Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 3, 293 – 304

О краевых задачах для обыкновенного дифференциального оператора с матричными коэффициентами

Анна В. Агибалова

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Рассматривается краевая задача для дифференциального оператора n-го порядка с матричными коэффициентами и разделенными граничными условиями и доказывается полнота системы собственных и присоединенных функций этой задачи в пространстве $L_2([0,1],\ \mathbb{C}^p)$.

2000 MSC. 34L10.

Ключевые слова и фразы. Дифференциальный оператор, краевая задача, собственные и присоединенные функции, полнота.

В пространстве вектор-функций $L_2([0,1],\ \mathbb{C}^p)$ рассмотрим граничную задачу, порожденную дифференциальным уравнением

$$l(y) := y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) y^{(k)} = \lambda y \tag{1}$$

и распадающимися нормированными краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} A_{jk} y^{(k)}(0) = I_p y^{(k_j)}(0) + \sum_{k=0}^{k_j-1} A_{jk} y^{(k)}(0) = 0, \qquad j \in \{1,\dots,l\}, \tag{2}$$

Статья поступила в редакцию 13.09.2008

$$U_j(y)=\sum_{k=0}^{n-1}B_{jk}y^{(k)}(1)=I_py^{(k_j)}(1)+\sum_{k=0}^{k_j-1}B_{jk}y^{(k)}(1)=0,$$
$$j\in\{l+1,\ldots,n\}. \quad (3)$$

Здесь

$$y=\mathrm{col}(y_1,\ldots,y_p),$$
$$n-1\geqslant k_1>k_2>\cdots>k_l\geqslant 0,$$
$$n-1\geqslant k_{l+1}>k_{l+2}>\cdots>k_n\geqslant 0,$$

$P_k(x)$ — $(p\times p)$ матрицы-функции, A_{jk} и $B_{jk}\in\mathbb{C}^{p\times p}$, $k\in\{0,\ldots,n-1\}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, I_p — единичная матрица порядка p. При этом предполагается, что граничные условия линейно независимы и $l>n-l>0$. Заметим, что распадающиеся краевые условия являются регулярными тогда и только тогда, когда $l=n-l$. Если же $l\neq n-l$, то функция Грина соответствующей задачи может иметь экспоненциальный рост по любому направлению комплексной плоскости. В случае $p=1$ полнота системы собственных и присоединенных функций задачи (1)–(3) впервые была анонсирована М. В. Келдышем [1], а доказана А. А. Шкаликовым [7]. В случае аналитических коэффициентов этот же результат был получен А. П. Хромовым. Граничным задачам с матричными коэффициентами посвящена работа Л. М. Лужиной [2]. В данной работе доказательство основного результата ведется по схеме, предложенной А. А. Шкаликовым [7], а также используются операторы преобразования.

Теорема 1. *Пусть $P_k(x)$ — целые аналитические матрицы-функции, $k\in\{0,\ldots,n-1\}$. Тогда система собственных и присоединенных функций граничной задачи* (1)–(3) *полна в пространстве $L_2([0,1],\mathbb{C}^p)$.*

Доказательство. Положим $\lambda=\rho^n$, тогда уравнение $l(y)=\lambda y$ перепишется в виде
$$l(y)=\rho^n y. \quad (4)$$

Рассмотрим матричное уравнение
$$Y^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-1}P_k(x)Y^{(k)}=\rho^nY. \quad (5)$$

(Y — $(p\times p)$-матрица-функция.)

Известно (см. [4, п°2 §8]), что в каждом секторе S раствора $\frac{\pi}{n}$ комплексной плоскости существует фундаментальная система решений $\{Y_k(x,\rho)\}_{k=1}^n$ уравнения (5), аналитическая по ρ в секторе S и при достаточно большом $|\rho|$ имеющая асимптотику

$$
\begin{gathered}
Y_k = e^{\rho\omega_k x}\Big(I_p + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big),\\
\frac{dY_k}{dx} = \rho e^{\rho\omega_k x}\Big(\omega_k I_p + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big),\\
\dots\\
\frac{d^{n-1}Y_k}{dx^{n-1}} = \rho^{n-1} e^{\rho\omega_k x}\Big(\omega_k^{n-1} I_p + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big).
\end{gathered}
\tag{6}
$$

При этом ω_k — корни n-й степени из 1, $O(\frac{1}{\rho})$ обозначает матрицу вида $\frac{A(x,\rho)}{\rho}$, где $A(x,\rho)$ — матричная функция, все элементы которой удовлетворяют неравенству $|A_{ij}(x,\rho)| \leqslant M$ при $|\rho| \geqslant R$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, а M и R — некоторые постоянные, не зависящие от x.

В дальнейшем все рассуждения проводятся в фиксированном секторе S. Общее векторное решение уравнения (4) имеет вид

$$
y = Y_1 c_1 + \dots + Y_n c_n,
$$

где c_j — произвольные постоянные векторы из $\mathbb{C}^p$, $j \in \{1,\dots n\}$.

Пусть $\{\Phi_j(x,\rho)\}_{j=1}^n$ — фундаментальная система $(p\times p)$-матричных решений уравнения (5), удовлетворяющая начальным условиям

$$
\Phi_j^{(\nu-1)}(0,\rho) = \delta_{\nu j} I_p, \quad j,\nu \in \{1,\dots,n\}, \tag{7}
$$

где $\delta_{\nu j}$ — символ Кронекера. Тогда в секторе S справедливы представления

$$
\Phi_j(x,\rho) = \sum_{k=1}^{n} Y_k(x,\rho) C_{jk}(\rho), \quad \rho \in S, \quad j \in \{1,\dots,n\}, \tag{8}
$$

где $C_{jk}(\rho)$ — $(p\times p)$-матрицы. Равенство (8) можно записать в блочноматричном виде

$$
(\Phi_1 \dots \Phi_n) = (Y_1 \dots Y_n)\begin{pmatrix} C_{11}(\rho) & C_{12}(\rho) & \dots & C_{1n}(\rho)\\ C_{21}(\rho) & C_{22}(\rho) & \dots & C_{2n}(\rho)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ C_{n1}(\rho) & C_{n2}(\rho) & \dots & C_{nn}(\rho)\end{pmatrix}^T, \tag{9}
$$

где символ T означает транспонирование матрицы. Обозначим

$$
C(\rho) := \begin{pmatrix} C_{11}(\rho) & C_{12}(\rho) & \dots & C_{1n}(\rho)\\ C_{21}(\rho) & C_{22}(\rho) & \dots & C_{2n}(\rho)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ C_{n1}(\rho) & C_{n2}(\rho) & \dots & C_{nn}(\rho)\end{pmatrix}.
$$

Следуя [4, п°9 $4], введем для краткости обозначение

$$[A] = A + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big).$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Элементы матрицы $C(\rho)$ имеют вид*

$$C_{kj}(\rho) = \frac{\overline{\omega_j}^{k-1}}{n\rho^{k-1}}\,[I_p], \qquad k, j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{10}$$

Доказательство. Найдем $C_{kj}(\rho)$ для произвольного фиксированного k, $k, j \in \{1, \ldots, n\}$. Подставляя (8) в (7) и учитывая асимптотику (6), получим систему матричных уравнений для $C_{kj}(\rho)$, где $\mathbf{0_p}$ обозначает нулевую $(p \times p)$-матрицу:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \big(I_p + O\big(\frac{1}{\rho}\big)\big) C_{kj}(\rho) & = \mathbf{0_p}, \\ \ldots & \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \rho^{k-1}\big(\omega_j^{k-1} I_p + O\big(\frac{1}{\rho}\big)\big) C_{kj}(\rho) & = I_p, \quad \overleftarrow{k\text{-я строка}} \\ \ldots & \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \rho^{n-1}\big(\omega_j^{n-1} I_p + O\big(\frac{1}{\rho}\big)\big) C_{kj}(\rho) & = \mathbf{0_p}. \end{cases} \tag{11}$$

Разделив каждую строку системы (11) на ρ в соответствующей степени, приходим к системе

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(I_p + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) C_{kj}(\rho) & = \mathbf{0_p}, \\ \ldots & \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\omega_j^{k-1} I_p + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) C_{kj}(\rho) & = \frac{I_p}{\rho^{k-1}}, \quad \overleftarrow{k\text{-я строка}} \\ \ldots & \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\omega_j^{n-1} I_p + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) C_{kj}(\rho) & = \mathbf{0_p}, \end{cases}$$

или в блочно-матричном виде

$$\begin{pmatrix} [I_p] & \ldots & [I_p] & \ldots & [I_p] \\ \vdots & & & & \\ \omega_1^{k-1}[I_p] & \ldots & \omega_k^{k-1}[I_p] & \ldots & \omega_n^{k-1}[I_p] \\ \vdots & & & & \\ \omega_1^{n-1}[I_p] & \ldots & \omega_k^{n-1}[I_p] & \ldots & \omega_n^{n-1}[I_p] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{k1}(\rho) \\ \vdots \\ C_{kk}(\rho) \\ \vdots \\ C_{kn}(\rho) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0_p} \\ \vdots \\ \frac{1}{\rho^{k-1}} I_p \\ \vdots \\ \mathbf{0_p} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Обозначим

$$W := \begin{pmatrix} [I_p] & \dots & [I_p] & \dots & [I_p] \\ \vdots & & & & \\ \omega_1^{k-1}[I_p] & \dots & \omega_k^{k-1}[I_p] & \dots & \omega_n^{k-1}[I_p] \\ \vdots & & & & \\ \omega_1^{n-1}[I_p] & \dots & \omega_k^{n-1}[I_p] & \dots & \omega_n^{n-1}[I_p] \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (12) можно переписать в виде

$$W \cdot \begin{pmatrix} C_{k1}(\rho) \\ \vdots \\ C_{kk}(\rho) \\ \vdots \\ C_{kn}(\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0_p} \\ \vdots \\ \frac{1}{\rho^{k-1}} I_p \\ \vdots \\ \mathbf{0_p} \end{pmatrix}.$$

Умножая на обратную к W матрицу, получаем

$$\begin{pmatrix} C_{k1}(\rho) \\ \vdots \\ C_{kk}(\rho) \\ \vdots \\ C_{kn}(\rho) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} [I_p] & \overline{\omega_1}[I_p] & \dots & \overline{\omega_1}^{k-1}[I_p] & \dots & \overline{\omega_1}^{n-1}[I_p] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [I_p] & \overline{\omega_k}[I_p] & \dots & \overline{\omega_k}^{k-1}[I_p] & \dots & \overline{\omega_k}^{n-1}[I_p] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [I_p] & \overline{\omega_n}[I_p] & \dots & \overline{\omega_n}^{k-1}[I_p] & \dots & \overline{\omega_n}^{n-1}[I_p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0_p} \\ \vdots \\ \frac{1}{\rho^{k-1}} I_p \\ \vdots \\ \mathbf{0_p} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{\overline{\omega_1}^{k-1}}{\rho^{k-1}}\left(I_p + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \\ \vdots \\ \frac{\overline{\omega_n}^{k-1}}{\rho^{k-1}}\left(I_p + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{n\rho^{k-1}} \begin{pmatrix} \overline{\omega_1}^{k-1}[I_p] \\ \vdots \\ \overline{\omega_n}^{k-1}[I_p] \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $C(\rho)$ имеет вид

$$C(\rho)=\frac{1}{n}\begin{pmatrix} [I_p] & \dots & [I_p] \\ \frac{\overline{\omega}_1}{\rho}[I_p] & \dots & \frac{\overline{\omega}_n}{\rho}[I_p] \\ \frac{\overline{\omega}_1^2}{\rho^2}[I_p] & \dots & \frac{\overline{\omega}_n^2}{\rho^2}[I_p] \\ \vdots & & \\ \frac{\overline{\omega}_1^{n-1}}{\rho^{n-1}}[I_p] & \dots & \frac{\overline{\omega}_n^{n-1}}{\rho^{n-1}}[I_p] \end{pmatrix}.$$

□

Пусть

$$\begin{aligned} A(\rho;\Phi) &:= \begin{pmatrix} U_1(\Phi_1) & \dots & U_1(\Phi_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(\Phi_1) & \dots & U_n(\Phi_n) \end{pmatrix}, \\ A(\rho;Y) &:= \begin{pmatrix} U_1(Y_1) & \dots & U_1(Y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(Y_1) & \dots & U_n(Y_n) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13}$$

Из (9) и (13) следует, что

$$A(\rho;\Phi)=A(\rho;Y)C^T(\rho). \tag{14}$$

Тогда характеристические определители $\Delta(\rho;\Phi)$ и $\Delta(\rho;Y)$ связаны соотношением

$$\Delta(\rho;\Phi)=\Delta(\rho;Y)\det C(\rho).$$

С помощью (10) нетрудно вычислить, что

$$\det C(\rho)=\frac{1}{n}\rho^{-\frac{pn(n-1)}{2}}[M_1],$$

где константа M_1 зависит от $\overline{\omega_1},\dots,\overline{\omega_n}$ и $M_1\neq 0$. Таким образом, получаем связь между характеристическими определителями

$$\Delta(\rho;\Phi)=\rho^{-\frac{pn(n-1)}{2}}[M_1]\Delta(\rho;Y). \tag{15}$$

Вычислим $\Delta(\rho;Y)$. Занумеруем (см. [4, п°2 §4]) $\omega_1,\dots,\omega_n$ так, чтобы в секторе S выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\rho\omega_1)<\operatorname{Re}(\rho\omega_2)<\dots<\operatorname{Re}(\rho\omega_{n-s})<0 \\ <\operatorname{Re}(\rho\omega_{n-s+1})<\dots<\operatorname{Re}(\rho\omega_n). \end{aligned} \tag{16}$$

Далее асимптотику (6) подставляем в $\Delta(\rho;Y)$ и из каждой строки выносим ρ в соответствующей степени:

$$\Delta(\rho;Y)=\rho^{p(k_1+\ldots+k_n)}\begin{vmatrix} \omega_1^{k_1}[I_p] & \ldots & \omega_n^{k_1}[I_p] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \omega_1^{k_{l+1}}e^{\rho\omega_1}[I_p] & \ldots & \omega_n^{k_{l+1}}e^{\rho\omega_n}[I_p] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \omega_1^{k_n}e^{\rho\omega_1}[I_p] & \ldots & \omega_n^{k_n}e^{\rho\omega_n}[I_p] \end{vmatrix}.$$

Обозначим $k_1+\cdots+k_n=:\varkappa$.

Полученный определитель раскладываем по последним $n-l$ строкам. При этом согласно (16) старший минор в полученном разложении с точностью до знака имеет вид

$$\begin{vmatrix} \omega_{l+1}^{k_{l+1}}e^{\rho\omega_{l+1}}[I_p] & \ldots & \omega_n^{k_{l+1}}e^{\rho\omega_n}[I_p] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \omega_{l+1}^{k_n}e^{\rho\omega_{l+1}}[I_p] & \ldots & \omega_n^{k_n}e^{\rho\omega_n}[I_p] \end{vmatrix}$$
$$=e^{p\rho(\omega_{l+1}+\cdots+\omega_n)}\begin{vmatrix} \omega_{l+1}^{k_{l+1}}[I_p] & \ldots & \omega_n^{k_{l+1}}[I_p] \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \omega_{l+1}^{k_n}[I_p] & \ldots & \omega_n^{k_n}[I_p] \end{vmatrix}$$
$$=[M_2]e^{p\rho\sum\limits_{j=l+1}^{n}\omega_j}=:[M_2]e^{p\rho\tilde{\omega}}.$$

Возвращаясь к равенству (15), получаем

$$\Delta(\rho;\Phi)=[M_3]\rho^{p(\varkappa-\frac{n(n-1)}{2})}e^{p\rho\tilde{\omega}}. \tag{17}$$

Определение 1. *Пусть λ_0 — собственное значение оператора L и Z_0 — соответствующий собственный вектор (т.е. $(L-\lambda_0)Z_0=0$). Говорят, что система функций $\{Z_j(x,\lambda)\}_{j=1}^k$ образует цепочку собственной $Z_0(x,\lambda)$ и присоединенных функций, соответствующих собственному значению λ_0, если*

a) $\left[\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{j!}D_\lambda^j l(D)(Z_{i-j}(x,\lambda))\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0}=0, \quad i\in\{1,\ldots,k\},$

b) каждая функция $Z_j(x,\lambda)$, $j\in\{1,\ldots,k\}$, удовлетворяет граничным условиям (2)–(3).

Лемма 2. *Пусть $\sigma(L)=\{\rho_m\}_1^\infty$ — множество нулей целой функции $\Delta(\rho;\Phi)$ и пусть ν_m — кратность нуля ρ_m. Обозначим $\Delta_j(x,\rho;\Phi)$, $j\in\{1,\ldots,pn\}$, определитель, полученный заменой j-ой* *строки характеристического определителя* $\Delta(\rho;\Phi)$ *столбцами матриц* Φ_k, $k\in\{1,\ldots,n\}$. *Тогда для каждого* $j\in\{1,\ldots,pn\}$ *система функций*

$$\Delta_j(x,\rho_m;\Phi),\ D_\rho\Delta_j(x,\rho;\Phi)|_{\rho=\rho_m},\ldots,\frac{1}{(\nu_m-1)!}D_\rho^{\nu_m-1}\Delta_j(x,\rho;\Phi)|_{\rho=\rho_m}$$

образует ССПФ, соответствующую $\rho_m\in\sigma(L)$.

Обозначим через $A_j(x,\rho;Y)$ матрицу, полученную заменой j-ой строки $A(\rho;Y)$ столбцами матриц Y_k, $k\in\{1,\ldots,n\}$, $j\in\{pl+1,\ldots,pn\}$. Тогда матрицы $A_j(x,\rho;\Phi)$ и $A_j(x,\rho;Y)$ связаны тем же соотношением (14), что и матрицы $A(\rho;\Phi)$ и $A(\rho;Y)$. Отсюда их определители $\Delta_j(x,\rho;\Phi)$ и $\Delta_j(x,\rho;Y)$ связаны (подобно (15)) равенством

$$\Delta_j(x,\rho;\Phi)=[M_1]\rho^{\frac{pn(n-1)}{2}}\Delta_j(x,\rho;Y),\quad j\in\{pl+1,\ldots,pn\},\tag{18}$$

откуда

$$\frac{\Delta_j(x,\rho;\Phi)}{\Delta(\rho;\Phi)}=[1]\frac{\Delta_j(x,\rho;Y)}{\Delta(\rho;Y)}.\tag{19}$$

Асимптотические оценки

$$\Delta_j(x,\rho;Y)=\rho^{p\varkappa-k_j}e^{p\rho\tilde{\omega}}e^{\rho\omega_{l+1}(x-1)}\begin{pmatrix}B_1\bigl(1+O\bigl(\frac{1}{\rho}\bigr)\bigr)\\ \vdots\\ B_p\bigl(1+O\bigl(\frac{1}{\rho}\bigr)\bigr)\end{pmatrix},$$
$$j\in\{pl+1,\ldots,pn\}\tag{20}$$

($B_1,\ldots,B_p$ — константы, не зависящие от ρ и x) получаются как и оценка для $\Delta(\rho;Y)$.

Пусть вектор-функция $g(x)=(g_1(x),\ldots,g_p(x))$, $g_k(x)\in L_2[0,1]$, $k\in\{1,\ldots,p\}$, ортогональна ССПФ задачи (5), (2)–(3). Рассмотрим целые функции

$$\Upsilon_j(\rho):=\int_0^1 g(x)\Delta_j(x,\rho;\Phi)\,dx,\qquad j\in\{pl+1,\ldots,pn\}.\tag{21}$$

Покажем, что $\Upsilon_j(\rho)\equiv 0$, $j\in\{pl+1,\ldots,pn\}$. Поскольку

$$D_\rho^r\Upsilon_j(\rho)|_{\rho=\rho_m}=0,\qquad \rho_m\in\sigma(L),\ r\in\{0,1,\ldots,\nu_m-1\},$$

то функция

$$G_j(\rho):=\frac{\Upsilon_j(\rho)}{\Delta(\rho;\Phi)},\qquad j\in\{pl+1,\ldots,pn\},$$

является целой. Поэтому чтобы показать, что $\Upsilon_j(\rho) \equiv 0$ для $j \in \{pl+1, \dots, pn\}$, достаточно доказать, что $G_j(\rho) \equiv 0,\ j \in \{pl+1, \dots, pn\}$.

С учетом (19)

$$\frac{\Delta_j(x,\rho;\Phi)}{\Delta(\rho;\Phi)} = [M_4]\rho^{-k_j} e^{\rho\omega_{l+1}(x-1)} \begin{pmatrix} A_1\left(1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \\ \vdots \\ A_p\left(1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \end{pmatrix}, \quad j \in \{pl+1, \dots, pn\}. \tag{22}$$

Учитывая (18), неравенство $\operatorname{Re}(\rho\omega_{l+1}) > 0$, $x \in (0,1)$, и применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |G_j(\rho)| &= \left| \int_0^1 \overline{g(x)} \frac{\Delta_j(x,\rho;\Phi)}{\Delta(\rho;\Phi)}\, dx \right| \\ &\leqslant |[M_4]| \cdot |\rho|^{-k_j} \int_0^1 \left|e^{\rho\omega_{l+1}(x-1)}\right| \left| \sum_{k=1}^p \overline{g_k(x)} [A_k] \right| dx \\ &\leqslant [M_5] |\rho|^{-k_j} \left(\int_0^1 e^{2(x-1)\operatorname{Re}(\rho\omega_{l+1})}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{[M_5]|\rho|^{-k_j}}{\sqrt{2\operatorname{Re}(\rho\omega_{l+1})}} \left(1 - e^{-2\operatorname{Re}(\rho\omega_{l+1})}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь

$$M_5 = |[M_4]| \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^p \overline{g_k(x)} [A_k] \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\overline{g(x)} = \left(\overline{g_1(x)}, \dots, \overline{g_p(x)}\,\right).$$

Очевидно, что $|G_j(\rho)| \to 0,\ |\rho| \to \infty,\ \rho \in S,\ j \in \{pl+1, \dots, pn\}$. Из теоремы Фрагмена–Линделёфа и теоремы Лиувилля следует, что $G_j(\rho) \equiv 0,\ j \in \{pl+1, \dots, pn\}$, откуда

$$\int_0^1 \overline{g(x)} \Delta_j(x,\rho;\Phi)\, dx \equiv 0, \qquad j \in \{pl+1, \dots, pn\}. \tag{23}$$

Пусть $\Psi_1(x,\rho), \dots, \Psi_n(x,\rho)$ — фундаментальная система решений матричного уравнения (5), удовлетворяющая условиям

$$\frac{d^{k-1}}{dx^k}\Psi_s(0,\rho) = T_{ks}, \qquad k,s \in \{1,\dots,n\}, \tag{24}$$

при этом числовые матрицы T_{ks} выбраны таким образом, что матрицы-функции $\Psi_1(x,\rho),\dots,\Psi_{n-l}(x,\rho)$ удовлетворяют всем краевым условиям (2), а матрицы-функции $\Psi_{n-l+k}(x,\rho)$, $k \in \{1,\dots,n-l+1\}$, удовлетворяют всем краевым условиям (2), кроме краевого условия при $j = k$, причем $U_k(\Psi_{n-l+k}) = D_{n-l+k}$, где D_{n-l+k} — некоторые диагональные матрицы. Тогда $\Delta_j(x,\rho;\Phi)$ можно представить в виде линейной комбинации столбцов $\Psi^s_m(x,\rho)$ матриц $\Psi_s(x,\rho)$, $s \in \{1,\dots,n\}$, $m \in \{1,\dots,p\}$, $j \in \{pl+1,\dots,pn\}$:

$$\Delta_j(x,\rho;\Phi) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{p} q^j_{sm}(\rho)\Psi^s_m(x,\rho) = \sum_{s=1}^{n-l}\sum_{m=1}^{p} q^j_{sm}(\rho)\Psi^s_m(x,\rho), \tag{25}$$

так как $q^j_{sm} \equiv 0$ при $s > n-l$, что следует из свойств выбранной фундаментальной системы и выполнения для функций $\Delta_j(x,\rho;\Phi)$ всех краевых условий в нуле , $j \in \{pl+1,\dots,pn\}$. Очевидно, определитель

$$\begin{vmatrix} q^{pl+1}_{11}(\rho)\dots q^{pl+1}_{1p}(\rho) & q^{pl+1}_{21}(\rho)\dots q^{pl+1}_{2p}(\rho)\dots q^{pl+1}_{n-l,1}(\rho)\dots q^{pl+1}_{n-l,p}(\rho) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q^{pn}_{11}(\rho)\ \dots\ q^{pn}_{1p}(\rho) & q^{pn}_{21}(\rho)\ \dots\ q^{pn}_{2p}(\rho)\ \dots q^{pn}_{n-l,1}(\rho)\dots q^{pn}_{n-l,p}(\rho) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, принимая во внимание (23), получаем

$$\int_0^1 \overline{g(x)}\Psi^j_m(x,\rho)\,dx \equiv 0, \quad j \in \{pl+1,\dots,pn\},\ m \in \{1,\dots,p\}. \tag{26}$$

С другой стороны, матричные решения $\Psi_1(x,\rho),\dots,\Psi_n(x,\rho)$ с помощью оператора преобразования (см. [5], а также [3]) допускают представление

$$\Psi_s(x,\rho) = (I+K)Z_s = Z_s(x,\rho) + \int_0^x K(x,t)Z_s(t,\rho)\,dt, \quad s \in \{1,\dots,n\}, \tag{27}$$

где $Z_s(x,\rho)$ — решения простейшего уравнения вида (5) (т.е. $P_k(x) \equiv$

$0,\ k \in \{0,\dots,n-1\}$) с теми же начальными условиями (24). Имеем

$$\overrightarrow{0} = \int\limits_0^1 \Psi_j(x,\rho)\overline{g(x)}^T\,dx$$

$$= \int\limits_0^1 ((I+K)Z_j(x,\rho))\,\overline{g(x)}^T\,dx$$

$$= \int\limits_0^1 Z_j(x,\rho)\overline{h(x)}\,dx,$$

где

$$h(x) = (I+K^*)g^T = g^T(x) + \int\limits_x^1 \overline{K(t,x)}g^T(t)\,dt,$$

$\overrightarrow{0}$ — нулевой вектор-столбец высоты p. Поскольку система функций $\{Z_s(x,\rho)\}_{\rho\in S}$ полна в $L_2([0,1],\mathbb{C}^{p\times p})$, то $h(x) = \overrightarrow{0}$. Так как K^* — вольтерров оператор, то $g^T(x) = \overrightarrow{0}$. Полнота матричной системы функций $\{Z_s(x,\rho)\}_{\rho\in S}$ следует из скалярного случая. Действительно, матричные решения $Z_s(x,\rho)$ можно представить в виде

$$Z_s(x,\rho) = \sum_{k=1}^{n} T_{ks}\Phi_k(x,\rho), \quad s\in\{1,\dots,n\},$$

где T_{ks} — матрицы из условий (24). А при $k\in\{1,\dots,n\}$ набор столбцов каждой матрицы $\Phi_k(x,\rho)$ полон в пространстве $L_2([0,1],\ \mathbb{C}^p),\ \rho\in S$ (это следует из полноты системы экспонент в скалярном случае). $\square$

Литература

[1] М. В. Келдыш, *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений* // ДАН СССР, **77** (1951), N 1, 11–14.

[2] Л. М. Лужина, *Регулярные спектральные задачи в пространстве вектор-функций* // Вестник Московского ун-та. Сер. I. Математика. Механика, (1988), N 1, 31–35.

[3] М. М. Маламуд, *Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробного порядка* // Труды Моск. Матем. Общества, **55** (1994), 57–122.

[4] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Москва, 1969.

[5] Л. А. Сахнович, *Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами* // Матем. сборник, **46** (1958), 61–76.

[6] А. П. Хромов, *Разложение по собственным функциям обыкновеных дифференциальных операторов в конечном интервале* // ДАН СССР, **146** (1962), N 6 , 1294–1297.

[7] А. А. Шкаликов, *О полноте собственных и присоединённых функций обыкновенного дифференциального оператора с распадающимися краевыми условиями* // Функциональный анализ и его приложения, **10** (1976), N 4, 69–80.

Сведения об авторах

Анна Владимировна Агибалова

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
Донецк 83055,
Украина
E-Mail: AgAnnette@rambler.ru