Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 2, 258 – 279

Некоторые интерполяционные задачи в пространствах L^p, $0 < p < \infty$ на спрямляемых кривых

Сергей М. Загороднюк, Люц Клёц

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Мы изучаем некоторые интерполяционные задачи в пространствах $L^p(M)$, $0 < p < \infty$, матричнозначных функций, которые являются p-интегрируемыми относительно матричной меры M на замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ. Оказывается, что решения этих задач зависят не только от M и p, но также от расположения Γ относительно начала координат. Также мы вводим и изучаем понятия $\mathcal{J}$-регулярности и $\mathcal{J}$-сингулярности $L^p(M)$, которые аналогичны тем, которые были введены Брукнером для слабо стационарных случайных процессов.

2000 MSC. 41A65, 30E10, 60-99.

Ключевые слова и фразы. Интерполяционные задачи, матричнозначная мера, жорданова кривая.

Введение

Обозначения. Посредством $\mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}$ обозначаем, соответственно, множества комплексных, целых, неотрицательных целых и натуральных чисел. Всюду в работе n обозначает некоторое натуральное число. Посредством $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}_{n\times n}, \mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$ обозначаем, соответственно, n-мерное унитарное пространство над $\mathbb{C}$, алгебру всех комплексных $n\times n$ матриц (или, эквивалентно, алгебру всех линейных операторов в $\mathbb{C}^n$) и конус всех неотрицательно-определенных матриц из $\mathbb{C}_{n\times n}$. Для $X \in \mathbb{C}_{n\times n}$ обозначаем X^*, $\operatorname{tr} X$, $\|X\|_E := (\operatorname{tr}(X^*X))^{\frac{1}{2}}$, $\operatorname{Ker} X$, $\mathcal{R}(X)$, соответственно, сопряженную матрицу, след, евклидову норму, ядро и область значений матрицы X. Если $X \in \mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$ и $r \in (0, \infty)$, то X^r есть матрица, определяемая функциональным исчислением для эрмитовых матриц. Для подпространства $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{C}^n$ посредством $Q_{\mathcal{L}}$

Статья поступила в редакцию 23.03.2007

ISSN 1810 – 3200. © Інститут математики НАН України

обозначается ортопроектор в $\mathbb{C}^n$ на $\mathcal{L}$, а I_n обозначает единичную матрицу порядка n.

Если S есть подмножество некоторого левого $\mathbb{C}_{n\times n}$ модуля, то $\vee S$ обозначает его левую $\mathbb{C}_{n\times n}$-линейную оболочку, т.е. множество всех элементов вида $\sum_{j=1}^{l} X_j F_j,\ X_j \in \mathbb{C}_{n\times n},\ F_j \in S,\ j = 1,\ldots,l,\ l \in \mathbb{N}$.

Если S есть подмножество некоторого метрического пространства, то $\overline{S}$ означает его замыкание.

Если $p \in [1,\infty)$ то q означает следующую зависящую от p величину: $q = \frac{p}{p-1}$, если $p \in (1,\infty)$, и $q = \infty$, если $p = 1$.

Наконец, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$, любой нулевой элемент обозначается 0, а $\emptyset$ обозначает пустое множество.

Пусть Γ есть замкнутая спрямляемая кривая Жордана в комплексной плоскости, Δ — ее внутренность, Δ_o — ее внешность, $\mathfrak{L}(\Gamma)$ — σ-алгебра ее борелевских подмножеств, а γ — мера длины дуги на $\mathfrak{L}(\Gamma)$. Для $\mathbb{C}_{n\times n}^{\geq}$-значной меры M на $\mathfrak{L}(\Gamma)$ можно ввести пространство $L^p(M),\ p \in (0,\infty)$ всех $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных функций (точнее, классов эквивалентности таких функций), которые в некотором смысле p-интегрируемы относительно M, см. [1,2], а также [3]. В работе [4] мы изучили плотность множества $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных многочленов в $L^p(M)$. Если $\Gamma = \mathbb{T}$ и $p = 2$, такой вопрос естественным образом возникает в связи с линейной экстраполяцией многомерных слабо стационарных случайных последовательностей. В настоящей работе мы изучаем плотность множеств, связанных с линейной интерполяцией таких последовательностей. В этом смысле данную работу можно рассматривать как продолжение работы [4].

Первыми работами о линейной интерполяции слабо стационарных случайных последовательностей были [5] и [6] в одномерном случае, т.е. при $n = 1$, и [7–10] в многомерном случае. Если смотреть на $\mathbb{T}$ не как на кривую в $\mathbb{C}$, а как на компактную абелеву группу, то получаются обобщения интерполяционной задачи в рамках абстрактного гармонического анализа. В этом направлении существует большое количество работ, см., например, [11–16]. Все они изучают случай $p = 2$. Для $n = 1$ более общий случай $p \in (1,\infty)$ возникает в теории одномерных гармонизуемых устойчивых процессов, см. [17–19]. Обобщения на $p \in (1,\infty)$ и $n > 1$ даны в [20], однако без всякой теоретико-вероятностной интерпретации.

Для более явного описания задач, рассматриваемых в настоящей работе, введем функцию

$$J(\zeta) := \zeta I_n,\ \zeta \in \Gamma.$$

Мы будем предполагать, что мера M такова, что все функции $J^k,\ k \in \mathbb{Z}$, принадлежат левому $\mathbb{C}_{n\times n}$-модулю $L^p(M),\ p \in (0,\infty)$. Тогда можно поставить следующую задачу:

(**P**) Пусть K есть конечное, возможно пустое, подмножество множества $\mathbb{Z}$. Для каких $p \in (0,\infty)$ и для каких M множество

$$\Lambda_K := \vee\{J^k :\ k \in \mathbb{Z}\backslash K\}$$

является плотным в $L^p(M)$?

Оказывается, ответ на вопрос (**P**) зависит не только от p и M, но и от положения точки 0 относительно кривой Γ. Если $0 \in \Gamma$, то, по-видимому, трудно получить содержательные результаты. Если $0 \in \Delta_o$, то для любого $k \in \mathbb{Z}$ функция J^k аналитична на $\Delta \cup \Gamma$ и ее можно равномерно, а значит и относительно метрики пространства $L^p(M)$, приблизить $\mathbb{C}_{n\times n}$-значными многочленами. Поскольку в данном случае умножение на J есть гомеоморфизм пространства $L^p(M)$, легко доказывается, что Λ_K плотно в $L^p(M)$ тогда и только тогда, когда множество $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных многочленов плотно в $L^p(M)$. Изучению последней и некоторых родственных задач посвящена работа [4]. Наконец, если $0 \in \Delta$, то многие результаты, известные для $\mathbb{T}$, можно перенести на произвольную кривую Γ. Отметим еще, что в работе [21], которая, вероятно, является первой, в которой изучались вопросы типа (**P**) для $n = 1$, также предполагалось $0 \in \Delta$.

В первом параграфе мы напоминаем некоторые факты о пространствах $L^p(M)$. В параграфе 2 мы вначале установим, что сингулярная (относительно γ) часть меры M не влияет на ответ на вопрос (**P**). После этого, с помощью одного фундаментального результата Привалова [22] мы докажем лемму 2.1, которая будет исходным пунктом почти всех рассуждений данной работы. Из этой леммы следует плотность множества $\Lambda_\emptyset$ в $L^p(M)$. Тогда легко доказывается, что для $p \in (0,1)$ и $0 \in \Delta$ множество Λ_K всегда плотно в $L^p(M)$.

Если $p \in [1,\infty)$, ответ на (**P**) не так прост. Поскольку $L^p(M),\ p \in [1,\infty)$ является банаховым пространством, то в нашем распоряжении теория дуальных пространств. Кроме того, оказывается полезным введение второй шкалы банаховых пространств, которые определяются с помощью так называемого интеграла Хеллингера.Для случая $p = 2$ такой метод был предложен в [10, 23] и усовершенствован в [12,16]. Перенесение на случай $p \in (1, \infty)$ дано в [20]. Все эти работы относятся к случаю, когда Γ имеет групповую структуру. В третьем параграфе данной работы мы доказываем аналогичные результаты для жордановой кривой Γ.

Обобщая понятия линейной регулярности и линейной сингулярности слабо стационарных случайных процессов, Брукнер [24] ввел понятия $\mathcal{J}$-регулярности и $\mathcal{J}$-сингулярности, где $\mathcal{J}$ есть какое-то семейство подмножеств множества параметров процесса. По аналогии, в параграфе 4 мы введем понятия $\mathcal{J}$-регулярности и $\mathcal{J}$-сингулярности пространства $L^p(M)$. Для двух специальных семейств $\mathcal{J}$, а именно, для множества всех одноточечных подмножеств и для множества всех конечных подмножеств множества $\mathbb{Z}$, мы установим критерии $\mathcal{J}$-регулярности.

Поскольку на $\mathbb{T}$ функция J^k совпадает с $(J^*)^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$, то существует другое разумное обобщение интерполяционной задачи:

($\widetilde{\mathbf{P}}$) Пусть K — конечное подмножество множества $\mathbb{N}_0$ и $\tilde{K}$ — конечное подмножество множества $\mathbb{N}$, причем K и/или $\tilde{K}$ могут быть пустыми. Для каких $p \in (0, \infty)$ и для каких M множество

$$\vee\{J^k : \ k \in \mathbb{N}_0 \backslash K\} + \vee\{(J^*)^k : \ k \in \mathbb{N} \backslash \tilde{K}\}$$

плотно в $L^p(M)$?

Пятый параграф содержит некоторые частичные ответы на поставленный вопрос. При этом основная идея решения отличается от метода параграфов 2–4 и совпадает с методом в [4]. В самом деле, многие результаты могут быть получены в этом случае из соответствующих фактов для $\mathbb{T}$ путем конформного отображения.

Отметим, наконец, что результаты настоящей работы с некоторыми очевидными изменениями остаются верными для несколько более общих пространств $L^p(M; \mathbb{C}_{m \times n}; \| \cdot \|)$, определенных в [4, параграф 3].

1. Пространства $L^p(M)$

В этом параграфе мы кратко приведем основные факты о пространствах $L^p(M)$. Несколько более подробное введение в теорию этих пространств дано в [4, параграф 3].

Пусть Γ — замкнутая спрямляемая кривая Жордана и M есть $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значная мера на $\mathfrak{L}(\Gamma)$. Выбираем какую-нибудь регулярную неотрицательную σ-конечную меру σ на $\mathfrak{L}(\Gamma)$, относительно которой M абсолютно непрерывна. Тогда производная Радона–Никодима $\frac{dM}{d\sigma}$ будет $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значной функцией, интегрируемой относительно σ.

Если $p \in (0, \infty)$, то посредством $L^p(M)$ обозначается пространство всех (классов эквивалентности) функций $F : \Gamma \to \mathbb{C}_{n\times n}$ таких, что функция $F\left(\frac{dM}{d\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}$ измерима и

$$|||F|||_p := \left(\int\limits_\Gamma \left\| F\Big(\frac{dM}{d\sigma}\Big)^{\frac{1}{p}} \right\|_E^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Кроме того, посредством $L^\infty(M)$ обозначим пространство всех (классов эквивалентности) функций $F : \Gamma \to \mathbb{C}_{n\times n}$ таких, что функция $FQ_{\mathcal{R}(\frac{dM}{d\sigma})}$ измерима и

$$|||F|||_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_\sigma \|FQ_{\mathcal{R}(\frac{dM}{d\sigma})}\|_E < \infty.$$

При этом $\operatorname{ess\,sup}_\sigma$ означает существенную верхнюю грань относительно меры σ.

Можно доказать, что определение этих пространств не зависит от выбора меры σ. Напомним, что $L^p(M)$ является левым $\mathbb{C}_{n\times n}$-модулем, т.е. из $X \in \mathbb{C}_{n\times n}$ и $F \in L^p(M)$ следует $XF \in L^p(M)$. Если $p \in (0, 1)$, то $L^p(M)$ есть пространство Фреше относительно метрики $|||F - G|||_p^p,\ F, G \in L^p(M)$. Если $p \in [1, \infty]$, оно является банаховым пространством с нормой $||| \cdot |||_p$. Подобно скалярному случаю, для $p \in [1, \infty)$ можно описать дуальное пространство.

Лемма 1.1 (ср. [4, лемма 3.3]). *Пусть $p \in [1, \infty)$. Тогда для каждой функции $G \in L^q(M)$ посредством*

$$F \to \operatorname{tr} \int\limits_\Gamma F \frac{dM}{d\sigma} G^* d\sigma,\ F \in L^p(M), \tag{1.1}$$

определяется ограниченный линейный функционал на $L^p(M)$. Обратно, каждый такой функционал имеет вид (1.1)*. При этом норма функционала равна $|||G|||_q$.*

Если $F \in L^p(M)$ и $G \in L^q(M)$ такие, что $\int_\Gamma F\frac{dM}{d\sigma}G^* d\sigma = 0$, то пишем $F \perp G$, а если S есть подмножество пространства $L^p(M)$, то определим $S^\perp := \{G \in L^q(M) :\ F \perp G \text{ для всех } F \in S\},\ p \in [1, \infty)$.

Заметим в связи с данным определением, что условия на функцию G:

$$\int\limits_{\Gamma} F \frac{dM}{d\sigma} G^* d\sigma = 0, \text{ для всех } F \in S, \tag{1.2}$$

и

$$\operatorname{tr} \int\limits_{\Gamma} F \frac{dM}{d\sigma} G^* d\sigma = 0, \text{ для всех } F \in S, \tag{1.3}$$

являются эквивалентными в случае, когда S является подмодулем. Действительно, предположим, что (1.3) выполнено, но матрица $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^N := \int_\Gamma F \frac{dM}{d\sigma} G^* d\sigma$ для некоторого $F \in S$ имеет ненулевой элемент $a_{i_0,j_0} =: b$. Тогда для функции $F_1 := \tilde{E}F$, где $\tilde{E} = (\tilde{e}_{i,j})_{i,j=1}^N$, $\tilde{e}_{i,j} = \delta_{i,j_0}\delta_{j,i_0}$, матрица A будет содержать единственный ненулевой элемент b, расположенный на диагонали. Согласно (1.3) b должен равняться нулю. Полученное противоречие показывает, что из (1.3) следует (1.2), а обратное очевидно.

Учитывая лемму 1.1 заключаем, что в случае подмодуля S под $S^\perp$ можно понимать множество всех ограниченных линейных функционалов на $L^p(M)$, которые равны нулю на S.

2. Решение задачи (P), если $p \in (0,1)$ и $0 \in \Delta$

Пусть

$$M = M_a + M_s \tag{2.4}$$

есть разложение меры M в сумму абсолютно непрерывной части M_a и сингулярной части M_s относительно меры γ. Существуют такие множества $B_a, B_s \in \mathfrak{L}(\Gamma)$, что $B_a \cup B_s = \Gamma$, $B_a \cap B_s = \emptyset$, $M_s(B_a) = 0$, $\gamma(B_s) = 0$. Мера M_a имеет вид

$$dM_a = W d\gamma$$

с некоторой $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значной суммируемой относительно γ функцией W.

Покажем, что для любой замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ мера M_s не влияет на ответ на вопрос ($\mathbf{P}$). Заметим, что разложение (2.4) влечет разложение пространства $L^p(M)$ в прямую сумму пространств $L^p(M_a)$ и $L^p(M_s)$. Далее, в [4, лемма 4.3] было установлено включение $L^p(M_s) \subseteq \overline{\vee\{J^k : \ k \in \mathbb{N}_0\}}$, где замыкание берется относительно метрики пространства $L^p(M)$. Поскольку умножение на J есть непрерывное отображение в $L^p(M)$, то для любого $\kappa \in \mathbb{N}_0$ получаем

$$\overline{J^\kappa L^p(M_s)} \subseteq \overline{\vee\{J^k : \ k \in \mathbb{N}_0 + \kappa\}}. \qquad (2.5)$$

Напомним, что при формулировке задачи ($\mathbf{P}$) предполагалось, что $J^k \in L^p(M), \ k \in \mathbb{Z}$. Если $0 \notin \Gamma$, это не накладывает дополнительного условия на M, но если $0 \in \Gamma$, такое требование, в частности, означает, что точечная масса $M(\{0\})$ меры M в точке 0 равна нулю. Но тогда оператор умножения на J^κ переводит $L^p(M_s)$ на плотное в $L^p(M_s)$ множество (см. рассуждения в [4, параграф 6]). Следовательно, из (2.5) вытекает включение

$$L^p(M_s) \subseteq \overline{\vee\{J^k : \ k \in \mathbb{N}_0 + \kappa\}}. \qquad (2.6)$$

Теперь с помощью (2.6), подобным образом, как было доказано следствие 4.2 в [4], можно установить следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть $p \in (0, \infty)$ и S есть подмножество пространства $L^p(M)$ такое, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{N}_0$ все функции $J^k, \ k \in \mathbb{N}_0 + \kappa$, принадлежат S. Кроме того, пусть $M(\{0\}) = 0$, если $0 \in \Gamma$. Тогда для плотности множества $\vee S$ в $L^p(M)$ необходимо и достаточно, чтобы $\vee(1_{B_a} S)$ было плотным в $L^p(M_a)$. Здесь 1_{B_a} обозначает характеристическую функцию множества B_a.*

Для γ-п.в. $\zeta \in \Gamma$ существует касательная к кривой Γ в точке ζ. Пусть $\alpha(\zeta)$ есть угол между положительным направлением оси абсцисс и этой касательной. Отметим, что на $\mathfrak{L}(\Gamma)$ имеет место равенство $d\zeta = e^{i \arg \alpha(\zeta)} \gamma(d\zeta), \ \zeta \in \Gamma$, в смысле равенства $\mathbb{C}$-значных мер.

Пусть теперь кривая Γ такая, что 0 принадлежит ее внутренности Δ. Следующая лемма является следствием одного фундаментального результата Привалова и играет центральную роль в данной работе.

Лемма 2.1. *Пусть $0 \in \Delta$ и K — конечное, возможно пустое, подмножество множества $\mathbb{Z}$. Для любой $\mathbb{C}_{n\times n}$-значной функции $\mathbf{X}$ на Γ, суммируемой относительно γ, следующие два условия эквивалентны:*

(*i*) $\int_\Gamma J^l \mathbf{X} d\gamma = 0, \ l \in \mathbb{Z} \backslash K$,

(*ii*) $\mathbf{X}$ *имеет форму*

$$\mathbf{X} = e^{i \arg \alpha} \sum_{k \in (-K-1)} X_k J^k \qquad \gamma\text{-п.в.} \qquad (2.7)$$

с некоторыми $X_k \in \mathbb{C}_{n\times n}, \ k \in (-K-1)$.

Если $K = \emptyset$, то (2.7) понимается в смысле $\mathbf{X} = 0$ γ-п.в.

Доказательство. Пусть вначале K непусто. Обозначим $k_0 := 1 + \max K$, где $\max K$ означает наибольшее число из K, и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}(z) &:= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-i\arg\alpha(\zeta)}(J(\zeta))^{k_0}\mathbf{X}(\zeta)(\zeta - z)^{-1}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(J(\zeta))^{k_0}\mathbf{X}(\zeta)(\zeta - z)^{-1}\gamma(d\zeta), \qquad z \in \Delta \cup \Delta_o. \quad (2.8)\end{aligned}$$

При $|z|$, достаточно близких к 0, имеем

$$\widehat{\mathbf{X}}(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{\infty} z^j \int\limits_{\Gamma} J^{k_0-j-1}\mathbf{X}\, d\gamma,$$

а при $|z|$, достаточно больших,

$$\widehat{\mathbf{X}}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1} \int\limits_{\Gamma} J^{k_0+j}\mathbf{X}\, d\gamma.$$

Поэтому из условия (i) и теоремы единственности для голоморфных функций следует, что $\widehat{\mathbf{X}}(z) = \sum_{k\in(-K-1+k_0)}\widehat{X}_k z^k$, $z \in \Delta$, с некоторыми $\widehat{X}_k \in \mathbb{C}_{n\times n}$, $k \in (-K-1+k_0)$, и $\widehat{\mathbf{X}}(z) = 0$, $z \in \Delta_o$. Таким образом, (2.8) является интегралом Коши. В силу следствия б) в [22, с. 190] имеет место $e^{-i\arg\alpha}J^{k_0}\mathbf{X} = \sum_{k\in(-K-1+k_0)}\widehat{X}_k J^k$ γ-п.в., что влечет выполнение (ii). С другой стороны, прямые вычисления показывают, что из (ii) следует (i).

Для пустого множества K аналогично, но проще, устанавливается эквивалентность условия (i) и равенства $\mathbf{X} = 0$ γ-п.в. □

Первым применением леммы 2.1 является доказательство плотности $\Lambda_\emptyset$ в $L^p(M)$.

Теорема 2.2. *Пусть $p \in (0,\infty)$ и $0 \in \Delta$. Тогда $\Lambda_\emptyset$ плотно в $L^p(M)$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.1 мы можем предположить, что $dM = W d\gamma$. Пусть вначале $p \in [1,\infty)$. Учитывая лемму 1.1, заключаем, что $\Lambda_\emptyset$ плотно в $L^p(M)$ тогда и только тогда, когда для каждой функции $G \in L^q(M)$ из

$$\int\limits_{\Gamma} J^k W G^* \, d\gamma = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.9}$$

следует равенство $G = 0$ в $L^q(M)$. Используя лемму 2.1 из (2.9), получаем равенство $WG^* = 0$ γ-п.в., которое влечет за собой $G = 0$ в $L^q(M)$. Если $p \in (0,1)$, теорема вытекает из [4, лемма 3.1] и только что установленного результата. □

Теперь мы можем легко доказать, что для $p \in (0,1)$ каждое множество Λ_K плотно в $L^p(M)$. Отметим, что аналогичный результат для бесконечной компактной абелевой группы вместо кривой Жордана содержится в рукописи: L. Klotz, K.–D. Kürsten, *Density of systems of trigonometric polynomials in* L^p, $0 < p < 1$.

Лемма 2.2 (ср. упражнение 11 главы 1 в [25]). *Пусть $\mathcal{F}$ есть топологическое векторное пространство, не имеющее других выпуклых открытых множеств кроме $\emptyset$ и $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{L}$ является линейным подмножеством в $\mathcal{F}$ с конечной коразмерностью. Тогда $\mathcal{L}$ плотно в $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Обозначим посредством $\overline{\mathcal{L}}$ замыкание $\mathcal{L}$ в $\mathcal{F}$. Фактор-пространство $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{L}}$ конечномерно, значит, локально выпукло. Поскольку фактор-отображение пространства $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{L}}$ непрерывно, то оно обязательно является нулевым отображением. Следовательно, $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{L}}$ есть нулевое пространство, т.е. $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{F}$. □

Теорема 2.3. *Пусть $p \in (0,1)$ и $0 \in \Delta$. Тогда Λ_K плотно в $L^p(M)$ для каждого конечного множества $K \subseteq \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Снова примем без ограничения общности, что $dM = W d\gamma$. Учитывая, что для $F \in L^p(M)$ мера $\|FW^{\frac{1}{p}}\|_E^p d\gamma$ обладает свойством Дарбу, см. предложение 7 на странице 26 в [26], и используя рассуждения, аналогичные рассуждениям в [25, с. 46], мы можем легко показать, что $L^p(M)$, $p \in (0,1)$, не имеет других выпуклых открытых множеств кроме $\emptyset$ и $L^p(M)$. Поскольку в силу теоремы 2.2 коразмерность замыкания множества Λ_K в $L^p(M)$ конечна, требуемый результат следует из леммы 2.2. □

3. Решение задачи (P), если $p \in [1,\infty)$ и $0 \in \Delta$

Пусть $p \in [1,\infty)$ и $\overline{\Lambda_{K,p}}$ — замыкание множества Λ_K в пространстве $L^p(M)$. Если $0 \in \Delta$, то в силу леммы 1.1 и теоремы 2.2 множество $\overline{\Lambda_{K,p}}^{\perp}$ является конечномерным подпространством пространства

$L^q(M)$. Для более явного его описания мы введем вторую шкалу банаховых пространств. Для этого предположим, что M абсолютно непрерывна, т.е. $dM = W d\gamma$. Если $X \in \mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$, то $\mathbb{C}^n$ распадается в ортогональную сумму $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(X) \oplus \operatorname{Ker} X$. Пусть

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

есть соответствующее блочно-матричное представление для X. Поскольку X_1 обратима, мы можем ввести матрицу

$$X^{\#} := \begin{pmatrix} X_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где X_1^{-1} означает обратную к X_1 матрицу.

Для $p \in [1,\infty]$ обозначим посредством $\mathfrak{L}^p(W)$ пространство всех (классов эквивалентности) измеримых функций $\Phi : \Gamma \to \mathbb{C}_{n\times n}$ таких, что $\operatorname{Ker} W \subseteq \operatorname{Ker} \Phi$ γ-п.в. и

$$|\Phi|_p := \left(\int\limits_\Gamma \left\| \Phi\big(W^{\#}\big)^{\frac{1}{q}} \right\|_E^p d\gamma \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{если } p \in (1,\infty),$$

$$|\Phi|_1 := \int\limits_\Gamma \left\| \Phi Q_{\mathcal{R}(W)} \right\|_E d\gamma < \infty, \quad \text{если } p = 1,$$

$$|\Phi|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_\gamma \left\| \Phi W^{\#} \right\|_E < \infty, \quad \text{если } p = \infty.$$

Легко показывается, что $\mathfrak{L}^p(W)$ есть левый $\mathbb{C}_{n\times n}$-модуль и $|\cdot|_p$ является нормой. Непосредственно проверяется справедливость следующей леммы:

Лемма 3.1. *Пусть $p \in [1,\infty)$ и $dM = W d\gamma$. Тогда отображение $\mathbf{U}_p : F \to FW$, $F \in L^p(M)$, осуществляет изометрический изоморфизм между $L^p(M)$ и $\mathfrak{L}^p(W)$. Обратное отображение $\mathbf{U}_p^{-1}$ задается следующим образом: $\mathbf{U}_p^{-1}\Phi = \Phi W^{\#}$, $\Phi \in \mathfrak{L}^p(W)$.*

Используя леммы 1.1 и 3.1, несложно получить следующий результат:

Лемма 3.2. *Пусть $p \in [1,\infty)$. Тогда для каждой функции $\Psi \in \mathfrak{L}^q(W)$ посредством*

$$\Phi \to \operatorname{tr} \int\limits_\Gamma \Phi W^{\#} \Psi^* \, d\gamma, \qquad \Phi \in \mathfrak{L}^p(W), \tag{3.10}$$

определяется ограниченный линейный функционал на $\mathfrak{L}^p(W)$*. Обратно, каждый такой функционал имеет вид* (3.10)*. При этом норма функционала равна* $|\Psi|_q$.

Теперь мы можем дать описание пространства $\overline{\Lambda_{K,p}}^{\perp}$. Для этого рассмотрим множество всех функций вида

$$e^{-i\arg\alpha}\sum_{k\in(-K-1)} Y_k(J^*)^k$$

с некоторыми $Y_k\in\mathbb{C}_{n\times n},\ k\in(-K-1)$, и обозначим $\mathfrak{N}_{K,p}$ пересечение этого множества с $\mathfrak{L}^p(W),\ p\in[1,\infty]$.

Лемма 3.3. *Пусть* $0\in\Delta$ *и* $dM=Wd\gamma$*. Тогда для* $p\in[1,\infty)$ *имеет место равенство* $\mathbf{U}_q\overline{\Lambda_{K,p}}^{\perp}=\mathfrak{N}_{K,q}$.

Доказательство. Результат получается поочередным применением лемм 1.1, 2.1 и 3.1. □

Согласно теореме 2.1 при изучении плотности Λ_K в $L^p(M)$ мы можем предположить, что M абсолютно непрерывна относительно γ. Поскольку Λ_K плотно в $L^p(M)$ тогда и только тогда, когда $\overline{\Lambda_{K,p}}^{\perp}=\{0\}$, то из леммы 3.3 мы непосредственно получим некоторые критерии плотности. Они еще немного упрощаются, если учесть, что умножение на $e^{i\arg\alpha}$ есть изометрия, а умножение на J^* есть гомеоморфизм в $L^p(M)$. Результаты собраны в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть* $p\in[1,\infty),\ 0\in\Delta$ *и* K *есть непустое конечное подмножество множества* $\mathbb{Z}$*. Линейное множество* Λ_K *плотно в* $L^p(M)$ *тогда и только тогда, когда для любой* $\mathbb{C}_{n\times n}$*-линейной комбинации* T *функций* $(J^*)^k,\ k\in(-K)$*, такой, что*

$$\operatorname{Ker}W\subseteq\operatorname{Ker}T\qquad \gamma-\text{п.в.},\tag{3.11}$$

a) в случае $p\in(1,\infty)$ *интеграл*

$$\int_\Gamma \big\|T\big(W^{\#}\big)^{\frac{1}{p}}\big\|_E^q d\gamma\tag{3.12}$$

равен 0 *или* ∞,

b) в случае $p=1$ *существенная верхняя грань*

$$\operatorname*{ess\,sup}_\gamma\big\|TW^{\#}\big\|_E\tag{3.13}$$

равна 0 *или* ∞.

В частности, если K — одноточечное множество, то для плотности Λ_K в $L^p(M)$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой матрицы $X \in \mathbb{C}_{n\times n}$ с $\operatorname{Ker} W \subseteq \operatorname{Ker} X$ γ-п.в. интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \left\| X\left(W^{\#}\right)^{\frac{1}{p}} \right\|_E^q d\gamma$$

(в случае $p \in (1,\infty)$) или существенная верхняя грань

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\gamma} \left\| XW^{\#} \right\|_E$$

(в случае $p = 1$) либо равны 0, либо равны ∞.

Равенство $\overline{\Lambda_{K,p}} = L^p(M)$ имеет место для всех конечных подмножеств множества $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда для каждой $\mathbb{C}_{n\times n}$-линейной комбинации T функций $(J^*)^k$, $k \in \mathbb{Z}$, такой, что выполняется (3.11),

- *c) в случае $p \in (1,\infty)$ интеграл (3.12) равен 0 или ∞,*
- *d) в случае $p = 1$ существенная верхняя грань (3.13) равна 0 или ∞.*

4. $\mathcal{J}_0$-регулярность и $\mathcal{J}_c$-регулярность

В связи с восходящими к Брукнеру [24] обобщениями понятий линейной регулярности и линейной сингулярности слабо стационарного случайного процесса напрашивается следующее определение.

Определение 4.1. *Пусть $p \in (0,\infty)$ и $\mathcal{J}$ — некоторое семейство непустых конечных подмножеств множества $\mathbb{Z}$. Пространство $L^p(M)$ называется $\mathcal{J}$-регулярным, если $\bigcap_{K\in\mathcal{J}} \overline{\Lambda_{K,p}} = \{0\}$. Оно называется $\mathcal{J}$-сингулярным, если $\overline{\Lambda_{K,p}} = L^p(M)$ для всех $K \in \mathcal{J}$.*

В настоящем параграфе мы рассмотрим два специальных семейства, а именно, семейство $\mathcal{J}_0$ всех одноточечных множеств и семейство $\mathcal{J}_c$ всех конечных множеств. Опять предположим, что $0 \in \Delta$. Тогда согласно теореме 2.3 пространство $L^p(M)$, $p \in (0,1)$, $\mathcal{J}$-сингулярно для всякого семейства $\mathcal{J}$. Далее, для $p \in [1,\infty)$ результаты о $\mathcal{J}_0$-сингулярности и $\mathcal{J}_c$-сингулярности были сформулированы в теореме 3.1. Поэтому здесь мы ограничимся изучением $\mathcal{J}_0$-регулярности и $\mathcal{J}_c$-регулярности в случае $p \in [1,\infty)$. Следующий простой факт, доказательство которого мы опускаем, оказывается очень полезным.

Лемма 4.1. *Предположим, что $p \in [1, \infty)$, $0 \in \Delta$ и M имеет вид $dM = W d\gamma$. Пусть $\mathcal{J}$ — некоторое семейство непустых конечных подмножеств множества $\mathbb{Z}$. Тогда для $\mathcal{J}$-регулярности пространства $L^p(M)$ необходимо и достаточно плотности множества $\vee_{K \in \mathcal{J}} \mathbf{U}_q \overline{\Lambda_{K,p}}^{\perp}$ в $\mathfrak{L}^q(W)$.*

Теорема 4.1. *Пусть $p \in (1, \infty)$ и $0 \in \Delta$. Пространство $L^p(M)$ является $\mathcal{J}_0$-регулярным тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:*

(*i*) *Мера M имеет вид $dM = W d\gamma$,*

(*ii*) *Существует подпространство $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{C}^n$ такое, что $\mathcal{R}(W) = \mathcal{L}$ γ-п.в.,*

(*iii*) $\int_\Gamma \left\| \left(W^{\#}\right)^{\frac{q}{p}} \right\|_E d\gamma < \infty$.

Доказательство. Необходимость.
(*i*): Это следует из включения (2.6).
(*ii*): Поскольку мера M конечна, имеем $\int_\Gamma \|W\|_E \, d\gamma < \infty$, значит, $\int_\Gamma \left\|W^{\frac{1}{q}}\right\|^q d\gamma = \int_\Gamma \|W\| \, d\gamma < \infty$ для обычной операторной нормы $\| \cdot \|$. Следовательно, $\int_\Gamma \left\|W \left(W^{\#}\right)^{\frac{1}{p}}\right\|^q d\gamma = \int_\Gamma \left\|W^{\frac{1}{q}}\right\|^q d\gamma < \infty$, т.е. $W \in \mathfrak{L}^q(W)$. В силу лемм 4.1 и 3.3 существуют последовательность $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, где $K_j = \{k_j\}$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$, и последовательность функций $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ вида $T_j = e^{-i \arg \alpha} Y_{k_j, j} (J^*)^{k_j}$, $Y_{k_j, j} \in \mathbb{C}_{n \times n}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\operatorname{Ker} W \subseteq \operatorname{Ker} Y_{k_j, j}, \qquad \gamma - \text{п.в.}, \ j \in \mathbb{N}, \tag{4.14}$$

$$\int\limits_\Gamma \left\|Y_{k_j, j} \left(W^{\#}\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_E^q d\gamma < \infty, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{4.15}$$

и $\lim_{j \to \infty} T_j = W$ в пространстве $\mathfrak{L}^q(W)$. Используя лемму 3.1, получим, что $\{\mathbf{U}_q^{-1} T_j\}_{j \in \mathbb{N}} = \{T_j W^{\#}\}_{j \in \mathbb{N}}$ стремится в $L^q(M)$ к функции $\mathbf{U}_q^{-1} W = W W^{\#} = Q_{\mathcal{R}(W)}$. Тогда из [4, Лемма 3.1] вытекает, что $\lim_{j \to \infty} \int_\Gamma \left\| \left(T_j W^{\#} - Q_{\mathcal{R}(W)}\right) W \right\|_E d\gamma = 0$. Но в силу (4.14) имеем $\int_\Gamma \left\| \left(T_j W^{\#} - Q_{\mathcal{R}(W)}\right) W \right\|_E d\gamma = \int_\Gamma \|T_j - W\|_E \, d\gamma$. Следовательно,

$$\lim_{j \to \infty} \int\limits_\Gamma T_j \, d\gamma = \int\limits_\Gamma W \, d\gamma \tag{4.16}$$

относительно евклидовой метрики в $\mathbb{C}_{n\times n}$. Поскольку из (4.14) вытекает включение $\operatorname{Ker} W \subseteq \operatorname{Ker}\left(\int_\Gamma T_j d\gamma\right)$ γ-п.в., $j\in\mathbb{N}$, то (4.16) дает $\operatorname{Ker} W \subseteq \operatorname{Ker}\left(\int_\Gamma W d\gamma\right)$ γ-п.в. Обратное включение $\operatorname{Ker}\left(\int_\Gamma W d\gamma\right) \subseteq \operatorname{Ker} W$ γ-п.в. является известным фактом, см. [27, лемма 3.2(a)], так что

$$\operatorname{Ker}\left(\int_\Gamma W\,d\gamma\right) = \operatorname{Ker} W \qquad \gamma\text{-п.в.} \tag{4.17}$$

Наконец, поскольку W является $\mathbb{C}^{\geq}_{n\times n}$-значной функцией, из (4.17) непосредственно следует, что для пространства $\mathcal{L} := \mathcal{R}(\int_\Gamma W d\gamma)$ имеет место равенство $\mathcal{R}(W) = \mathcal{L}$ γ-п.в.

(iii): Положим $X := \int_\Gamma W d\gamma$. Из (4.15) следует, что

$$\int_\Gamma \left\| \left(\int_\Gamma T_j\,d\gamma\right)\left(W^{\#}\right)^{\frac{1}{p}} \right\|_E^q d\gamma < \infty, \qquad j\in\mathbb{N}.$$

Из (4.16) следует, что $\operatorname{Ker} X \supseteq \operatorname{Ker}\int_\Gamma T_j\,d\gamma$ для всех j, начиная с некоторого $j_0\in\mathbb{N}$. Следовательно, существует матрица $Y\in\mathbb{C}_{n\times n}$, такая, что

$$X = Y\int_\Gamma T_{j_0}\,d\gamma. \tag{4.18}$$

Действительно, в качестве Y можно взять следующую матрицу или оператор в $\mathbb{C}^n$:

$$Yx = \begin{cases} 0, & x\in\operatorname{Ker} X,\\ XT^{+}x, & x\in(\mathbb{C}^n\ominus\operatorname{Ker} X)\,(\subseteq(\mathbb{C}^n\ominus\operatorname{Ker} T)) \end{cases},$$

где T^{+} есть оператор в $\mathbb{C}^n$, псевдообратный к T (см. [28, стр. 265]).

Из (4.18) следует, что $\int_\Gamma \left\|X\left(W^{\#}\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_E^q d\gamma < \infty$, т.к.

$$\int_\Gamma \left\| \left(\int_\Gamma T_{j_0}\,d\gamma\right)\left(W^{\#}\right)^{\frac{1}{p}} \right\|_E^q d\gamma < \infty.$$

Следовательно, $\int_\Gamma \left\|X^{\#}X\left(W^{\#}\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_E^q d\gamma<\infty$. Поскольку $X^{\#}X = Q_{\mathcal{R}(X)} = Q_{\mathcal{R}(W)}$ γ-п.в., то $\int_\Gamma \left\|\left(W^{\#}\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_E^q d\gamma = \int_\Gamma \left\|Q_{\mathcal{R}(W)}\left(W^{\#}\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_E^q d\gamma < \infty$, что дает $\int_\Gamma \left\|\left(W^{\#}\right)^{\frac{q}{p}}\right\|_E d\gamma < \infty$.

Достаточность. Для $k \in \mathbb{Z}$ введем функцию $e^{-i\arg\alpha}(J^*)^{(-k-1)}Q_{\mathcal{L}}$. В силу (iii) и леммы 3.3 она принадлежит $\mathbf{U}_q\overline{\Lambda_{\{k\},p}}^{\perp}$, $k \in \mathbb{Z}$. Допустим, что $L^p(M)$ не является $\mathcal{J}_0$-регулярным пространством. Тогда из лемм 4.1, 3.2 и 3.3 легко вытекает существование ненулевой функции $\Phi \in \mathfrak{L}^p(W)$ такой, что $\int_\Gamma e^{-i\arg\alpha}(J^*)^k W^\# \Phi^* d\gamma = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, согласно лемме 2.1 имеем $\Phi W^\# = 0$ γ-п.в., что дает $\Phi = 0$ в $\mathfrak{L}^p(W)$, вопреки нашему предположению. □

Теорема 4.2. *Пусть $p \in (1,\infty)$ и $0 \in \Delta$. Пространство $L^p(M)$ является $\mathcal{J}_c$-регулярным тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:*

(i) *Мера M имеет вид $dM = W d\gamma$,*

(ii) *Функция W имеет постоянный ранг γ-п.в.,*

(iii) *Существуют непустое конечное множество $K \subseteq \mathbb{Z}$ и функция T вида $T = \sum_{k\in K} Y_k (J^*)^k$ с некоторыми $Y_k \in \mathbb{C}_{n\times n}$, $k \in K$, и такая, что* $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} W$ *γ-п.в. и*

$$\int\limits_\Gamma \left\| T(W^\#)^{\frac{1}{p}} \right\|_E^q d\gamma < \infty. \tag{4.19}$$

Доказательство. Необходимость.
(i): Это следует из включения (2.6).
(ii): В доказательстве теоремы 4.1 было показано, что $W \in \mathfrak{L}^q(W)$. Согласно леммам 4.1 и 3.3 существует последовательность $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ непустых конечных подмножеств множества $\mathbb{Z}$ и последовательность функций $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ вида $T_j = e^{-i\arg\alpha}\sum_{k\in K_j} Y_{k,j}(J^*)^k$, $Y_{k,j} \in \mathbb{C}_{n\times n}$, $k \in K_j$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\operatorname{Ker} W \subseteq \operatorname{Ker} T_j \qquad \gamma-\text{п.в.},\ j \in \mathbb{N}, \tag{4.20}$$

$$\int\limits_\Gamma \left\| T_j(W^\#)^{\frac{1}{p}} \right\|_E^q d\gamma < \infty, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{4.21}$$

и

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_\Gamma \left\| (T_j - W)(W^\#)^{\frac{1}{p}} \right\|_E^q d\gamma = 0. \tag{4.22}$$

Из (4.22) следует существование подпоследовательности $\{T_{j_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ такой, что $\lim_{l\to\infty}(T_{j_l} - W)(W^\#)^{\frac{1}{p}} = 0$ γ-п.в. Значит, в силу (4.20) имеем

$$\lim_{l\to\infty} T_{j_l} = W \qquad \gamma\text{-п.в.} \tag{4.23}$$

в $\mathbb{C}_{n\times n}$.

Пусть r есть наибольший ранг, который значения функции W имеют на множестве положительной меры γ. Поскольку ранг является полунепрерывной снизу функцией на $\mathbb{C}_{n\times n}$, (4.23) влечет за собой существование числа $m \in \mathbb{N}$ и множества $B \in \mathfrak{L}(\Gamma)$ такого, что $\gamma(B) > 0$ и ранг матрицы $T_m(\zeta)$ не меньше r для γ-п.в. $\zeta \in B$. Из формы функции T_m видно, что ранг матрицы $T_m(\zeta)$ не меньше r для γ-п.в. $\zeta \in \Gamma$, а тогда из самого определения пространства $\mathfrak{L}^q(W)$ следует, что функция W имеет такое же свойство. В силу максимальности r заключаем, что W имеет постоянный ранг γ-п.в.
(iii): Легко видеть, что функция $T := e^{i\arg\alpha}T_m$ обладает всеми указанными свойствами.

Достаточность. Пусть выполняются условия (i)–(iii), но пространство $L^p(M)$ не является $\mathcal{J}_c$-регулярным. Тогда из лемм 4.1, 3.2 и 3.3 следует существование ненулевой функции $\Phi \in \mathfrak{L}^p(W)$ такой, что $\int_\Gamma e^{i\arg\alpha} J^k \Phi W^{\#} T^* \, d\gamma = 0,\ k \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\Phi W^{\#} T^* = 0 \qquad \gamma - \text{п.в.} \tag{4.24}$$

в силу леммы 2.1. Но равенство $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} W$ γ-п.в. дает $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{R}(W) = \mathcal{R}(W^{\#})$ γ-п.в., так что (4.24) имеет место тогда и только тогда, когда $\Phi W^{\#} = 0$ γ-п.в. Это противоречит условию $\Phi \neq 0$ в $\mathfrak{L}^p(W)$. $\square$

Отметим, что аналоги теорем 4.1 и 4.2 в контексте абстрактного гармонического анализа были установлены ранее. А именно, аналог теоремы 4.1 для компактной абелевой группы и $p = 2$ был доказан в [13, теорема 5.3], а обобщение на $p \in (1,\infty)$ в [20, теорема 7.3]. Аналог теоремы 4.2 был получен в [11, теорема 1] для $\mathbb{T}^l,\ l \in \mathbb{N}$, и $p = 2$, а в [20, теорема 8.5] для некоторого класса локально-компактных абелевых групп и $p \in (1,\infty)$.

Замечание 4.1. Если мы в теореме 4.1 вместо условия (iii) потребуем, чтобы выполнялось условие $\operatorname{ess\,sup}_\gamma \|W^{\#}\|_E < \infty$, а в теореме 4.2 вместо (4.19) чтобы было $\operatorname{ess\,sup}_\gamma \|TW^{\#}\|_E < \infty$, то получим системы условий, которые необходимы, соответственно, для $\mathcal{J}_0$-регулярности и $\mathcal{J}_c$-регулярности пространства $L^1(M)$. Это доказывается аналогично случаю $p \in (1,\infty)$. С другой стороны, простые примеры показывают, что такие системы условий не достаточны. В самом деле, для $n = 1,\ \Gamma = \mathbb{T},\ M = \gamma$ все условия выполняются. Однако, $L^1(\gamma)$

не $\mathcal{J}_c$-регулярно (и, тем более, не $\mathcal{J}_0$-регулярно), т.к. в силу леммы 4.1 это влекло бы плотность тригонометрических многочленов в $L^\infty(\gamma)$. Нам не известно, существует ли вообще ненулевая мера M, для которой $L^1(M)$ является $\mathcal{J}_c$-регулярным.

5. Другое обобщение интерполяционной задачи

В данном параграфе мы изучаем задачу $(\widetilde{\mathbf{P}})$ (см. Введение). При этом мы переносим некоторые результаты для единичной окружности $\mathbb{T}$ на случай замкнутой спрямляемой кривой Жордана Γ путем конформного отображения.

Итак, пусть φ — конформное отображение открытого единичного круга на Δ. Его непрерывное продолжение на замкнутый единичный круг, как и сужение этого продолжения на $\mathbb{T}$, обозначим также φ. Обратное к φ отображение обозначим ψ. Для какой-то, вообще говоря, векторнозначной меры μ на $\mathfrak{L}(\Gamma)$ символ $\psi\mu$ обозначает ее образ при отображении ψ, т.е. $(\psi\mu)(B) = \mu(\varphi(B))$, $B \in \mathfrak{L}(\mathbb{T})$. Подобным образом определим $\varphi\nu$ для меры ν на $\mathfrak{L}(\mathbb{T})$.

Для $p \in (0,\infty]$ определим отображение $V := V_{\varphi,p}$ следующим образом:

$$(VF)(\cdot) := F(\varphi(\cdot)),\ F \in L^p(M).$$

Введем еще следующие обозначения. Для $\kappa \in \mathbb{Z}$ пусть $L^p_\kappa(M)$ и $L^p_\kappa(M)^\sim$ — замыкания, соответственно, множеств $\vee\{J^k : k \in \mathbb{N}_0+\kappa\}$ и $\vee\{(J^*)^k : k \in \mathbb{N}_0+\kappa\}$ относительно метрики пространства $L^p(M)$, $p \in (0,\infty]$.

В [4, лемма 4.1] было установлено, что V является изометрическим изоморфизмом между $L^p(M)$ и $L^p(\psi M)$. При этом имеет место равенство $VL^p_0(M) = L^p_0(\psi M)$, см. [4, лемма 4.2]. Аналогично можно доказать, что $VL^p_0(M)^\sim = L^p_0(\psi M)^\sim$. Из этих фактов и из того, что множество $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных тригонометрических многочленов плотно в $L^p(\psi M)$, $p \in (0,\infty)$, непосредственно получаем следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть $p \in (0,\infty)$ и Γ — замкнутая спрямляемая кривая Жордана. Тогда множество $L^p_0(M) + L^p_0(M)^\sim$ плотно в $L^p(M)$.*

Из теоремы 5.1 легко вытекает следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть $p \in (0,1)$ и Γ — замкнутая спрямляемая кривая Жордана. Пусть K — конечное подмножество множества $\mathbb{N}_0$ и $\widetilde{K}$ — конечное подмножество множества $\mathbb{N}$, причем K или $\widetilde{K}$ могут быть пустыми.*

(*i*) *Если* $0 \notin \Gamma$ *или если* $0 \in \Gamma$ *и* $M(\{0\}) = 0$*, тогда множество*

$$\vee\{J^k:\ k \in \mathbb{N}_0 \backslash K\} + \vee\{(J^*)^k:\ k \in \mathbb{N} \backslash \widetilde{K}\} \tag{5.25}$$

плотно в $L^p(M)$*;*

(*ii*) *Если* $0 \in \Gamma$ *и* $M(\{0\}) \neq 0$*, то для плотности множества* (5.25) *в* $L^p(M)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $0 \notin K$*.*

Доказательство. Утверждение (*i*) следует из теоремы 5.1 аналогично тому, как теорема 2.3 была выведена из теоремы 2.2. Необходимость условия $0 \notin K$ в (*ii*) очевидна. Покажем его достаточность. Пусть $F \in L^p(M)$. Используя утверждение (*i*) с множеством $K \cup \{0\}$ вместо K, мы найдем последовательность

$$\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \big(\vee\{J^k:\ k \in \mathbb{N}_0 \backslash (K \cup \{0\})\} + \vee\{(J^*)^k:\ k \in \mathbb{N} \backslash \widetilde{K}\}\big),$$

которая стремится к $F - F(0)$ в $L^p(M \backslash M(\{0\})\delta_0)$. Здесь δ_0 обозначает меру Дирака в точке 0. Последовательность $\{T_j + F(0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ принадлежит $\vee\{J^k:\ k \in \mathbb{N}_0 \backslash K\} + \vee\{(J^*)^k:\ k \in \mathbb{N} \backslash \widetilde{K}\}$ и стремится к F в том же пространстве. Поскольку $T_j(0) + F(0) = F(0),\ j \in \mathbb{N}$, то из разложения $L^p(M) = L^p(M \backslash M(\{0\})\delta_0) \dotplus L^p(M(\{0\})\delta_0)$ в прямую сумму следует, что последовательность $\{T_j + F(0)\}_{j\in\mathbb{N}}$ стремится к F и относительно метрики пространства $L^p(M)$. $\square$

Для $p \in [1, \infty)$ у нас есть только некоторые частичные ответы на вопрос в ($\widetilde{\mathbf{P}}$). Если $0 \in \Gamma$, нам не известны другие результаты, кроме теоремы 5.1. Если $0 \in \Delta_o$, мы уже установили, что для любого $\kappa \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство $L^p_\kappa(M) = L^p_0(M)$. Аналогично, $L^p_\kappa(M)^\sim$ совпадает с $L^p_0(M)^\sim$. Следовательно, теорема 5.1 непосредственно приводит к следующему результату.

Теорема 5.3. *Пусть* $p \in [1, \infty)$ *и* $0 \in \Delta_o$*. Тогда множество* (5.25) *плотно в* $L^p(M)$*.*

Если, наконец, $0 \in \Delta$, то мы выбираем конформное отображение φ таким образом, чтобы $\varphi(0) = 0$.

Лемма 5.1. *Пусть* $p \in (0, \infty)$*,* $0 \in \Delta$ *и* φ *такое, что* $\varphi(0) = 0$*. Тогда для* $\kappa \in \mathbb{N}_0$ *выполняются равенства*

$$VL^p_\kappa(M) = L^p_\kappa(\psi M), \tag{5.26}$$

$$VL^p_\kappa(M)^\sim = L^p_\kappa(\psi M)^\sim. \tag{5.27}$$

Доказательство. Если $\kappa = 0$, то равенство (5.26) было установлено в [4, лемма 4.2]. Поскольку $\varphi(0) = 0$, мы можем доказать оставшуюся часть леммы аналогичным образом. В самом деле, для $l \in \mathbb{N}_0$ функция $VJ^l = \varphi^l I_n$ является на $\mathbb{T}$ равномерным пределом последовательности $\mathbb{C}_{n\times n}$-значных многочленов. Эти многочлены можно выбрать так, чтобы они имели в точке 0 нуль порядка не меньше l. Следовательно, $VL^p_\kappa(M) \subseteq L^p_\kappa(\psi M)$. Обратное включение получается аналогично, что дает (5.26). Подобным образом можно доказать (5.27). □

Теорема 5.4. *Пусть $p \in [1, \infty)$, $0 \in \Delta$ и φ — конформное отображение такое, что $\varphi(0) = 0$. Пусть $\kappa \in \mathbb{N}_0$ и $\tilde\kappa \in \mathbb{N}$ такие, что $\kappa + \tilde\kappa > 1$. Тогда для плотности множества $L^p_\kappa(M) + L^p_{\tilde\kappa}(M)^\sim$ в $L^p(M)$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой $\mathbb{C}_{n\times n}$-линейной комбинации $\tilde T$ функций $\psi^k I_n$, $k \in [-\tilde\kappa + 1, \kappa - 1] \cap \mathbb{Z}$, такой, что*

$$\operatorname{Ker} W \subseteq \operatorname{Ker} \tilde T \qquad \gamma-\text{п.в.}, \tag{5.28}$$

a) в случае $p \in (1, \infty)$ интеграл

$$\int\limits_\Gamma \left\| \tilde T (W^\#)^{\frac{1}{p}} \right\|^q_E |\psi'|^q \, d\gamma$$

равен 0 или ∞,

b) в случае $p = 1$ существенная верхняя грань

$$\operatorname*{ess\,sup}_\gamma \bigl(\|\tilde T W^\#\|_E |\psi'| \bigr)$$

либо равна 0, либо равна ∞.

В частности, множество $L^p_1(M) + L^p_1(M)^\sim$ плотно в $L^p(M)$ тогда и только тогда, когда для каждой матрицы $X \in \mathbb{C}_{n\times n}$ с $\operatorname{Ker} W \subseteq \operatorname{Ker} X$ γ-п.в. интеграл $\int_\Gamma \left\| X (W^\#)^{\frac{1}{p}} \right\|^q_E |\psi'|^q \, d\gamma$ (в случае $p \in (1, \infty)$) или существенная верхняя грань $\operatorname{ess\,sup}_\gamma \left(\|XW^\#\|_E |\psi'| \right)$ (в случае $p = 1$) равны 0 или ∞.

Доказательство. Согласно лемме 5.1 множество $L^p_\kappa(M) + L^p_{\tilde\kappa}(M)^\sim$ плотно в $L^p(M)$ тогда и только тогда, когда $L^p_\kappa(\psi M) + L^p_{\tilde\kappa}(\psi M)^\sim$ плотно в $L^p(\psi M)$. Введем функцию $Z(z) := zI_n$, $z \in \mathbb{T}$. Поскольку $L^p_{\tilde\kappa}(\psi M)^\sim$ есть замыкание множества $\vee\{Z^k : k \in (-\mathbb{N}_0 - \tilde\kappa)\}$ в $L^p(\psi M)$, мы можем применить теорему 3.1 для $\Gamma = \mathbb{T}$, меры ψM и для множества $[-\tilde\kappa + 1, \kappa - 1] \cap \mathbb{Z}$. Поскольку $Z^{*k} = Z^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$, условия (3.11)–(3.13) можно рассматривать для всякой $\mathbb{C}_{n\times n}$-линейной комбинации

T функций $Z^k,\ k \in [-\tilde{\kappa}+1, \kappa-1] \cap \mathbb{Z}$. Условие (3.11) в этом случае принимает вид

$$\operatorname{Ker} \frac{d(\psi M)}{d\lambda} \subseteq \operatorname{Ker} T \qquad \lambda\text{-п.в.}, \tag{5.29}$$

где λ обозначает меру длины дуги на $\mathbb{T}$. Поскольку $\frac{d(\psi M)}{d\lambda} = W(\varphi)|\varphi'|$ λ-п.в., см. формулу (4.7) в [4], и $\varphi' \neq 0$ λ-п.в., ср. [4, лемма 2.1], то (5.29) равносильно включению

$$\operatorname{Ker} W(\varphi) \subseteq \operatorname{Ker} T \qquad \lambda\text{-п.в.} \tag{5.30}$$

После замены $\zeta = \varphi(z),\ z \in \mathbb{T}$, функция T переходит в $\mathbb{C}_{n\times n}$-линейную комбинацию $\tilde{T}$ функций $\psi^k I_n,\ k \in [-\tilde{\kappa}+1, \kappa-1] \cap \mathbb{Z}$. Следовательно, (5.30) можно переписать в виде $\operatorname{Ker} W \subseteq \operatorname{Ker} \tilde{T}$ $\varphi\lambda$-п.в., а значит, и $\operatorname{Ker} W \subseteq \operatorname{Ker} \tilde{T}$ γ-п.в. в силу эквивалентности мер $\varphi\lambda$ и γ, см. [4, лемма 2.3].

Далее, интеграл (3.12) принимает вид $\int_{\mathbb{T}} \big\| T\big(\big(\frac{d(\psi M)}{d\lambda}\big)^{\#}\big)^{\frac{1}{p}} \big\|_E^q \, d\lambda$. Поскольку $\frac{d(\psi\gamma)}{d\lambda} = |\varphi'|$ λ-п.в., см. формулу (2.2) в [4], то

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{T}} \Big\| T\Big(\Big(\frac{d(\psi M)}{d\lambda}\Big)^{\#}\Big)^{\frac{1}{p}} \Big\|_E^q \, d\lambda \\
&\qquad = \int\limits_{\mathbb{T}} \big\| T\big((W(\varphi))^{\#}\big)^{\frac{1}{p}} |\varphi'|^{-\frac{1}{p}} \big\|_E^q |\varphi'|^{-1} \, d(\psi\gamma) \\
&\qquad = \int\limits_{\mathbb{T}} \big\| T\big((W(\varphi))^{\#}\big)^{\frac{1}{p}} \big\|_E^q |\varphi'|^{-q} \, d(\psi\gamma) \\
&\qquad = \int\limits_{\Gamma} \big\| \tilde{T}(W^{\#})^{\frac{1}{p}} \big\|_E^q |\psi'|^q \, d\gamma,
\end{aligned}$$

где последнее равенство получается путем замены переменной $\zeta = \varphi(z),\ z \in \mathbb{T}$.

Наконец, (3.13) переходит в $\operatorname{ess\,sup}_\lambda \big\| T\big(\frac{d(\psi M)}{d\lambda}\big)^{\#} \big\|_E$, и легко видеть, что это равно $\operatorname{ess\,sup}_\gamma \big(\|\tilde{T} W^{\#}\|_E |\psi'|\big)$. $\square$

Литература

[1] L. Klotz, *Some Banach spaces of measurable operator-valued functions* // Probab. Math. Statist. (1991), N 12, 85–97.

[2] L. Klotz, *Inclusion relations for some L^p-spaces of operator-valued functions* // Math. Nachr. (1991), N 150, 119–126.

[3] A. J. Duran, P. Lopez-Rodriguez, *The L^p-space of a positive definite matrix of measures and density of matrix polynomials in L^1* // J. Approx. Theory (1997), N 90, 299–318.

[4] Л. Клёц, С.М. Загороднюк, *Приближение в среднем матричнозначными многочленами на спрямляемых кривых* // Укр. матем. вестник. **4** (2007), N 1, 1–20.

[5] А. Н. Колмогоров, *Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве* // Бюлл. МГУ (1941), 2(6), 1–40.

[6] А. М. Яглом, *К вопросу о линейном интерполировании стационарных случайных последовательностей и процессов* // Успехи матем. наук (1949), 4(9), 171–178.

[7] Ю. А. Розанов, *О линейной интерполяции стационарных процессов с дискретным временем* // ДАН СССР (1957), N 116, 923–926.

[8] Ю. А. Розанов, *Об интерполировании стационарных процессов с дискретным временем* // ДАН СССР (1960), N 130, 730–733.

[9] P. Masani, *The prediction theory of multivariate stochastic processes, III* // Acta Math. (1960), N 104, 142–162.

[10] H. Salehi, *Application of the Hellinger integrals to q-variate stationary stochastic processes* // Ark. Mat. (1967), N 7, 305–311.

[11] М. Г. Аветисян, Р. Л. Добрушин, *Условие линейной регулярности векторных случайных полей* // Проблемы передачи информации (1985), 21(4), 76–82.

[12] A. Makagon, A. Weron, *q-variate minimal stationary processes* // Studia Math. (1976), N 59, 41–52.

[13] A. Makagon, A. Weron, *Wold-Cramér concordance theorems for interpolation of q-variate stationary processes over locally compact abelian groups* // J. Multivariate Anal. (1976), N 6, 123–137.

[14] H. Salehi, *Interpolation of q-variate homogeneous random fields* // J. Math. Anal. Appl. (1969), n 25, 653–662.

[15] H. Salehi, J. K. Soheidt, *Interpolation of q-variate weakly stationary stochastic processes over a locally compact abelian group* // J. Multivariate Anal. (1972), N 2, 307–331.

[16] A. Weron, *On characterizations of interpolable and minimal stationary processes* // Studia Math. (1974), N 49, 165–183.

[17] A. Y. Miamee, M. Pourahmadi, *Best approximations in $L^p(d\mu)$ and prediction problems of Szegö, Kolmogorov, Yaglom, and Makazi* // J. London Math. Soc. (1988), N 38, 133–145.

[18] M. Pourahmadi, *On minimality and interpolation of harmonizable stable processes* // SIAM J. Appl. Math. (1984), N 44, 1023–1030.

[19] A. Weron, *Harmonizable stable processes on groups: Spectral, ergodic and interpolation properties* // J. Wahrsch. Verw. Gebiete (1985), N 68, 473–491.

[20] L. Klotz, *Some approximation problems in L^p spaces of matrix-valued functions* // Studia Math (1991), N 99, 129–147.

[21] Я. Л. Геронимус, *О замкнутости некоторых систем функций в пространстве L^p_σ* // Записки НИИ математики и механики ХГУ им. Горького и ХМО, **21** (1949), 24–45.

[22] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* Гос. изд-во тех.-теор. литературы, Москва Ленинград, 1950.

[23] H. Salehi, *The Hellinger square-integrability of matrix-valued measures with respect to a non-negative Hermitian measure* // Ark. Mat. (1967), N 7, 299–303.

[24] L. A. Bruckner, *Interpolation of homogeneous random fields on discrete groups* // Ann. Math. (1969), N 40, 251–258.

[25] У. Рудин, *Функциональный анализ.* Издат-во “Лань”, Санкт-Петербург Москва Краснодар, 2005.

[26] N. Dinculeanu, *Vector Measures.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.

[27] J. B. Robertson, M. Rosenberg, *The decomposition of matrix-valued measures* // Michigan Math. J. (1968), N 15, 353–368.

[28] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Издат-во “Наука”, Москва, 1967.

Сведения об авторах

Сергей Михайлович Загороднюк
Механико-математический факультет
Харьковский национальный
университет им. Каразина,
пл. Свободы 4,
Харьков 61077
Украина
E-Mail: `zagorodnyuk@univer.kharkov.ua`,
`Sergey.M.Zagorodnyuk@univer.kharkov.ua`

Люц Клёц
Fachbereich Mathematik Universität
D-7010 Leipzig
Deutschland