Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 2, 244 – 257

УМВ

Существование классических решений нечетких дифференциальных включений

Наталия В. Скрипник

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. Для нечетких дифференциальных включений вводится понятие классического решения и доказываются теоремы существования и непрерывной зависимости решения от параметра.

2000 MSC. 03E72, 34A12, 34A60.

Ключевые слова и фразы. Нечеткие дифференциальные включения.

Работа L. A. Zadeh [21] в 1965 г. положила начало развитию теории нечетких множеств. В 1983 г. M. L. Puri и D. A. Ralescu [17] ввели понятие производной и интеграла для нечетких отображений. В 1987 г. O. Kaleva [13] рассмотрел нечеткие дифференциальные уравнения, которые в дальнейшем изучались в [14, 15, 18–20].

Пусть $conv(\mathbb{R}^n)$ — метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Метрика в этом пространстве определяется с помощью расстояния по Хаусдорфу

$$h(F,G) = \max\Big\{ \max_{f\in F}\min_{g\in G}\|f-g\|,\ \max_{g\in G}\min_{f\in F}\|f-g\| \Big\},$$

где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение пространство E^n отображений $x : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x — нормально, то есть существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x(y_0) = 1$;

Статья поступила в редакцию 15.05.2008

2) x — нечетко выпукло, то есть для любых $y, z \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $x(\lambda y+(1-\lambda)z) \geq \min\{x(y), x(z)\}$;

3) x — полунепрерывно сверху, то есть для любого вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $\|y - y_0\| < \delta$, справедливо неравенство $x(y) < x(y_0) + \varepsilon$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве E^n является отображение

$$\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$$

Определение 1. *α-срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in \mathrm{E}^n$ при $0 < \alpha \leq 1$ назовем множество $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in \mathrm{E}^n$ назовем замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$.*

Теорема 1 ([16]). *Если $x \in \mathrm{E}^n$, то*

1) *$[x]^\alpha \in conv(\mathbb{R}^n)$ для всех $0 \leq \alpha \leq 1$;*

2) *$[x]^{\alpha_2} \subset [x]^{\alpha_1}$ для всех $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$;*

3) *если $\{\alpha_k\} \subset [0,1]$ — неубывающая последовательность, сходящаяся к $\alpha > 0$, то $[x]^\alpha = \bigcap_{k\geq 1} [x]^{\alpha_k}$.*

Наоборот, если $\{A^\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ — семейство подмножеств R^n, удовлетворяющих условиям 1)–3), то существует $x \in E^n$ такое, что $[x]^\alpha = A^\alpha$ для $0 < \alpha \leq 1$ и $[x]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\leq 1} A^\alpha} \subset A^0$.

Определим в пространстве E^n метрику $D : \mathrm{E}^n \times \mathrm{E}^n \to [0, +\infty)$, полагая

$$D(x, v) = \sup_{0\leq\alpha\leq 1} h([x]^\alpha, [v]^\alpha).$$

Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$.

Определение 2 ([16]). *Отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ называется сильно измеримым на I, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$ измеримо.*

Определение 3 ([16]). *Отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ называется непрерывным в точке $t_0 \in I$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $D(f(t), f(t_0)) < \varepsilon$ для всех $t \in I$ таких, что $|t - t_0| < \delta$. Отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ называется непрерывным на I, если оно непрерывно в каждой точке $t \in I$.*

Определение 4 ([16]). *Отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ называется интегрально ограниченным на I, если существует интегрируемая по Лебегу функция $k(t)$ такая, что $\|x\| \le k(t)$ для всех $x \in f_0(t),\ t \in I$.*

Определение 5 ([16]). *Интегралом от отображения $f : I \to \mathrm{E}^n$ по множеству I называется элемент $g \in \mathrm{E}^n$ такой, что $[g]^\alpha = \int_I f_\alpha(t)\,dt$ для всех $0 < \alpha \le 1$, где интеграл от многозначного отображения $f_\alpha(t)$ понимается в смысле Ауманна [10].*

Теорема 2 ([7]). *Если отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ сильно измеримо и интегрально ограничено, то f интегрируемо на I.*

Теорема 3 ([7]). *Пусть отображения $f, g : I \to \mathrm{E}^n$ интегрируемы на I и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда*

1) $\int_I (f(t) + g(t))\,dt = \int_I f(t)\,dt + \int_I g(t)\,dt$;

2) $\int_I \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_I f(t)\,dt$;

3) *функция $D(f(t), g(t))$ интегрируема по Лебегу на I;*

4) $D\left(\int_I f(t)\,dt, \int_I g(t)\,dt\right) \le \int_I D(f(t), g(t))\,dt$.

Определение 6 ([16]). *Отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ называется дифференцируемым в точке $t_0 \in I$, если для всех $\alpha \in [0,1]$ многозначное отображение $f_\alpha(t)$ дифференцируемо по Хукухаре [8] в точке t_0, его производная равна $Df_\alpha(t_0)$ и семейство множеств $\{Df_\alpha(t_0) : \alpha \in [0,1]\}$ определяет элемент $f'(t_0) \in \mathrm{E}^n$. Если отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ дифференцируемо в точке $t_0 \in I$, то $f'(t_0)$ называют нечеткой производной $f(t)$ в точке t_0. Отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ называется дифференцируемым на I, если оно дифференцируемо в каждой точке $t \in I$.*

Теорема 4 ([16]). *Пусть отображение $f : I \to \mathrm{E}^n$ дифференцируемо на I и предположим, что его нечеткая производная $f' : I \to \mathrm{E}^n$ интегрируема на I. Тогда для любого $t \in I$ имеем $f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'(s)\,ds$.*

Рассмотрим пространство $conv(\mathrm{E}^n)$, состоящее из всех подмножеств F пространства E^n таких, что для любого $\alpha \in [0,1]$ множество, составленное из α-срезок элементов множества F, является непустым выпуклым компактом в пространстве $conv(\mathbb{R}^n)$ (то есть элементом пространства $cocc(\mathbb{R}^n)$ [5]). В этом пространстве определим операции суммы и умножения на скаляр.

Определение 7. *Суммой двух множеств* F *и* G *из пространства* $conv(\mathrm{E}^n)$ *называется множество* $F+G=\{f+g : f\in F, g\in G\}$.

Определение 8. *Произведением множества* $F\in conv(\mathrm{E}^n)$ *на число* $\lambda\in\mathbb{R}$ *называется множество*

$$G=\lambda F=\{g=\lambda f : f\in F\}.$$

Лемма 1. *Если* $F,G\in conv(\mathrm{E}^n)$, *то* $F+G\in conv(\mathrm{E}^n)$.

Доказательство. В силу определения пространства $conv(\mathrm{E}^n)$, множества $F^\alpha=\{[f]^\alpha : f\in F\}$ и $G^\alpha=\{[g]^\alpha : g\in G\}$ являются непустыми выпуклыми компактами в пространстве $conv(\mathbb{R}^n)$ для любого $\alpha\in[0,1]$. Покажем, что множество

$$(F+G)^\alpha=\{[f+g]^\alpha : f\in F,\ g\in G\}$$
$$=\{[f]^\alpha+[g]^\alpha : f\in F,\ g\in G\}=F^\alpha+G^\alpha$$

также является элементом пространства $cocc(\mathbb{R}^n)$ для любого $\alpha\in[0,1]$.

Множество $F^\alpha+G^\alpha$ непусто как сумма двух непустых множеств. Докажем, что множество $F^\alpha+G^\alpha$ замкнуто. Пусть дана сходящаяся последовательность $\{x_k^\alpha\}_{k=1}^\infty\subset F^\alpha+G^\alpha$ и $\lim_{k\to\infty}x_k^\alpha=x^\alpha$. Требуется показать, что $x^\alpha\in F^\alpha+G^\alpha$. По определению суммы имеем $x_k^\alpha=f_k^\alpha+g_k^\alpha$, где $f_k^\alpha\in F^\alpha, g_k^\alpha\in G^\alpha$. Все элементы последовательности $\{f_k^\alpha\}_{k=1}^\infty$ принадлежат компактному множеству F^α, следовательно, найдется такая подпоследовательность данной последовательности (обозначим ее $\{f_{k_m}^\alpha\}_{m=1}^\infty$), что $\lim_{m\to\infty}f_{k_m}^\alpha=f^\alpha\in F^\alpha$. Аналогично из подпоследовательности $\{g_{k_m}^\alpha\}_{m=1}^\infty$ выделим такую подпоследовательность (которую обозначим $\{g_{k_{m_p}}^\alpha\}_{p=1}^\infty$), что $\lim_{p\to\infty}g_{k_{m_p}}^\alpha=g^\alpha\in G^\alpha$. Таким образом, для вектора x^α имеем:

$$x^\alpha=\lim_{k\to\infty}(f_k^\alpha+g_k^\alpha)=\lim_{p\to\infty}(f_{k_{m_p}}^\alpha+g_{k_{m_p}}^\alpha)$$
$$=\lim_{p\to\infty}f_{k_{m_p}}^\alpha+\lim_{p\to\infty}g_{k_{m_p}}^\alpha=f^\alpha+g^\alpha,$$

то есть $x^\alpha\in F^\alpha+G^\alpha$ и тем самым замкнутость множества $F^\alpha+G^\alpha$ доказана.

Введем в рассмотрение множества $F_\alpha=co\overline{\bigcup_{f\in F}[f]^\alpha}$ и $G_\alpha=co\overline{\bigcup_{g\in G}[g]^\alpha}$, которые являются непустыми выпуклыми компактами в пространстве $\mathbb{R}^n$ для любого $\alpha \in [0,1]$. Множество $F_\alpha + G_\alpha$ является непустым выпуклым компактом в пространстве $\mathbb{R}^n$ [3]. Множество H_α, состоящее из всевозможных подмножеств множества $F_\alpha + G_\alpha$, является компактом [7] в пространстве $conv(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, множество $F^\alpha + G^\alpha$ является подмножеством множества H_α по построению. Следовательно, множество $F^\alpha + G^\alpha$ компактно как замкнутое подмножество компактного множества.

Остается показать выпуклость множества $F^\alpha + G^\alpha$. Выберем произвольные множества $x, y \in F^\alpha + G^\alpha$, число $\lambda \in [0,1]$ и рассмотрим множество $\lambda x + (1-\lambda)y$. В силу определения существуют $[f_1]^\alpha, [f_2]^\alpha \in F^\alpha$ и $[g_1]^\alpha, [g_2]^\alpha \in G^\alpha$ такие, что $x = [f_1]^\alpha + [g_1]^\alpha$, $y = [f_2]^\alpha + [g_2]^\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}\lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda\left([f_1]^\alpha + [g_1]^\alpha\right) + (1-\lambda)\left([f_2]^\alpha + [g_2]^\alpha\right) \\ &= (\lambda[f_1]^\alpha + (1-\lambda)[f_2]^\alpha) + (\lambda[g_1]^\alpha + (1-\lambda)[g_2]^\alpha) \in F^\alpha + G^\alpha\end{aligned}$$

в силу выпуклости множеств F^α и G^α. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если $F \in conv(\mathrm{E}^n)$, то $\lambda F \in conv(\mathrm{E}^n)$.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1. □

Непосредственно по определению проверяется, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любых множеств $F, G, H \in conv(\mathrm{E}^n)$ выполняются следующие свойства:

1) $F + G = G + F$;

2) $F + (G + H) = (F + G) + H$;

3) относительно операции суммы существует нулевой элемент $\{\widehat{0}\}$: $F + \{\widehat{0}\} = F$;

4) в общем случае у множества F нет обратного элемента относительно введенной операции алгебраической суммы множеств;

5) $\alpha(\beta F) = (\alpha\beta)F$;

6) $1 \cdot F = F$;

7) $\alpha(F + G) = \alpha F + \beta G$;

8) если $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$, то $(\alpha+\beta)F = \alpha F + \beta F$, в противном случае $(\alpha+\beta)F \subset \alpha F + \beta F$.

Определение 9. *Метрикой, или расстоянием, между двумя множествами $F, G \in conv(\mathrm{E}^n)$ назовем величину*

$$d(F,G) = \max\Big\{ \max_{f\in F}\min_{g\in G} D(f,g),\ \max_{g\in G}\min_{f\in F} D(f,g)\Big\}.$$

Определим также расстояние от элемента $x \in \mathrm{E}^n$ до множества $F \in conv(\mathrm{E}^n)$:

$$\theta(x,F) = \min_{f\in F} D(x,f).$$

Определение 10. *Многозначным отображением будем называть произвольное отображение $F : I \to conv(\mathrm{E}^n)$.*

Определение 11. *Многозначное отображение $F(t)$ называется непрерывным в точке $t_0 \in I$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(t_0,\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство $d(F(t),F(t_0)) < \varepsilon$ выполняется для всех $t \in I$ таких, что $|t - t_0| < \delta(\varepsilon)$. Многозначное отображение $F(t)$ называется непрерывным на I, если оно непрерывно в любой точке $t_0 \in I$.*

Определение 12. *Функция $f : I \to \mathrm{E}^n$ называется однозначным селектором многозначного отображения $F : I \to conv(\mathrm{E}^n)$, если для всех $t \in I$ выполняется включение $f(t) \in F(t)$.*

Ясно, что однозначный селектор $f(t)$ всегда существует, поскольку множество $F(t)$ непусто при всех $t \in I$.

Из классической теоремы Майкла о непрерывном селекторе (см., например, [4]) вытекает следующее утверждение:

Теорема 5. *Пусть X — паракомпактное пространство, Y — банахово пространство. Тогда каждое непрерывное многозначное отображение $F : X \to conv(Y)$ имеет непрерывный однозначный селектор.*

Рассмотрим нечеткое дифференциальное включение

$$x' \in F(t,x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $t \in I$ — время, $x \in S \subset \mathrm{E}^n$ — фазовый вектор, $t_0 \in I,\ x_0 \in S$, $F : I \times S \to conv(\mathrm{E}^n)$.

Определение 13. *Непрерывно дифференцируемая функция* $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, *определенная на промежутке* $I_0 \subset I$, *называется классическим решением нечеткого дифференциального включения* (1), *если* $x(t) \in S$ *и* $x'(t) \in F(t, x(t))$ *всюду на* I_0.

Рассмотрим вопрос существования классического решения нечеткого дифференциального включения (1).

Теорема 6. *Пусть в области* $Q = \{(t, x) : \ |t - t_0| \le a,\ d(x, x_0) \le b\}$ *многозначное отображение* $F(t, x)$ *непрерывно. Тогда при* $|t - t_0| \le \sigma$, *где* $\sigma \in (0, a]$, *существует решение дифференциального включения* (1).

Доказательство. Как было отмечено в [6], существует изометрическое отображение $\gamma(\cdot)$ между пространством E^n и пространством Ω [6,8]. Обозначим через $X = \gamma(x),\ X_0 = \gamma(x_0),\ \tilde{F}(t, X) = \gamma(F(t, x)) = \{\gamma(f) : f \in F(t, x)\} \in conv(\Omega)$. Тогда включение (1) эквивалентно следующему включению

$$DX \in \widetilde{F}(t, X),\ X(t_0) = X_0 \tag{2}$$

в том смысле, что если $x(t)$ — решение включения (1), то $X(t) = \gamma(x(t))$ — решение включения (2), и наоборот. В силу того, что многозначное отображение $F(t, x)$ непрерывно в области Q, то многозначное отображение $\widetilde{F}(t, X)$ непрерывно при $\{(t, x) : \ |t - t_0| \le a$, $\rho(X, X_0) \le b'\}$, где $\rho(\cdot, \cdot)$ — метрика в пространстве Ω. Тогда в силу теоремы 5 у отображения $\widetilde{F}(t, X)$ существует непрерывный однозначный селектор, который обозначим через $f(t, X)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$DX = f(t, X), \qquad X(t_0) = X_0. \tag{3}$$

В силу [8] существует решение $\widetilde{X}(t)$ уравнения (3), определенное при $|t - t_0| \le \sigma$, где $\sigma \in (0, a]$. Тогда $\widetilde{X}(t)$ является решением дифференциального включения (2), а следовательно, функция $\widetilde{x}(t) = \gamma^{-1}(\widetilde{X}(t))$ является решением нечеткого дифференциального включения (1), что и требовалось доказать. □

Замечание 1. Подход, который использовался при доказательстве существования решений для нечетких дифференциальных уравнений [16] (то есть переход к дифференциальным уравнениям с производной Хукухары по α-срезкам), здесь не может быть использован, так как при выборе однозначного селектора в соответствующей α-срезке можно получить семейство множеств, не удовлетворяющих условиям теоремы 1, то есть являющихся α-срезками различных нечетких множеств.

Следующая теорема является теоремой существования и непрерывной зависимости решений нечеткого дифференциального включения (1) от параметра.

Теорема 7. *Пусть многозначное отображение* $F : Q \to conv(\mathrm{E}^n)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $F(t,x)$ *непрерывно;*

2) $F(t,\cdot)$ *липшицево по* x *с постоянной* $k > 0$, *то есть для любых точек* $(t,x),(t,y) \in Q$ *справедливо неравенство*

$$d(F(t,x),F(t,y)) \le kD(x,y);$$

3) *существует непрерывно дифференцируемое отображение* $y(t)$, $y(t_0) = y_0$, *такое, что* $D(y(t),x_0) \le b$ *и* $\theta(y'(t),F(t,y(t))) \le \eta(t)$ *для всех* $t : |t - t_0| \le a$, *где функция* $\eta(t)$ *непрерывна.*

   Тогда на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ *существует решение* $x(t)$ *нечеткого дифференциального включения* (1) *такое, что* $D(x(t),y(t)) \le r(t)$, *где*

$$r(t) = r_0 e^{k(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{k(t-s)}\eta(s)\,ds,\ r_0 = D(x_0,y_0),$$

$$\sigma = \min\Big\{a, \frac{b}{M}\Big\}, \qquad M = \max_{(t,x)\in Q} d(F(t,x),\{\widehat{0}\}).$$

Доказательство. Построим две последовательности отображений $y_m, v_m : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathrm{E}^n$ следующим образом:

$$y_0(t) = y(t), \qquad v_0(t) = y'(t),$$

$$y_m(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v_m(s)\,ds, \qquad m = 1,2,\dots, \tag{4}$$

а непрерывное отображение $v_m(t) \in F(t, y_{m-1}(t)),\ m = 1,2,\dots$, выбирается так, чтобы

$$D(v_{m-1}(t), v_m(t)) = \theta(v_{m-1}(t), F(t, y_{m-1}(t))). \tag{5}$$

В силу выбора σ все отображения $y_m(t)$ определены при $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ и удовлетворяют условию $D(y_m(t), x_0) \leq b$. Используя (4) и (5), оценим:

$$D(v_0(t), v_1(t)) = \theta(v_0(t), F(t, y_0(t))) = \theta(y'(t), F(t, y(t))) \leq \eta(t),$$

$$D(y_0(t), y_1(t)) = D\left(y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v_0(s)\,ds,\ x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v_1(s)\,ds\right)$$
$$\leq D(x_0, y_0) + \int\limits_{t_0}^{t} D(v_0(s), v_1(s))\,ds \leq r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \eta(s)\,ds. \quad (6)$$

Поскольку многозначное отображение $F(t,x)$ по фазовой переменной удовлетворяет условию Липшица, получим

$$D(v_1(t), v_2(t)) = \theta(v_1(t), F(t, y_1(t))) \leq d(F(t, y_0(t)), F(t, y_1(t)))$$
$$\leq kD(y_0(t), y_1(t)) \leq kr_0 + k\int\limits_{t_0}^{t} \eta(s)\,ds, \quad (7)$$

$$D(y_1(t), y_2(t)) = D\left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v_1(s)\,ds,\ x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v_2(s)\,ds\right)$$
$$\leq \int\limits_{t_0}^{t} D(v_1(s), v_2(s))\,ds \leq \int\limits_{t_0}^{t} \left(kr_0 + k\int\limits_{t_0}^{s} \eta(\tau)d\tau\right) ds$$
$$= kr_0(t-t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} k\eta(\tau)\,d\tau\,ds = kr_0(t-t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\tau}^{t} k\eta(\tau)\,ds\,d\tau$$
$$= kr_0(t-t_0) + k\int\limits_{t_0}^{t} (t-s)\eta(s)\,ds. \quad (8)$$

Используя метод полной математической индукции, установим оценки

$$D(v_m(t), v_{m+1}(t)) \leq \frac{k^m r_0 (t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$+\frac{k^m}{(m-1)!}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{m-1}\eta(s)\,ds, \quad (9)$$

$$D(y_m(t),y_{m+1}(t))\le\frac{k^m r_0(t-t_0)^m}{m!} + \frac{k^m}{m!}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^m\eta(s)\,ds, \qquad m=1,2,\dots \quad (10)$$

При $m=1$ неравенства (9) и (10) справедливы в силу (7) и (8). Предположим, что неравенства (9) и (10) имеют место при некотором натуральном m. Покажем, что они остаются справедливыми при $m+1$. Имеем

$$\begin{aligned}D(v_{m+1}(t),v_{m+2}(t))&\le\theta(v_{m+1}(t),F(t,y_{m+1}(t)))\\&\le d(F(t,y_m(t)),F(t,y_{m+1}(t)))\le kD(y_m(t),y_{m+1}(t))\\&\le\frac{k^{m+1}r_0(t-t_0)^m}{m!}+\frac{k^{m+1}}{m!}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^m\eta(s)\,ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&D(y_{m+1}(t),y_{m+2}(t))\\&=D\Bigg(x_0+\int\limits_{t_0}^{t}v_{m+1}(s)\,ds,x_0+\int\limits_{t_0}^{t}v_{m+2}(s)\,ds\Bigg)\\&\le\int\limits_{t_0}^{t}D(v_{m+1}(s),v_{m+2}(s))\,ds\\&\le\int\limits_{t_0}^{t}\Bigg(\frac{k^{m+1}r_0(s-t_0)^m}{m!}+\frac{k^{m+1}}{m!}\int\limits_{t_0}^{s}(s-\tau)^m\eta(\tau)\,d\tau\Bigg)ds\\&=\frac{k^{m+1}r_0(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!}+\frac{k^{m+1}}{m!}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}(s-\tau)^m\eta(\tau)\,d\tau\,ds\\&=\frac{k^{m+1}r_0(t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!}+\frac{k^{m+1}}{m!}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\tau}^{t}(s-\tau)^m\eta(\tau)\,ds\,d\tau\end{aligned}$$

$$= \frac{k^{m+1} r_0 (t-t_0)^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{k^{m+1}}{(m+1)!} \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{m+1} \eta(s)\, ds,$$

что и требовалось доказать.

В силу (9) функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} D(v_m(t), v_{m+1}(t))$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$, где

$$c_m = k(r_0 + \zeta) \frac{(k\sigma)^{m-1}}{(m-1)!}, \qquad \zeta = \int\limits_{t_0}^{t_0+\sigma} \eta(s)\, ds.$$

Поэтому последовательность отображений $v_m(t)$ сходится равномерно на отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$ к некоторому непрерывному отображению $v(t)$. Аналогично, последовательность отображений $y_m(t)$ сходится равномерно на отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$ к некоторому непрерывному отображению $x(t)$. Переходя в (4) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(s)\, ds, \qquad v(t) \in F(t, x(t)). \tag{11}$$

Предельное отображение $x(t)$ является непрерывно дифференцируемым в силу (11), следовательно, $x(t)$ — решение нечеткого дифференциального включения (1). Осталось показать, что имеет место оценка $D(x(t), y(t)) \le r(t)$. На основании (6) и (10) имеем

$$\begin{aligned} D(x(t), y(t)) &\le D(y(t), y_1(t)) + \sum_{m=1}^{\infty} D(y_m(t), y_{m+1}(t)) \\ &\le r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \eta(s)\, ds + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{k^m r_0 (t-t_0)^m}{m!} + \frac{k^m}{m!} \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^m \eta(s)\, ds \right) \\ &= r_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k(t-t_0))^m}{m!} + \int\limits_{t_0}^{t} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k(t-s))^m}{m!} \right) \eta(s)\, ds \\ &= r_0 e^{k(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{k(t-s)} \eta(s)\, ds, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Пусть* x_0 *и* y_0 — *два начальных множества,* $D(x_0, y_0) = r_0$. *Тогда любому решению* $y(t)$ *включения* (1), $y(t_0) = y_0$, *можно поставить в соответствие такое решение* $x(t)$ *включения* (1), $x(t_0) = x_0$, *что справедливо неравенство* $D(x(t), y(t)) \leq r_0 e^{k\sigma}$ *для всех* $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, *то есть имеет место непрерывная зависимость решений от начальных данных (в предыдущей теореме положим* $\eta(t) \equiv 0$).

Следствие 2. *Пусть многозначные отображения* $F, G : Q \to conv(\mathrm{E}^n)$ *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 7 *и* $d(F(t,x), G(t,x)) \leq \eta(t)$ *для всех* $t : |t - t_0| \leq a$, *где функция* $\eta(t)$ *непрерывна. Тогда любому решению* $y(t)$ *включения* $y' \in G(t,y)$, $y(t_0) = x_0$, *можно поставить в соответствие такое решение* $x(t)$ *включения* (1), $x(t_0) = x_0$, *что справедливо неравенство* $D(x(t), y(t)) \leq \int_{t_0}^{t} e^{k(t-s)} \eta(s)\, ds$ *для всех* $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, *то есть имеет место непрерывная зависимость решений от правых частей.*

Следствие 3. *Пусть многозначное отображение* $F : Q \to conv(\mathrm{E}^n)$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 7. *Тогда существует классическое решение нечеткого дифференциального включения* (1) *(в качестве отображения* $y(t)$ *достаточно выбрать* $y(t) \equiv x_0$).

Замечание 2. Доказательство теоремы 7 можно также провести, используя подход, который был применен для доказательства теоремы 6, то есть переход в пространство Ω.

Замечание 3. Нечеткие дифференциальные включения в работах [1,2,9,12,15] возникают в результате перехода к $\alpha-$ срезкам нечеткого отображения $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{E}^n$, в данной же статье рассматриваются дифференциальные включения, когда $F : I \times \mathrm{E}^n \to conv(\mathrm{E}^n)$, что является обобщением результатов, полученных в [5,6] для дифференциальных включений с производной Хукухары на нечеткий случай. В случае, когда $F : I \times \mathrm{E}^n \to \mathrm{E}^n$, рассматриваемые дифференциальные включения вырождаются в дифференциальные уравнения, введенные в [13].

Литература

[1] В. А. Байдосов, *Дифференциальные включения с нечеткой правой частью* // Доклады АН СССР. **309** (1989), N 4, 781–783.

[2] В. А. Байдосов, *Нечеткие дифференциальные включения* // Прикладная математика и механика. **54** (1990), вып. 1, 12–17.

[3] В. И. Благодатских, *Введение в оптимальное управление.* М.: Высш. шк., 2001, 239 с.

[4] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений.* М.: КомКнига, 2005, 216 с.

[5] Т. А. Комлева, А. В. Плотников, *Дифференциальные включения с производной Хукухары* // Нелінійні коливання. **10** (2007), N 2, 229–246.

[6] Т. А. Комлева, А. В. Плотников, Н. В. Скрипник, *Ω-пространство и его связь с теорией нечетких множеств* // Труды Одесского политехнического университета. **28** (2007), вып. 2, 182–191.

[7] Е. С. Половинкин, *Теория многозначных отображений.* М.: Изд-во МФТИ, 1983, 108 с.

[8] Н. В. Скрипник, Т. А. Комлева, *Нечеткие дифференциальные уравнения* // Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation: Thesis of conference reports (May 22–25, 2007). Kyiv: Kiev Nat. University named after Taras Shevchenko, 2007. P. 91.

[9] J.-P. Aubin, *Fuzzy differential inclusions* // Problems of control and information theory. **19** (1990), N 1, 55–67.

[10] R. J. Aumann, *Integrals of set-valued functions* // J. Math. Anal. Appl. (1965), N 12, 1–12.

[11] M. Hukuhara, *Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe* // Func. Ekvacioj. (1967), N 11, 205–223.

[12] E. Hullermeier, *An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system* // Internat. J. Uncertainty, Fuzziness Knoeledge-Based Systems. (1997), N 7, 117–137.

[13] O. Kaleva, *Fuzzy differential equations* // Fuzzy sets and systems. **24** (1987), N 3, 301–317.

[14] O. Kaleva, *The Cauchy problem for fuzzy differential equations* // Fuzzy sets and systems. **35** (1990), N 3, 389–396.

[15] V. Laksmikantham, A. A. Tolstonogov, *Existence and interrelation between set and fuzzy differential equations* // Nonlinear Analysis. **55** (2003), 255–268.

[16] J. Y. Park, H. K. Han, *Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations* // Internat. J. Math. and Math. Sci. **22** (1999), N 2, 271–279.

[17] M. L. Puri, D. A. Ralescu, *Differential of fuzzy functions* // J. Math. Anal. Appl. **91** (1983), 552–558.

[18] M. L. Puri, D. A. Ralescu, *Fuzzy random variables* // J. Math. Anal. Appl. **114** (1986), N 2, 409–422.

[19] S. Seikkala, *On the fuzzy initial value problem* // Fuzzy Sets and Systems. **24** (1987), N 3, 319–330.

[20] S. J. Song, C. X. Wu, *Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations* // Fuzzy Sets and Systems. **111** (2000), 55–67.

[21] L. Zadeh, *Fuzzy sets* // Inform. and Control. (1965), N 8, 338–353.

Сведения об авторах

Наталия Викторовна Скрипник

Одесский национальный университет
им. И. И. Мечникова,
ул. Дворянская 2,
65026, Одесса,
Украина
E-Mail: natalia.scripnik@gmail.com