Очевидно, что при $R \to +\infty$

$$R\max\{\phi'(R), \phi'(2R)\} \ge \int\limits_R^{2R}\phi'(t)\,dt = \phi(2R) - \phi(R) \to +\infty$$

и, значит, учитывая ещё монотонность ϕ',

$$\lim_{R\to+\infty} R\phi'(R) = +\infty.$$

Кроме того, при $R \to +\infty$

$$\frac{1}{R}V_R^{2R}\Big(\frac{1}{\phi'}\Big) = \frac{1}{R}\Big|\frac{1}{\phi'(R)} - \frac{1}{\phi'(2R)}\Big| \to 0.$$

Так что

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int\limits_R^{2R} e^{i\phi(t)}\, dt = 0$$

и в силу теоремы 1.1 $\phi \in R - L$.

Теорема 1.2 доказана. □

Доказательство теоремы 1.3. Из условия теоремы

$$\phi(t+T) = \phi(t) + 2\pi h(t) \qquad (t \in \mathbb{R}_+), \quad h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{Z}$$

следует, что для всех $t \in \mathbb{R}_+$

$$e^{i\phi(t+T)} = e^{\phi(t)}.$$

Тогда при $R \to +\infty$ и $n = [\frac{R}{T}]$ (целая часть)

$$\int\limits_0^T e^{i\phi(t)}\, dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_0^T e^{i\phi(t+kT)}\, dt = \frac{1}{n} \int\limits_0^{nT} e^{i\phi(t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{n} \int\limits_0^R e^{i\phi(t)}\, dt + O\Big(\frac{T}{n}\Big) = \frac{T}{R} \int\limits_0^R e^{i\phi(t)}\, dt + O\Big(\frac{T}{n}\Big).$$

Таким образом, условие (2.3) (необходимое и достаточное) для таких функций ϕ принимает вид:

$$\int\limits_0^T e^{i\phi(t)}\, dt = 0.$$

Теперь к функции ϕ из теоремы 1.3 применяем этот критерий при $T = 2\pi$:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i\phi(t)}\, dt = \int\limits_0^{\pi} e^{i\phi(t)}\, dt + \int\limits_0^{\pi} e^{i\phi(t+\pi)}\, dt$$

$$= \int\limits_0^{\pi} e^{i\phi(t)}\, dt + \int\limits_0^{\pi} e^{i\phi_o(t)+(2h(t)+1)(t+\pi)}\, dt$$

$$= \int\limits_0^{\pi} e^{i\phi(t)}\, dt - \int\limits_0^{\pi} e^{i\phi(t)}\, dt = 0.$$

Теорема 1.3 доказана. □

3. Примеры и дополнения

I) Рассмотрим сначала пример функции $\phi_{a,b}$, принимающей на $\mathbb{R}_+$ два различных значения a и b на множествах E и $\mathbb{R}_+ \setminus E$, соответственно.

Проверим, что для того чтобы $\phi_{a,b} \in R - L$, необходимо и достаточно: $b - a = (2s+1)\pi$ при некотором $s \in \mathbb{Z}$ и (m-мера Лебега)

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} m(E \cap [0, R]) = \frac{1}{2}.$$

Для этого применим к функции теорему 1.1. При $R \to +\infty$

$$\frac{1}{R}\int_0^R e^{i\phi_{a,b}(t)}\,dt = \frac{1}{R}(e^{ia} m(E\cap[0,R]) + e^{ib}(R - m(E\cap[0,R]))) \to 0,$$

откуда следует, что $e^{ia} \neq e^{ib}$ и

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} m(E\cap[0,R]) = \frac{-e^{ib}}{e^{ia} - e^{ib}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{i(\frac{b-a}{2} - \frac{\pi}{2})}}{\sin(\frac{b-a}{2})}.$$

Но этот предел в силу положительности меры должен быть неотрицательным. Поэтому $b - a = (2s+1)\pi$ при некотором $s \in \mathbb{Z}$, что и требовалось доказать.

Как следует из теоремы 1.2, функция $\phi(t) = (\ln t)^\gamma$ принадлежит $R - L$ лишь в случае $\gamma > 1$.

Построим теперь серию гладких монотонных функций без условия выпуклости, принадлежащих $R - L$. Для этого применим теорему 1.3.

Пусть ϕ возрастает на $[0, \pi]$ и $\phi(t + \pi) = \phi(t) + \pi$ при $t > 0$. Тогда $\phi \in R - L$. Если $\phi(\pi) \le \phi(+0) + \pi$, то эта функция возрастает на $\mathbb{R}_+$. Если $\phi \in C[0, \pi]$ и $\phi(\pi) = \phi(0) + \pi$, то $\phi \in C(\mathbb{R}_+)$. А если дополнительно при некотором $r \in \mathbb{N}$ или $r = \infty$ $\phi^{(k)}(0) = \phi^{(k)}(\pi)$ $(0 \le k \le r)$, то $\phi \in C^r(\mathbb{R}_+)$. Все такие функции принадлежат $R - L$.

Отметим теперь, что необходимое условие для возрастающих функций

$$\lim_{R\to\infty} (\phi(2R) - \phi(R)) = 0$$

(см. следствие из теоремы 1.1) не является достаточным, вообще говоря. Чтобы это доказать, достаточно взять $\phi(t) = 1$ на $[0, 2\pi]$ и $\phi(t+2\pi) = \phi(t)+2\pi h(t)$, где $h-$ любая возрастающая положительная и целозначная функция. При $h(t) \equiv 1$ $\phi(t) = 1 + [\frac{t}{2\pi}]$.

Заметим ещё, что если повторить доказательство следствия теоремы 1.1 применительно к функциям из теоремы 1.3, то получим: $\omega(\phi; 0, \pi) \geq \pi$.

II) Из предыдущего следует, что если $\phi \in R - L$ и ограничена, то при достаточно малом $\delta > 0$ $\delta\phi \notin R - L$. Кроме того, функция

$$\Phi(\delta) = \int\limits_0^T e^{i\delta\phi(t)}\,dt$$

в этом случае является целой, $\Phi(0) \neq 0$ и, значит, она имеет не более счётного числа нулей и все нули изолированные.

Наличие бесконечного числа вещественных нулей можно иногда доказать с помощью следующего предложения.

Лемма 3.1. *Если $g \in L(\mathbb{R})$ и имеет хотя бы одну точку разрыва, которую нельзя устранить исправлением функции на множестве нулевой лебеговой меры, то её преобразование Фурье $\hat{g} \notin L(\mathbb{R})$. А если вещественная чётная функция $g \in L(\mathbb{R})$ и ограничена в некоторой окрестности нуля, а $\hat{g} \notin L(\mathbb{R})$, то в любой окрестности ∞ непрерывная функция $\hat{g}$ меняет знак бесконечное число раз.*

Доказательство. Если g и $\hat{g} \in L(\mathbb{R})$, то почти всюду имеет место формула обращения

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(y)e^{ixy}\,dy, \qquad \hat{g}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-ixy}\,dx$$

(см., напр., [3, 1.21]). Поэтому g может отличаться от непрерывной функции лишь на множестве нулевой меры.

Если ещё функция g вещественная и чётная, то и $\hat{g}$ такая же. Предположим, что в некоторой окрестности ∞ функция $\hat{g}$ сохраняет знак. Тогда $|\hat{g}| - \hat{g} \in L(\mathbb{R})$ и в силу одного из свойств преобразования Фурье (см. [2, 3.1.15]) и $\hat{g} \in L(\mathbb{R})$(в более слабой форме это свойство имеется в [3, 1.26]). Противоречие.

Лемма доказана. □

Заметим, что разрыв нельзя устранить в указанном смысле, если, напр., в точке существуют различные односторонние пределы или хотя бы один односторонний предел бесконечный.

Пример. Функция Бесселя порядка $\lambda > -\frac{1}{2}$

$$J_\lambda(x) = c\cdot x^\lambda \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{itx}\, dt.$$

Лемма применима при $\lambda \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. А воспользовавшись формулой $J_{\lambda+1}(x) = -x^\lambda (x^{-\lambda} J_\lambda(x))'$ и теоремой Ролля, сразу получаем, что при любом $\lambda > -\frac{1}{2}$ функция J_λ имеет бесконечное число изолированных вещественных нулей. Этот факт известен, конечно.

Применим теперь лемму для построения новых примеров на основе теоремы 1.3.

Пусть $\phi(+0) = \phi(0) = 0, \phi \in C'(0, \frac{\pi}{2}],\ \phi'(t) > 0$ при $t \in (0, \frac{\pi}{2}),\ \phi(\pi - t) = \phi(t)$ при $t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \phi(t+\pi) = -\phi(t)$ при $t \in [0,\pi]$ и при $t \in \mathbb{R}$ $\phi(t+2\pi) = \phi(t)$. Например, $\phi(t) = |\sin t|^r \operatorname{sign}\sin t,\ r > 0$. При каких $\delta \in \mathbb{R}$ $\delta\phi \in R - L$?

$$0 = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\delta\phi(t)}\, dt = 2\int\limits_0^{\pi} \cos(\delta\phi(t))\, dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\delta\phi(t))\, dt.$$

После замены $x = \phi(t)$ получаем

$$\int\limits_0^{\phi(\frac{\pi}{2})} \frac{\cos\delta x}{\phi'(\phi^{-1}(x))}\, dx = 0. \tag{3.5}$$

Функция $g(x) = (\phi'(\phi^{-1}(|x|)))^{-1}$ при $|x| \le \phi(\frac{\pi}{2})$ и $g(x) = 0$ при $|x| > \phi(\frac{\pi}{2})$ удовлетворяет условиям леммы, так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx = 2\int\limits_0^{\phi(\frac{\pi}{2})} g(x)\, dx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi,$$

$g(\phi(\frac{\pi}{2}) + 0) = 0$, а

$$g(\phi(\frac{\pi}{2}) - 0) = \lim_{x\to\phi(\frac{\pi}{2})-0} g(x) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\phi'(t)} = \frac{1}{\phi'(\frac{\pi}{2}-0)} \ne 0.$$

Следовательно, $\delta\phi \in R - L$ для некоторой бесконечной последовательности изолированных чисел, удовлетворяющих условию (3.5).

III) Рассмотрим теперь ту же задачу (см. начало статьи) для любого промежутка $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Обозначим через $(R-L)(a,b)$ множество вещественных функций ϕ таких, что для любой функции $f \in L(a,b)$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_a^b f(t)e^{i\phi(\lambda t)}\,dt = 0. \tag{3.6}$$

Пусть сначала $0 \le a < b \le +\infty$, $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Очевидно, что $(R-L)(\mathbb{R}_+) \subset (R-L)(a,b)$ (это общий факт для любого измеримого подмножества) . На самом деле, эти два множества функций ϕ совпадают.

Действительно, если $\phi \in (R-L)(a,b)$, то для индикатора интервала (a,c) при $c \in (a,b)$

$$0 = \lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_a^c e^{i\phi(\lambda t)}\,dt = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\lambda a}^{\lambda c} e^{i\phi(x)}\,dx = c\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int\limits_{\frac{a}{c}R}^{R} e^{i\phi(x)}\,dx$$

и можно применить теорему 1.1 при $\delta = \frac{a}{c} \in [0,1)$.

При $-\infty \le a < b \le 0$, как следует из предыдущего после замены t на $-t$, $(R-L)(a,b) = (R-L)(\mathbb{R}_-)$. Здесь $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ и $\phi : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$.

Остался случай $a < 0 < b$, а $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

В этом случае (первое и последнее равенства очевидны, а среднее равенство следует из предыдущего)

$$\begin{aligned}(R-L)(a,b) &= (R-L)(a,0) \cap (R-L)(0,b)\\ &= (R-L)(\mathbb{R}_-) \cap (R-L)(\mathbb{R}_+) = (R-L)(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы $\phi \in (R-L)(a,b)$, где $a < 0 < b$, необходимо и достаточно:

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\left(\left|\int\limits_{-R}^{0} e^{i\phi(t)}\,dt\right| + \left|\int\limits_0^R e^{i\phi(t)}\,dt\right|\right) = 0. \tag{3.7}$$

При этом в соотношении (3.6) можно считать дополнительно, что $\lambda \to -\infty$ (замена λ на $-\lambda$ и t на $-t$). А если ϕ чётная или нечётная, то два предела в (3.7) можно заменить одним из них.

Литература

[1] R. M. Trigub, *Some Topics in Fourier Analysis and Approximation of Theory. Fourier series methods in complex analysis* // (Mekrijärvi, 2005). Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser. (2006), N 10, 159–185.

[2] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions.* Kluwer–Springer. 2004, 585 p.

[3] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* М.: Мир, 1974, 332 с.

Сведения об авторах

Роальд Михайлович Тригуб

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: roald@ukrpost.ua