Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 2, 219 – 243

Подобие вольтерровых операторов в пространствах Лебега вектор-функций

Галина С. Ромащенко

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. В работе описаны достаточные условия подобия вольтеррового оператора вида $K : f \to \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt$ оператору $J \otimes B$ в пространствах Лебега вектор-функций, где $J : f \to \int_0^x f(t)\, dt$ — оператор интегрирования, а B — 2×2-матрица, собственные значения которой противоположны по знаку.

2000 MSC. 47G10, 45D05, 45P05, 45Q05.

Ключевые слова и фразы. Подобие операторов, вольтерров оператор, обратная задача, оператор преобразования.

1. Введение

Напомним, что два ограниченных линейных оператора A_1 и A_2, действующие в банаховом пространстве X, называются подобными, если существует ограниченный и ограниченно обратимый оператор T в X такой, что $TA_1T^{-1} = A_2$.

В настоящей работе изучается подобие вольтерровых операторов K вида

$$K : f \longrightarrow \int_0^x k(x,t) f(t)\, dt, \qquad f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \in L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n \tag{1.1}$$

с $n \times n$-матричным ядром $k(x,t)$ оператору $J \otimes B$ в пространствах $L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n$, где J — оператор интегрирования:

Статья поступила в редакцию 24.04.2008
Автор благодарит своего научного руководителя М. М. Маламуда за постановку задачи, ценные замечания и общее руководство работой.

$$J : f \longrightarrow \int_0^x f(t)\,dt, \tag{1.2}$$

и B — невырожденная $n \times n$-матрица.

Задача о подобии вольтерровых операторов оператору $J \otimes B$ естественным образом возникает при изучении обратных задач для системы дифференциальных уравнений [2,3,8,14–16], при описании решеток инвариантных и гиперинвариантных подпространств вольтерровых операторов, а также при исследовании треугольной модели М. С. Лившица [1,2].

Наиболее полно подобие вольтерровых операторов изучено в скалярном случае ($n = 1$). Так, первые результаты в этом направлении получены Л. А. Сахновичем [17] и Г. К. Калишем [22,23]. Именно, они нашли достаточные условия на ядро $k(x,t)$, при которых оператор K подобен в $L_p[0,1]$ оператору интегрирования J или его целым степеням J^m.

Эти результаты были существенно усилены и дополнены в последующих работах [7,9,11,18–20].

Отметим также, что в работах Р. Франкфурта и Дж. Ровняка [18,19] и М. М. Маламуда [11] изучалось подобие оператора вида (1.1) с ядром, зависящим от разности аргументов ($k(x,t) = k(x-t)$), дробным степеням оператора интегрирования J^α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Более того, в работах [10,11] для некоторых классов операторов свертки найден критерий их подобия J^α в $L_p[0,1]$.

Наиболее полный результат о подобии операторов K и J в $L_p[0,1]$ был получен М. М. Маламудом в [12] (см. также [13]), где наиболее существенное из достаточных условий имело вид: $D_x D_t k(\cdot,\cdot) \in L_1(\Omega)$ ($\Omega = \{0 < t < x < 1\}$).

Отметим также недавнюю работу Г. М. Губреева [4], в которой найдена связь подобия диссипативного вольтеррового оператора с базисностью системы собственных и присоединенных векторов его одномерного возмущения. В рамках этого подхода он получил следующий результат.

Теорема 1.1 ([4]). *Пусть K — вольтерровый диссипативный оператор вида*

$$(Kf)(x) = i\int_0^x \Pi(x)\Pi^*(t) f(t)\,dt, \tag{1.3}$$

где $\Pi(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ *— произвольная вектор-функция, компоненты которой линейно независимы и принадлежат пространству* $L_2[0,a]$*, и выполнено условие нормировки* $\Pi(x)\Pi^*(x) = 1$ *п. в. на* $[0,a]$*. Пусть также вектор-функция* $\Pi(x)$ *является кусочно абсолютно непрерывной на отрезке* $[0,a]$*. Тогда оператор* K *вида* (1.3) *подобен оператору интегрирования* J *в точности тогда, когда* $\Pi(x-0)\Pi^*(x+0) \neq 0$ *при всех* $x \in (0,a)$*.*

Этот результат для рассматриваемого случая диссипативного оператора усиливает соответствующие результаты М. М. Маламуда из [12, 13].

Отметим, что подобие оператору J обеспечивает одноклеточность оператора K вида (1.1) в $L_p[0,1]$, ($p \in [1, +\infty)$).

Перейдем к рассмотрению операторов в пространстве вектор-функций. Здесь первые результаты о подобии вольтеррового оператора K вида (1.1) оператору $J \otimes B$ получены Л. А. Сахновичем [16]. Именно, он указал достаточные условия подобия в $L_2[0,1] \otimes \mathbb{C}^n$ для случая $B = \operatorname{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2})$, ($n = n_1 + n_2$). Отметим, что этот результат тесно связан с существованием оператора преобразования для системы Дирака, установленным ранее разными методами в [8, 15].

Отметим также работу [21], в которой с помощью дальнейшего развития техники Р. Франкфурта и Дж. Ровняка получен результат о подобии оператору $J \otimes I_n$.

М. М. Маламуд в [14] получил достаточные условия подобия оператора K вида (1.1) оператору $J \otimes B$ в случае произвольной невырожденной матрицы $B = B^* = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$. Именно, в [14] доказан следующий результат.

Теорема 1.2 ([14]). *Пусть* $n \times n$*-матричное ядро* $k(x,t)$ *оператора* K *вида* (1.1) *удовлетворяет следующим условиям:*

1. $B := k(x,x)$ *— постоянная невырожденная матрица с действительным спектром и простыми элементарными делителями;*

2. $k(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* x *при п.в.* $t \in [0,1]$ *и* $k_1(x,t) := D_x k(x,t) \in L_\infty(\Omega) \otimes \mathbb{C}^{n^2}$*;*

3. *$k_1(x,t)$ абсолютно непрерывна по t при п.в. $x \in [0,1]$ и $D_t k_1(x,t) = D_t D_x k(x,t) \in L_\infty(\Omega) \otimes \mathbb{C}^{n^2}$, где $\Omega = \{0 \le t \le x \le 1\}$.*

Тогда оператор K подобен оператору $J \otimes B$ в $L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^2$, $(1 \le p \le \infty)$.

Отметим еще, что весьма частный случай теоремы 1.2 получен в докторской диссертации А. Л. Сахновича. (см. [14, замечание 1.3]).

В данной работе мы усиливаем теорему 1.2 для случая 2×2-матрицы $B = \operatorname{diag}(a,b)$. Именно, мы доказываем справедливость следующей теоремы:

Теорема 1.3. *Пусть 2×2-матричное ядро $k(x,t)$ оператора K удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$B := k(x,x)$ — постоянная невырожденная матрица с собственными значениями a и b разных знаков, т.е. $ab < 0$;*

2. *$k(x,t)$ абсолютно непрерывна по x при п.в. $t \in [0,1]$;*

3. *оператор K_1 с ядром $k_1(x,t) := D_x k(x,t)$ слабо компактен в $L_1[0,1] \otimes \mathbb{C}^{2\times 2}$ и $k_1(x,x) \in L_1[0,1] \otimes \mathbb{C}^{2\times 2}$;*

4. *$k_1(x,t)$ абсолютно непрерывна по t при п.в. $x \in [0,1]$ и $D_t k_1(x,t) = D_t D_x k(x,t) \in L_1(\Omega) \otimes \mathbb{C}^{2\times 2}$, где $\Omega = \{0 < t < x < 1\}$.*

Тогда оператор K подобен оператору $J \otimes B$ в $L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^2$ при $p \in [1, +\infty]$.

Этот результат позволяет, в частности, исследовать решетку инвариантных и гиперинвариантных подпространств оператора K, используя соответствующие результаты для $J \otimes B$ (см. [6, 24]).

Мы докажем теорему 1.3, модифицируя доказательство теоремы 1.1 из [14].

В статье приняты следующие обозначения:

$\mathbb{C}^{n\times n} = [\mathbb{C}^n]$ — алгебра n-мерных матриц в $\mathbb{C}^n$;

I_n — единичная матрица в $\mathbb{C}^{n\times n}$;

$W_p^k[0,1]$ — пространство Соболева функций f, принадлежащих пространству $L_p[0,1]$ и имеющих обобщенные производные $f^{(l)} \in L_p[0,1]$, $l \in 0,\dots,k$;

$W_{p,0}^k[0,1] = \{f \in W_p^k[0,1] : \ f(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0\}$.

Следуя [12, 13], обозначим B_1 и B_2 — банаховы пространства, состоящие из измеримых на $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < t < 1\}$ функций, для которых

$$\|f\|_{B_1} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,1]} \int\limits_0^x |f(x,y)|\,dy < +\infty,$$

$$\|f\|_{B_2} = \operatorname*{ess\,sup}_{y\in[0,1]} \int\limits_y^1 |f(x,y)|\,dx < +\infty$$

соответственно.

2. Доказательство теоремы 1.3

2.1. Общий вид оператора K^{-1}

Найдем общий вид оператора K^{-1}. Для этого продифференцируем равенство $Kf = g$. Из условий 1 и 2 теоремы имеем:

$$I + K_1 : f \to (I \otimes B)\left[f(x) + \int\limits_0^x B^{-1}k_1(x,t)f(t)\,dt\right] = \frac{dg}{dx}, \quad g(0) = 0,$$

где $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$, $k_1(x,t) = D_x k(x,t)$.

Поскольку оператор K_1 слабо компактен в $L_1[0,1] \otimes \mathbb{C}^{2\times 2}$, то оператор K_1^2 компактен в $L_1[0,1] \otimes \mathbb{C}^{2\times 2}$, а следовательно, оба эти оператора вольтерровы, т.е. имеют нулевой спектральный радиус $r(K_1) = r(K_1^2) = 0$ (см. [5]). Поэтому оператор $I + K_1$ обратим, причем обратный оператор имеет следующий вид:

$$(I + K_1)^{-1} = I + P : f \to f(x) + \int\limits_0^x P(x,t)f(t)\,dt. \tag{2.1}$$

При этом ядра операторов K_1 и P связаны следующим соотношением:

$$P(x,t) + B^{-1}k_1(x,t) + \int\limits_t^x P(x,s)B^{-1}k_1(s,t)\,ds = 0. \tag{2.2}$$

Из условия 4 теоремы и (2.2) заключаем, что ядро $P(x,t)$ при почти всех $x \in [0,1]$ абсолютно непрерывно по переменной t. Преобразуем (2.1), проинтегрировав по частям, получим:

$$f(x) = K^{-1}g(x) = (I \otimes B^{-1})\frac{dg}{dx} + \int\limits_0^x P(x,t)B^{-1}g'(t)\,dt$$

$$= B^{-1}\frac{dg}{dx} + P(x)g(x) - \int_0^x P_1(x,t)g(t)\,dt, \quad (2.3)$$

где

$$P(x) = P(x,x)B^{-1}, \qquad P_1(x,t) = D_t P(x,t)B^{-1}. \quad (2.4)$$

Из условия 1 теоремы следует, что матрица B может быть приведена к диагональному виду: $S^{-1}BS = B_1$. Здесь S — линейный ограниченный и ограниченно обратимый в $\mathbb{C}^2$ оператор, а $B_1 = \mathrm{diag}(a,b)$ — диагональная матрица. Таким образом, заменяя оператор K^{-1} на оператор $(I \otimes S^{-1})K^{-1}(I \otimes S)$, если это необходимо, можем считать, что матрица B^{-1} является диагональной.

2.2. Дальнейшее упрощение оператора K^{-1}

Представим матрицу $P(x)$ в виде $P(x) = \{P_{ij}(x)\}_{i,j=1}^2$ относительно разложения $\mathbb{C}^2 = \ker\,(B - aI_2) \oplus \ker\,(B - bI_2)$.

Пусть $V(x)$ — решение следующей задачи Коши:

$$V'(x) = -BP_1(x)V(x), \quad V(0) = I_2, \quad (2.5)$$

где $P_1(x)$ — квазидиагональная матрица вида

$$P_1(x) := \mathrm{diag}\,(P_{11}(x), P_{22}(x)).$$

Поскольку $P_1(x)B = BP_1(x)$ для любого $x \in [0,1]$, то из (2.5) следует, что для матриц-функций $V_1(x) = BV(x)$ и $V_2(x) = V(x)B$ выполняются следующие соотношения:

$$V_j'(x) = -BP_1(x)V_j(x), \quad V_j(0) = B \quad (j = 1,2).$$

Из теоремы о единственности решения задачи Коши следует, что $V_1(x) = V_2(x)$, т.е. выполнено соотношение:

$$V(x)B = BV(x) \qquad \forall\, x \in [0,1]. \quad (2.6)$$

Полагая $L_0 = (I \otimes V^{-1})K^{-1}(I \otimes V)$ и учитывая равенство (2.5), получим:

$$L_0 g = V^{-1}B^{-1}V(x)g'(x)$$
$$+ V^{-1}B^{-1}V'(x)g + V^{-1}(x)P(x)V(x)g$$

$$
\begin{aligned}
&- \int\limits_0^x V^{-1}(x)P_1(x,t)V(t)g(t)\,dt \\
&\qquad = B^{-1}\frac{dg}{dx} + Q(x)g(x) - \int\limits_0^x M(x,t)g(t)\,dt,
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

где

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= V^{-1}(x)(P(x) - P_1(x))V(x),\\
M(x,t) &= V^{-1}(x)P_1(x,t)V(t).
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Из соотношения (2.6) следует, что $V(x)$ является квазидиагональной:

$$
V(x) = \operatorname{diag}(V_{11}(x), V_{22}(x)). \tag{2.9}
$$

Тогда из (2.8) и (2.9) следует, что диагональные элементы матрицы $Q(x)$ относительно разложения $\mathbb{C}^2 = \ker(B-aI_2)\oplus\ker(B-bI_2)$ равны нулю:

$$
Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12}(x) \\ Q_{21}(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}
$$

Таким образом, оператор K^{-1} с областью определения $D(K^{-1}) = W^1_{p,0}[0,1]\otimes\mathbb{C}^2$ подобен в $L_p[0,1]\otimes\mathbb{C}^2$ оператору

$$
L_0 : f \to B^{-1}\frac{df}{dx} + Q(x)f(x) - \int\limits_0^x M(x,t)f(t)\,dt, \quad f(0) = 0 \tag{2.11}
$$

с матричным потенциалом $Q(x)$ вида (2.10) и той же областью определения $W^1_{p,0}[0,1]\otimes\mathbb{C}^2$.

2.3. Конструкция оператора $I + R$, сплетающего операторы L_0 и $B^{-1}\otimes D_0$

В данном разделе будет установлено подобие операторов L_0 и $B^{-1}\otimes D_0$, где D_0 — сужение оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$ на $W^1_{p,0}[0,1]$. Именно, будет построен треугольный оператор $I + R$,

$$
I + R : f(x) \to f(x) + \int\limits_0^x R(x,t)f(t)\,dt, \tag{2.12}
$$

который сплетает операторы L_0 и $B^{-1}\otimes D_0$:

$$L_0(I+R)=(I+R)B^{-1}\otimes D_0. \tag{2.13}$$

Здесь $R(x,t)$ — 2×2-матрица.

Предположим, что $R(x,t)\in W_1^1(\Omega)\otimes\mathbb{C}^{2\times 2}$. Подставляя выражения (2.11) для L_0 и (2.12) для $I+R$ в (2.13), получим

$$\begin{aligned}&\left[B^{-1}R(x,x)-R(x,x)B^{-1}+Q(x)\right]f(x)\\&\quad+\int\limits_0^x\Bigg[B^{-1}D_xR(x,t)+D_tR(x,t)B^{-1}+Q(x)R(x,t)+M(x,t)\\&\qquad+\int\limits_t^x M(x,s)R(s,t)\,ds\Bigg]f(t)\,dt+R(x,0)B^{-1}f(0)=0.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Поскольку $f(0)=0$ и $f(x)$ — произвольная функция из $W_{p,0}^1[0,1]\otimes\mathbb{C}^2$, то уравнение (2.14) эквивалентно системе

$$\begin{aligned}&B^{-1}D_xR(x,t)+D_tR(x,t)B^{-1}+Q(x)R(x,t)+M(x,t)\\&\qquad\qquad+\int\limits_t^x M(x,s)R(s,t)\,ds=0,\\&R(x,x)B^{-1}-B^{-1}R(x,x)=Q(x).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Введем некоторые обозначения. Пусть

$$\mu_1:=\frac{1}{a},\quad \mu_2:=\frac{1}{b},\quad k_{ij}:=\frac{\mu_j}{\mu_i},\quad (1\le i,j\le 2). \tag{2.16}$$

Запишем условия (2.15) в блочно-матричном виде относительно разложения $\mathbb{C}^2=\ker(B-aI_2)\oplus\ker(B-bI_2)$. Учитывая обозначения (2.16), получим:

$$\begin{aligned}&\mu_iD_xR_{ij}(x,t)+\mu_jD_tR_{ij}(x,t)\\&\quad=-M_{ij}(x,t)-\sum_{s=1}^{2}\left(Q_{is}(x)R_{sj}(x,t)+\int\limits_t^x M_{is}(x,u)R_{sj}(u,t)\,du\right),\\&\qquad\qquad (1\le i,j\le 2),\end{aligned} \tag{2.17}$$

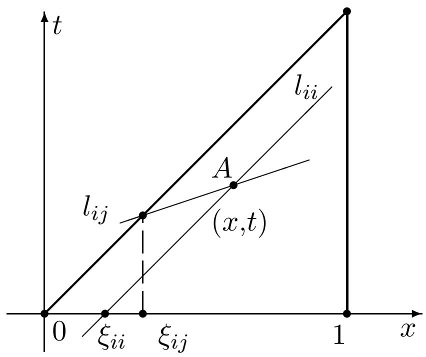
$$R_{ij}(x,x) = -\frac{Q_{ij}(x)}{\mu_i - \mu_j}, \qquad (i \neq j), \tag{2.18}$$

напомним, что $Q_{ii} = 0$.

Система (2.17), (2.18) является гиперболической с характеристиками следующего вида:

$$l_{ij} \,:\, t = k_{ij}x + c.$$

Таким образом, перед нами неполная задача Коши (2.17), (2.18) в треугольнике $\triangle := \{0 \leq t \leq x \leq 1\}$ с двумя условиями. Заметим, что характеристики l_{ij} $(i \neq j)$ имеют отрицательный угловой коэффициент наклона, поскольку a и b противоположного знака по условию 1 теоремы. Поэтому характеристики, проходящие через произвольную точку $A(x,t)$ треугольника $\triangle$ пересекают диагональ $\Gamma = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ внутри треугольника $\triangle$ (см. рисунок).



Добавим к нашей системе (2.17), (2.18) условия на границе области $\triangle$:

$$R_{ii}(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \quad (1 \leq i \leq 2). \tag{2.19}$$

Покажем, что задача Гурса (2.17)–(2.19) в треугольнике $\triangle$ имеет решение. Для этого проинтегрируем систему (2.17) вдоль характеристики, используя при этом условия (2.17) и (2.19). Имеем:

$$\begin{aligned} R_{ij}(x,t) = \frac{Q_{ij}(\xi_{ij}(x,t))}{\mu_j - \mu_i} - \frac{1}{\mu_i} \int\limits_{\xi_{ij}(x,t)}^{x} M_{ij}(\xi, (\xi - x)k_{ij} + t)\, d\xi \\ - \frac{1}{\mu_i} \sum_{s=1}^{2} \left(\int\limits_{\xi_{ij}(x,t)}^{x} Q_{is}(\xi) R_{sj}(\xi, (\xi - x)k_{ij} + t)\, d\xi \right. \\ \left. + \int\limits_{\xi_{ij}(x,t)}^{x} d\xi \int\limits_{(\xi - x)k_{ij} + t}^{\xi} M_{is}(\xi, u) R_{sj}(u, (\xi - x)k_{ij} + t)\, du \right). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Здесь

$$\xi_{ij}(x,t) = \begin{cases} (\mu_j x - \mu_i t)(\mu_j - \mu_i)^{-1} & \text{для } i \neq j; \\ x - t & \text{для } i = j. \end{cases} \tag{2.21}$$

В (2.20) мы считаем, что

$$\frac{Q_{ij}(\xi_{ij}(x,t))}{(\mu_i - \mu_j)} = 0 \qquad \text{для } i = j. \tag{2.22}$$

2.4. Существование решения уравнения (2.20)

Проверим, что в условиях теоремы существует единственное решение $R_{ij}(x,t)$, которое принадлежит пространствам B_1 и B_2, а, следовательно, оператор R с ядром $R(x,t)$ ограничен в любом $L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^2$, $p \in [1, +\infty]$.

Именно, докажем существование решения системы (2.20) методом последовательных приближений, полагая

$$R_{ij}^{(0)}(x,t) = \frac{Q_{ij}(\xi_{ij}(x,t))}{\mu_j - \mu_i} - \frac{1}{\mu_i} \int\limits_{\xi_{ij}(x,t)}^{x} M_{ij}(\xi, (\xi - x)k_{ij} + t)\, d\xi. \tag{2.23}$$

Далее, для $m \geq 1$:

$$R_{ij}^{(m)}(x,t) = -\frac{1}{\mu_i} \sum_{s=1}^{2} \Bigg(\int\limits_{\xi_{ij}(x,t)}^{x} Q_{is}(\xi) R_{sj}^{(m-1)}(\xi, (\xi - x)k_{ij} + t)\, d\xi$$

$$+ \int\limits_{\xi_{ij}(x,t)}^{x} d\xi \int\limits_{(\xi - x)k_{ij} + t}^{\xi} M_{is}(\xi, u) R_{sj}^{(m-1)}(u, (\xi - x)k_{ij} + t)\, du \Bigg). \tag{2.24}$$

Оценим норму $R_{ij}^{(m)}(x,t)$ в пространствах B_1 и B_2.

Обозначим

$$G(x)=\sum_{i,j=1}^{2}\int\limits_{0}^{x}\left(|Q_{ij}(\xi)|+\int\limits_{0}^{\xi}|M_{ij}(\xi,u)|\,du\right)d\xi. \tag{2.25}$$

Покажем, что выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{x}|R_{ij}^{(m)}(x,t)|\,dt&\le\frac{G^{m+1}(x)(|a|+|b|)^{m+1}}{(m+1)!},\\ \int\limits_{t}^{1}|R_{ij}^{(m)}(x,t)|\,dx&\le\frac{G^{m+1}(1)(|a|+|b|)^{m+1}}{(m+1)!}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Пусть $m=0$. Оценим нормы $R_{11}^{(0)}(x,t)$ и $R_{12}^{(0)}(x,t)$, поскольку оценки для $R_{22}^{(0)}(x,t)$ и $R_{21}^{(0)}(x,t)$ абсолютно аналогичны в силу симметрии. Сделав замену переменной $u=\xi-x+t$, получим:

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{x}|R_{11}^{(0)}(x,t)|\,dt&\le|a|\int\limits_{0}^{x}dt\int\limits_{x-t}^{x}|M_{11}(\xi,\xi-x+t)|\,d\xi\\ &=|a|\int\limits_{0}^{x}d\xi\int\limits_{0}^{\xi}|M_{11}(\xi,u)|\,du\le|a|G(x)\le(|a|+|b|)G(x).\end{aligned} \tag{2.27}$$

Для оценки нормы $R_{11}^{(0)}(x,t)$ в пространстве B_2 сделаем замену $u=\xi-x+t$, а затем расширим область интегрирования и изменим порядок интегрирования. Получим:

$$\begin{aligned}\int\limits_{t}^{1}|R_{11}^{(0)}(x,t)|\,dx&\le|a|\int\limits_{t}^{1}dx\int\limits_{x-t}^{x}|M_{11}(\xi,\xi-x+t)|\,d\xi\\ &=|a|\int\limits_{0}^{t}du\int\limits_{u}^{u-t+1}|M_{11}(\xi,u)|\,d\xi\le|a|\int\limits_{0}^{1}du\int\limits_{u}^{1}|M_{11}(\xi,u)|\,d\xi\\ &=|a|\int\limits_{0}^{1}d\xi\int\limits_{0}^{\xi}|M_{11}(\xi,u)|\,du\le|a|G(1)\le(|a|+|b|)G(1).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Перейдем к оцениванию норм $R_{12}^{(0)}(x,t)$:

$$\int_0^x |R_{12}^{(0)}(x,t)|\,dt \le \frac{ab}{|a-b|}\int_0^x \Big|Q_{12}\Big(\frac{ax-bt}{a-b}\Big)\Big|\,dt$$
$$+|a|\int_0^x dt \int_{\frac{ax-bt}{a-b}}^{x} \Big|M_{12}(\xi,(\xi-x)\frac{a}{b}+t)\Big|\,d\xi$$
$$=\frac{|ab||a-b|}{|a-b||-b|}\int_{\frac{ax}{a-b}}^{x} |Q_{12}(u)|\;du$$
$$+|a|\int_{\frac{ax}{a-b}}^{x} d\xi \int_0^{\frac{a}{b}(x-\xi)+\xi} \Big|M_{12}(\xi,(\xi-x)\frac{a}{b}+t)\Big|\,dt$$
$$\le |a|\int_0^x |Q_{12}(u)|\;du + |a|\int_{\frac{ax}{a-b}}^{x} d\xi \int_{(\xi-x)\frac{a}{b}}^{\xi} |M_{12}(\xi,u)|\,du$$
$$\le |a|\int_0^x |Q_{12}(u)|\;du + |a|\int_0^x d\xi \int_0^{\xi} |M_{12}(\xi,u)|\,du$$
$$\le |a|G(x) \le (|a|+|b|)G(x). \quad (2.29)$$

В первом интеграле сделана замена переменной $u=\frac{ax-bt}{a-b}$. Заметим, что из того факта, что a и b имеют разные знаки, следует, что $\frac{-b}{a-b}>0$ и $\frac{ax}{a-b}<x$. Во втором интеграле изменен порядок интегрирования, а затем сделана замена $u=(\xi-x)\frac{a}{b}+t$. Далее было использовано неравенство $(\xi-x)\frac{a}{b}>0$ при $\xi<x$.

$$\int_t^1 |R_{12}^{(0)}(x,t)|\,dx \le \frac{|ab|}{|a-b|}\int_t^1 \Big|Q_{12}\Big(\frac{ax-bt}{a-b}\Big)\Big|\,dx$$
$$+|a|\int_t^1 dx \int_{\frac{ax-bt}{a-b}}^{x} \Big|M_{12}(\xi,(\xi-x)\frac{a}{b}+t)\Big|\,d\xi$$
$$=\frac{|ab||a-b|}{|a-b||a|}\int_t^{\frac{a-bt}{a-b}} |Q_{12}(u)|\;du$$

$$+|a|\frac{|b|}{|a|}\int\limits_{t}^{\frac{a-bt}{a-b}} du \int\limits_{u}^{(u-t)\frac{b}{a}+1} |M_{12}(\xi,u)|\,d\xi$$

$$\leq |b|\int\limits_{t}^{1}|Q_{12}(u)|\,du + |b|\int\limits_{t}^{1} du \int\limits_{u}^{1}|M_{12}(\xi,u)|\,d\xi$$

$$\leq |b|\int\limits_{0}^{1}|Q_{12}(u)|\,du + |b|\int\limits_{0}^{1} d\xi \int\limits_{0}^{\xi}|M_{12}(\xi,u)|\,du$$

$$\leq |b|G(1) \leq (|a|+|b|)G(1). \quad (2.30)$$

В первом интеграле сделана замена переменной $u = \frac{ax-bt}{a-b}$ и использованы неравенства $\frac{a}{a-b} > 0$, $\frac{a-bt}{a-b} = 1 + \frac{b(1-t)}{a-b} < 1$ при $0 < t < 1$ и $ab < 0$. Во втором интеграле сделана замена переменной $u = (\xi - x)\frac{a}{b} + t$ и использовано неравенство $(u-t)\frac{b}{a} + 1 < 1$ при $u > t$.

Предположив, что неравенства (2.26) имеют место при $k = m-1$, докажем их справедливость для $k = m$.

Имеем, с учетом обозначений (2.25):

$$\int\limits_{0}^{x}|R_{11}^{(m)}(x,t)|\,dt \leq |a|\sum_{s=1}^{2}\Bigg(\int\limits_{0}^{x} dt \int\limits_{x-t}^{x}|Q_{1s}(\xi)R_{s1}^{(m-1)}(\xi,\xi-x+t)|\,d\xi$$

$$+\int\limits_{0}^{x} dt \int\limits_{x-t}^{x} d\xi \int\limits_{\xi-x+t}^{\xi}|M_{1s}(\xi,u)R_{s1}^{(m-1)}(u,\xi-x+t)|\,du\Bigg)$$

$$\leq |a|\sum_{s=1}^{2}\Bigg(\int\limits_{0}^{x}|Q_{1s}(\xi)|\,d\xi\int\limits_{0}^{\xi}|R_{s1}^{(m-1)}(\xi,v)|\,dv$$

$$+\int\limits_{0}^{x} d\xi \int\limits_{0}^{\xi} dv \int\limits_{v}^{\xi}|M_{1s}(\xi,u)R_{s1}^{(m-1)}(u,v)|\,du\Bigg)$$

$$\leq |a|\sum_{s=1}^{2}\Bigg(\int\limits_{0}^{x}|Q_{1s}(\xi)|\frac{G^m(\xi)(|a|+|b|)^m}{m!}\,d\xi$$

$$+\int\limits_{0}^{x} d\xi \int\limits_{0}^{\xi}|M_{1s}(\xi,u)|\,du\int\limits_{0}^{u}|R_{s1}^{(m-1)}(u,v)|\,dv\Bigg)$$

$$\leq |a|\sum_{s=1}^{2}\Biggl(\int_0^x |Q_{1s}(\xi)|\frac{G^m(\xi)(|a|+|b|)^m}{m!}\,d\xi$$

$$\leq \int_0^x d\xi\int_0^\xi |M_{1s}(\xi,u)|\frac{G^m(u)(|a|+|b|)^m}{m!}\,du\Biggr)$$

$$\leq |a|\frac{(|a|+|b|)^m}{m!}\int_0^x\Biggl(\sum_{s=1}^{2}\Bigl(|Q_{1s}(\xi)|+\int_0^\xi |M_{1s}(\xi,u)|\,du\Bigr)\Biggr)G^m(\xi)\,d\xi$$

$$\leq \frac{(|a|+|b|)^{m+1}}{m!}\int_0^x G'(\xi)G^m(\xi)\,d\xi \leq \frac{(|a|+|b|)^{m+1}G^{m+1}(x)}{(m+1)!}. \quad (2.31)$$

Здесь сделана замена переменной $\xi - x + t = v$, после чего во втором интеграле изменен порядок интегрирования и использована гипотеза индукции и неравенство $G(u)^m \leq G(\xi)^m$ при $u < \xi$.

Аналогично,

$$\int_t^1 |R_{11}^{(m)}(x,t)|\,dx \leq |a|\sum_{s=1}^{2}\Biggl(\int_t^1 dx\int_{x-t}^{x} |Q_{1s}(\xi)R_{s1}^{(m-1)}(\xi,\xi-x+t)|\,d\xi$$

$$+\int_t^1 dx\int_{x-t}^{x} d\xi\int_{\xi-x+t}^{\xi} |M_{1s}(\xi,u)R_{s1}^{(m-1)}(u,\xi-x+t)|\,du\Biggr)$$

$$\leq |a|\sum_{s=1}^{2}\Biggl(\int_0^t dv\int_v^{v-t+1} |Q_{1s}(\xi)R_{s1}^{(m-1)}(\xi,v)|\,d\xi$$

$$+\int_0^t dv\int_v^{v-t+1} d\xi\int_v^\xi |M_{1s}(\xi,u)R_{s1}^{(m-1)}(u,v)|\,du\Biggr)$$

$$\leq |a|\sum_{s=1}^{2}\Biggl(\int_0^1 dv\int_v^1 |Q_{1s}(\xi)R_{s1}^{(m-1)}(\xi,v)|\,d\xi$$

$$+\int_0^1 dv\int_v^1 d\xi\int_v^\xi |M_{1s}(\xi,u)R_{s1}^{(m-1)}(u,v)|\,du\Biggr)$$

$$\leq |a|\sum_{s=1}^{2}\Biggl(\int_0^1 |Q_{1s}(\xi)|\,d\xi\int_0^\xi |R_{s1}^{(m-1)}(\xi,v)|\,dv$$

$$+\int_0^1 d\xi \int_0^\xi dv \int_v^\xi |M_{1s}(\xi,u)R_{s1}^{(m-1)}(u,v)|\,du\Bigg)$$

$$\le |a|\sum_{s=1}^2\Bigg(\int_0^1 |Q_{1s}(\xi)|\frac{G^m(\xi)(|a|+|b|)^m}{m!}\,d\xi$$

$$+\int_0^1 d\xi\int_0^\xi |M_{1s}(\xi,u)|\,du\int_0^u |R_{s1}^{(m-1)}(u,v)|\,dv\Bigg)$$

$$\le |a|\sum_{s=1}^2\Bigg(\int_0^1 |Q_{1s}(\xi)|\frac{G^m(\xi)(|a|+|b|)^m}{m!}\,d\xi$$

$$+\int_0^1 d\xi\int_0^\xi |M_{1s}(\xi,u)|\frac{G^m(u)(|a|+|b|)^m}{m!}\,du\Bigg)$$

$$\le |a|\frac{(|a|+|b|)^m}{m!}\int_0^1\sum_{s=1}^2\Bigg(|Q_{1s}(\xi)|+\int_0^\xi |M_{1s}(\xi,u)|\,du\Bigg)G^m(\xi)\,d\xi$$

$$\le \frac{(|a|+|b|)^{m+1}}{m!}\int_0^1 G'(\xi)G^m(\xi)\,d\xi \le \frac{(|a|+|b|)^{m+1}G^{m+1}(x)}{(m+1)!} \qquad (2.32)$$

Здесь сделана замена переменной $v=\xi-x+t$, а затем изменен порядок интегрирования. Заметим, что область интегрирования была расширена. Как и в предыдущей оценке использована монотонность функции $G(x)$.

Далее, оценим норму $R_{12}^{(m)}(x,t)$ в пространстве B_1:

$$\int_0^x |R_{12}^{(m)}(x,t)|\,dt$$

$$\le |a|\sum_{s=1}^2\Bigg(\int_0^x dt\int_{\frac{ax-bt}{a-b}}^x |Q_{1s}(\xi)R_{s2}^{(m-1)}(\xi,(\xi-x)\frac{a}{b}+t)|\,d\xi$$

$$+\int_0^x dt\int_{\frac{ax-bt}{a-b}}^x d\xi\int_{(\xi-x)\frac{a}{b}+t}^\xi |M_{1s}(\xi,u)R_{s2}^{(m-1)}(u,(\xi-x)\frac{a}{b}+t)|\,du\Bigg)$$

$$
\le |a| \sum_{s=1}^{2} \left(\int\limits_{\frac{ax}{a-b}}^{x} |Q_{1s}(\xi)|\, d\xi \int\limits_{(\xi-x)\frac{a}{b}}^{\xi} |R_{s2}^{(m-1)}(\xi, v)|\, dv \right.
$$

$$
\left. + \int\limits_{\frac{ax}{a-b}}^{x} d\xi \int\limits_{(\xi-x)\frac{a}{b}}^{\xi} dv \int\limits_{v}^{\xi} |M_{1s}(\xi, u) R_{s2}^{(m-1)}(u, v)|\, du \right)
$$

$$
\le |a| \sum_{s=1}^{2} \left(\int\limits_{0}^{x} |Q_{1s}(\xi)|\, d\xi \int\limits_{0}^{\xi} |R_{s2}^{(m-1)}(\xi, v)|\, dv \right.
$$

$$
\left. + \int\limits_{0}^{x} d\xi \int\limits_{0}^{\xi} dv \int\limits_{v}^{\xi} |M_{1s}(\xi, u) R_{s2}^{(m-1)}(u, v)|\, du \right)
$$

$$
\le |a| \sum_{s=1}^{2} \left(\int\limits_{0}^{x} |Q_{1s}(\xi)| \frac{G^m(\xi)(|a|+|b|)^m}{m!}\, d\xi \right.
$$

$$
\left. + \int\limits_{0}^{x} d\xi \int\limits_{0}^{\xi} |M_{1s}(\xi, u)|\, du \int\limits_{0}^{u} |R_{s2}^{(m-1)}(u, v)|\, dv \right)
$$

$$
\le |a| \sum_{s=1}^{2} \left(\int\limits_{0}^{x} |Q_{1s}(\xi)| \frac{G^m(\xi)(|a|+|b|)^m}{m!}\, d\xi \right.
$$

$$
\left. + \int\limits_{0}^{x} d\xi \int\limits_{0}^{\xi} |M_{1s}(\xi, u)| \frac{G^m(u)(|a|+|b|)^m}{m!}\, du \right)
$$

$$
\le |a| \frac{(|a|+|b|)^m}{m!} \int\limits_{0}^{x} \sum_{s=1}^{2} \left(|Q_{1s}(\xi)| + \int\limits_{0}^{\xi} |M_{1s}(\xi, u)|\, du \right) G^m(\xi)\, d\xi
$$

$$
\le \frac{(|a|+|b|)^{m+1}}{m!} \int\limits_{0}^{x} G'(\xi) G^m(\xi)\, d\xi \le (|a|+|b|)^{m+1} \frac{G^{m+1}(x)}{(m+1)!}. \qquad (2.33)
$$

Здесь сделана замена переменной $v = (\xi - x)\frac{a}{b} + t$. Заметим, что были использованы неравенства: $\frac{ax}{a-b} > 0$, $\frac{a}{b}(\xi - x) > 0$ при $\xi < x$ и $ab < 0$.

Аналогично, проводя замену переменной $v = (\xi - x)\frac{a}{b} + t$ и изменяя порядок интегрирования, получим оценку для нормы $R_{12}^{(m)}(x, t)$ в пространстве B_2:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_t^1 |R_{12}^{(m)}(x,t)|\,dx \\
&\qquad \le |a| \sum_{s=1}^{2} \Bigg(\int\limits_t^1 dx \int\limits_{\frac{ax-bt}{a-b}}^{x} |Q_{1s}(\xi) R_{s2}^{(m-1)}(\xi, (\xi - x)\frac{a}{b} + t)|\,d\xi \\
&\quad + \int\limits_t^1 dx \int\limits_{\frac{ax-bt}{a-b}}^{x} d\xi \int\limits_{(\xi-x)\frac{a}{b}+t}^{\xi} |M_{1s}(\xi,u) R_{s2}^{(m-1)}(u, (\xi - x)\frac{a}{b} + t)|\,du \Bigg) \\
&\qquad \le |a| \sum_{s=1}^{2} \Bigg(\int\limits_t^{\frac{a-bt}{a-b}} dv \int\limits_v^{(v-t)\frac{b}{a}+1} |Q_{1s}(\xi) R_{s2}^{(m-1)}(\xi, v)|\,d\xi \\
&\quad + \int\limits_t^{\frac{a-bt}{a-b}} dv \int\limits_v^{(v-t)\frac{b}{a}+1} d\xi \int\limits_v^{\xi} |M_{1s}(\xi,u) R_{s2}^{(m-1)}(u, v)|\,du \Bigg) \\
&\qquad \le |a| \sum_{s=1}^{2} \Bigg(\int\limits_0^1 dv \int\limits_v^1 |Q_{1s}(\xi) R_{s2}^{(m-1)}(\xi, v)|\,d\xi \\
&\quad + \int\limits_0^1 dv \int\limits_v^1 d\xi \int\limits_v^{\xi} |M_{1s}(\xi,u) R_{s2}^{(m-1)}(u, v)|\,du \Bigg) \\
&\qquad \le |a| \sum_{s=1}^{2} \Bigg(\int\limits_0^1 |Q_{1s}(\xi)|\,d\xi \int\limits_0^{\xi} |R_{s2}^{(m-1)}(\xi, v)|\,dv \\
&\quad + \int\limits_0^1 d\xi \int\limits_0^{\xi} dv \int\limits_v^{\xi} |M_{1s}(\xi,u) R_{s2}^{(m-1)}(u, v)|\,du \Bigg) \\
&\qquad \le |a| \sum_{s=1}^{2} \Bigg(\int\limits_0^1 |Q_{1s}(\xi)| \frac{G^m(\xi)(|a|+|b|)^m}{m!}\,d\xi \\
&\quad + \int\limits_0^1 d\xi \int\limits_0^{\xi} |M_{1s}(\xi,u)|\,du \int\limits_0^{u} |R_{s2}^{(m-1)}(u, v)|\,dv \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le |a| \sum_{s=1}^{2} \Bigg(\int_0^1 |Q_{1s}(\xi)| \frac{G^m(\xi)(|a|+|b|)^m}{m!}\, d\xi \\
&\quad + \int_0^1 d\xi \int_0^\xi |M_{1s}(\xi,u)| \frac{G^m(u)(|a|+|b|)^m}{m!}\, du \Bigg) \\
&\le |a| \frac{(|a|+|b|)^m}{m!} \int_0^1 \sum_{s=1}^{2} \Bigg(|Q_{1s}(\xi)| + \int_0^\xi |M_{1s}(\xi,u)|\, du \Bigg) G^m(\xi)\, d\xi \\
&\le \frac{(|a|+|b|)^{m+1}}{m!} \int_0^1 G'(\xi) G^m(\xi)\, d\xi \le \frac{G^{m+1}(x)(|a|+|b|)^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (2.34)
\end{aligned}
$$

Заметим, что область интегрирования была расширена и были использованы неравенства: $\frac{a-bt}{a-b} \le 1$, $(u-t)\frac{b}{a}+1 \le 1$ при $0 < t < u < 1$.

Таким образом, (2.27)–(2.34) доказывают гипотезу индукции, т.е. неравенства (2.26).

Пусть

$$
R_{ij}(x,t) := \sum_{m=0}^{\infty} R_{ij}^{(m)}(x,t) \qquad (1 \le i,j \le 2). \tag{2.35}
$$

Тогда из оценок (2.26) следует, что ряд в правой части (2.35) сходится в пространствах B_1 и B_2 к $R_{ij}(x,t)$ и определяет решение уравнения (2.20).

2.5. Единственность решения уравнения (2.20)

В этом разделе будет установлена единственность решения уравнения (2.20).

Допустим, что существует еще одно решение уравнения (2.20) $R_1(x,t)$ и $\tilde{R}(x,t) := R(x,t) - R_1(x,t) \ne 0$. Тогда $\tilde{R}(x,t)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{ij}(x,t) = -\frac{1}{\mu_i} \sum_{s=1}^{2} \Bigg(&\int_{\xi_{ij}(x,t)}^{x} Q_{is}(\xi) \tilde{R}_{sj}(\xi, (\xi - x)k_{ij} + t)\, d\xi \\
&+ \int_{\xi_{ij}(x,t)}^{x} d\xi \int_{(\xi-x)k_{ij}+t}^{\xi} M_{is}(\xi,u) \tilde{R}_{sj}(u, (\xi - x)k_{ij} + t)\, du \Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
(1 \le i,j \le 2). \quad (2.36)
$$

Поскольку $Q_{11} = Q_{22} = 0$, то из (2.36) следует, что в правой части выражения для $\tilde{R}_{i1}$ $(1 \leq i \leq 2)$ присутствуют только слагаемые, содержащие $\tilde{R}_{11}$ и $\tilde{R}_{21}$. Покажем, что $\tilde{R}_{11} = \tilde{R}_{21} = 0$. Для пары $\tilde{R}_{12}$ и $\tilde{R}_{22}$ доказательство может быть проведено абсолютно аналогично.

Обозначим

$$Z(x) := \int_0^x \Big(|\tilde{R}_{11}(x,t)| + |\tilde{R}_{21}(x,t)| \Big)\, dt.$$

Интегрируя (2.36) по переменной t и делая замену переменных $v = \xi - x + t$ $(v = (\xi - x)\frac{b}{a} + t)$, (см. (2.31) и (2.33)), получим:

$$\begin{aligned}
Z(x) \leq \int_0^x \Bigg(& |a| \int_{x-t}^x |Q_{12}(\xi)\tilde{R}_{21}(\xi, \xi - x + t)|\, d\xi \\
& + |b| \int_{\frac{bx-at}{b-a}}^x |Q_{21}(\xi)\tilde{R}_{11}(\xi, (\xi - x)\frac{b}{a} + t)|\, d\xi \Bigg)\, dt \\
& + \sum_{s=1}^2 \int_0^x \Bigg(|a| \int_{x-t}^x d\xi \int_{\xi-x+t}^{\xi} |M_{1s}(\xi,u)\tilde{R}_{s1}(u, \xi - x + t)|\, du \\
& + |b| \int_{\frac{bx-at}{b-a}}^x d\xi \int_{(\xi-x)\frac{b}{a}+t}^{\xi} |M_{2s}(\xi,u)\tilde{R}_{s1}\Big(u, (\xi - x)\frac{b}{a} + t\Big)|\, du \Bigg)\, dt \\
\leq \int_0^x & \Bigg(|a||Q_{12}(\xi)|\, d\xi \int_0^{\xi} |\tilde{R}_{21}(\xi,v)|\, dv + |b||Q_{21}(\xi)|\, d\xi \int_0^{\xi} |\tilde{R}_{11}(\xi,v)|\, dv \Bigg) \\
& + \sum_{s=1}^2 \int_0^x d\xi \int_0^{\xi} (|a||M_{1s}(\xi,u)| + |b||M_{2s}(\xi,u)|)\, du \int_0^u |\tilde{R}_{s1}(u,v)|\, dv \\
\leq (|a| + |b|) & \int_0^x (|Q_{12}(\xi)| + |Q_{21}(\xi)|)\, d\xi \int_0^{\xi} (|\tilde{R}_{11}(\xi,u)| + |\tilde{R}_{21}(\xi,u)|)\, du \\
+ (|a| + |b|) & \sum_{r,s=1}^2 \int_0^x d\xi \int_0^{\xi} |M_{rs}(\xi,u)|\, du \int_0^u (|\tilde{R}_{11}(u,v)| + |\tilde{R}_{21}(u,v)|)\, dv
\end{aligned}$$

$$= (|a|+|b|)\Bigg(\int\limits_0^x (|Q_{12}(\xi)|+|Q_{21}(\xi)|)\,Z(\xi)\,d\xi$$

$$+\sum_{r,s=1}^{2}\int\limits_0^x Z(u)\,du\int\limits_u^x |M_{rs}(\xi,u)|\,d\xi\Bigg) = (|a|+|b|)\int\limits_0^x F(x,u)Z(u)\,du, \tag{2.37}$$

где

$$F(x,u) = |Q_{12}(u)|+|Q_{21}(u)|+\sum_{r,s=1}^{2}\int\limits_u^x |M_{rs}(\xi,u)|\,d\xi. \tag{2.38}$$

Поскольку, как показано выше, $\tilde{R}_{i1}(x,t)\in B_1$ при $1\le i\le 2$, то $Z(x)\in L_\infty[0,1]$. Из условий $Q(x)\in L_1[0,1]$, $M(x,t)\in L_1(\Omega)$ $(i,j=\overline{1,2})$ следует включение $F(x,\cdot)\in L_1[0,x]$. Таким образом, к (2.37) применима лемма Гронуолла. Следовательно, $Z(x)=0$, т. е. $\tilde{R}_{11}(x,t)=\tilde{R}_{21}(x,t)=0$.

2.6. Существование решения системы (2.17)–(2.19)

2.6.1. Случай гладких $Q(x)$ и $M(x,t)$

Предположим, что $Q(x)\in C^1[0,1]$ и $M(x,t)\in C^1(\Omega)$. Положим

$$\tilde{G}(x) := \sum_{i,j=1}^{2}\Bigg(|Q_{ij}(x)|+\int\limits_0^x\Bigg(|Q_{ij}(\xi)|+|Q'_{ij}(\xi)|+|M_{ij}(\xi,\xi)|$$

$$+|M_{ij}(x,\xi)|+\int\limits_0^\xi (|M_{ij}(\xi,u)|+|D_xM_{ij}(\xi,u)|)\,du\Bigg)d\xi\Bigg). \tag{2.39}$$

Тогда, дифференцируя равенства (2.23), а затем проводя оценки аналогично оценкам (2.26), придем к неравенствам:

$$\|D_xR_{ij}^{(m)}(x,t)\|_{B_1},\ \|D_tR_{ij}^{(m)}(x,t)\|_{B_1}\le\frac{(|a|+|b|)^{m+1}\tilde{G}^{m+1}(x)}{(m+1)!},$$

$$\|D_xR_{ij}^{(m)}(x,t)\|_{B_2},\ \|D_tR_{ij}^{(m)}(x,t)\|_{B_2}\le\frac{(|a|+|b|)^{m+1}\tilde{G}^{m+1}(1)}{(m+1)!}.$$

Следовательно, ряды

$$\sum_{m=0}^{\infty}D_xR_{ij}^{(m)}(x,t),\quad \sum_{m=0}^{\infty}D_tR_{ij}^{(m)}(x,t),\quad (1\le i,j\le 2).$$

сходятся в пространствах B_1 и B_2, причем их суммы совпадают с $D_x R_{ij}(x,t)$ и $D_t R_{ij}(x,t)$, соответственно.

Поэтому $R(x,t)$ является решением задачи Гурса (2.17)–(2.19) в треугольнике $\triangle$. Поскольку оператор $I+R$ обратим в $L_p[0,1]\otimes\mathbb{C}^n$, то операторы L_0 и $B^{-1}\otimes D_0$ подобны в пространстве $L_p[0,1]\otimes\mathbb{C}^n$. Очевидно, что то же самое верно для обратных к ним операторов K и $J\otimes B$. Таким образом, теорема доказана в предположении, что $Q(x)\in C^1[0,1]$ и $M(x,t)\in C^1(\Omega)$.

2.6.2. Общий случай

Перейдем к общему случаю. Пусть $Q(x)\in L_1[0,1]$ и $M(x,t)\in L_1(\Omega)$. Построим последовательности $Q^n(x)$ и $M^n(x,t)$ C^1-гладких функций, которые сходятся к $Q(x)$ и $M(x,t)$ в норме пространств $L_1[0,1]$ и $L_1(\Omega)$, соответственно. Пусть $R^n(x,t)$ — последовательность решений соответствующих уравнений вида (2.20) (с $Q^n(x)$ и $M^n(x,t)$ вместо $Q(x)$ и $M(x,t)$). Покажем, что последовательность $R^n(x,t)$ сходится к $R(x,t)$ в пространствах B_1 и B_2.

Обозначим

$$\tilde{Q}^n(x)=Q(x)-Q^n(x),\qquad \tilde{M}^n(x,t)=M(x,t)-M_n(x,t),$$
$$\tilde{R}^n(x,t)=R(x,t)-R^n(x,t). \tag{2.40}$$

Из (2.20) следует, что $\tilde{R}^n(x,t)$ удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\tilde{R}^n_{ij}(x,t)&=\frac{\tilde{Q}^n_{ij}(\xi_{ij}(x,t))}{\mu_j-\mu_i}-\frac{1}{\mu_i}\int\limits_{\xi_{ij}(x,t)}^{x}\tilde{M}^n_{ij}(\xi,(\xi-x)k_{ij}+t)\,d\xi\\
&-\frac{1}{\mu_i}\sum_{s=1}^{2}\Bigg(\int\limits_{\xi_{ij}(x,t)}^{x}\big(\tilde{Q}^n_{is}(\xi)R_{sj}(\xi,(\xi-x)k_{ij}+t)\\
&\qquad+Q^n_{is}(\xi)\tilde{R}^n_{sj}(\xi,(\xi-x)k_{ij}+t)\big)\,d\xi\\
&+\int\limits_{\xi_{ij}(x,t)}^{x}d\xi\int\limits_{(\xi-x)k_{ij}+t}^{\xi}\big(\tilde{M}^n_{is}(\xi,u)R_{sj}(u,(\xi-x)k_{ij}+t)\\
&\qquad+M^n_{is}(\xi,u)\tilde{R}^n_{sj}(u,(\xi-x)k_{ij}+t)\,du\Bigg).\end{aligned}\tag{2.41}$$

Тогда, как и при доказательстве единственности решения, проводя замену переменной $v=\xi-x+t$ ($v=(\xi-x)\frac{a}{b}+t$, $v=(\xi-x)\frac{b}{a}+t$) в соответствующих местах, получим:

$$
\begin{aligned}
L(x) :=& \int\limits_0^x \sum_{i,j=1}^{2} |\tilde{R}^n_{sr}(x,t)|\,dt \\
&\le (|a|+|b|) \sum_{s,r=1}^{2} \Bigg(\int\limits_0^x \bigg(|\tilde{Q}^n_{sr}(\xi)| + \int\limits_0^\xi |\tilde{M}^n_{sr}(\xi,u)|\,du \bigg) d\xi \\
&\qquad + \int\limits_0^x \bigg(|\tilde{Q}^n_{sr}(\xi)| + \int\limits_\xi^x |\tilde{M}^n_{rs}(u,\xi)|\,du \bigg) H(\xi)\,d\xi \\
&\qquad + \int\limits_0^x \bigg(|Q^n_{rs}(\xi)| + \int\limits_\xi^x |M^n_{rs}(u,\xi)|\,du \bigg) L(\xi)\,d\xi \Bigg) \\
&\le (|a|+|b|)\big(\|\tilde{Q}^n\|_{L_1[0,1]} + \|\tilde{M}^n\|_{L_1(\Omega)}\big)\cdot(1+\|R\|_{B_1}) \\
&\qquad + (|a|+|b|) \int\limits_0^x F(x,s)L(s)\,ds, \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

где

$$
H(x) := \int\limits_0^x \sum_{i,j=1}^{2} |R_{ij}(x,t)|\,dt,
$$

а $F(x,s)$ определено в (2.38).

Применяя лемму Гроноулла к (2.42), получим:

$$
\begin{aligned}
L(x) \le& (|a|+|b|)\big(\|\tilde{Q}^n\|_{L_1[0,1]} + \|\tilde{M}^n\|_{L_1(\Omega)}\big)\cdot(1+\|R\|_{B_1}) \\
&\times \exp\Bigg((|a|+|b|) \int\limits_0^x F(x,s)\,ds \Bigg). \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

Поскольку последовательности $Q^n(x)$ и $M^n(x,t)$ сходятся в $L_1[0,1]$ и в $L_1(\Omega)$, соответственно, то они ограничены:

$$
\begin{aligned}
\|Q_n(x)\|_{L_1[0,1]} &\le C, & \|Q(x)\|_{L_1[0,1]} &\le C, \\
\|M_n(x,t)\|_{L_1(\Omega)} &\le C, & \|M(x,t)\|_{L_1(\Omega)} &\le C,
\end{aligned}
\qquad (2.44)
$$

для любых $n\in\mathbb{N}$.

Тогда из (2.42) и (2.44) получим:

$$\|\tilde{R}^n(x,t)\|_{B_1} \le C_1\big(\|\tilde{Q}^n\|_{L_1[0,1]} + \|\tilde{M}^n\|_{L_1(\Omega)}\big), \tag{2.45}$$

где $C_1 := (|a|+|b|)(1+\|R\|_{B_1})e^{2C}$.

Далее,

$$\begin{aligned} K(t) &:= \int\limits_t^1 \sum_{i,j=1}^2 |\tilde{R}^n_{ij}(x,t)|\,dx \le \int\limits_t^1 \sum_{i,j=1}^2 (|R^n_{ij}(x,t)| + |R_{ij}(x,t)|)\,dx \\ &\le 8\sum_{m=0}^\infty \frac{(|a|+|b|)^{m+1}G^{m+1}(1)}{(m+1)!} = 8(e^{(|a|+|b|)G(1)}-1) \\ &\le 8(e^{6(|a|+|b|)C}-1) =: C_2 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Заметим, что здесь мы использовали оценки (2.35) для $\|R_{ij}(x,t)\|_{B_2}$ и $\|R^n_{ij}(x,t)\|_{B_2}$. Также из (2.44) следует, что выполнено неравенство $G(1) \le \sum_{i,j=1}^2(\|Q_{ij}\|_{L_1[0,1]} + \|M_{ij}\|_{L_1(\Omega)}) \le 6C$. Таким образом, имеет место оценка

$$\|\tilde{R}^n(x,t)\|_{B_2} \le C_2. \tag{2.47}$$

Заметим, что норма оператора $\tilde{R}^n$ с ядром $\tilde{R}^n(x,t)$, действующего в пространствах $L_p[0,1]$, тесно связана с нормами ядра в пространствах B_1 и B_2. А именно:

$$\|\tilde{R}^n\|_{L_\infty[0,1]} = \|\tilde{R}^n(x,t)\|_{B_1}, \qquad \|\tilde{R}^n\|_{L_1[0,1]} = \|\tilde{R}^n(x,t)\|_{B_2}.$$

Из теоремы Рисса об интерполяции и оценок (2.45) и (2.47) следует, что

$$\|\tilde{R}^n\|^p_{L_p[0,1]} \le C_1^{p-1}C_2\big(\|\tilde{Q}^n\|_{L_1[0,1]} + \|\tilde{M}^n\|_{L_1(\Omega)}\big)^{p-1}. \tag{2.48}$$

Тогда из (2.48) мы заключаем, оператор $I+R : f \to f(x)+\int_0^x R(x,t)\times f(t)\,dt$ является сильным пределом последовательности операторов $I+R^n : f \to f(x)+\int_0^x R^n(x,t)f(t)\,dt$ в пространстве $L_p[0,1]\otimes\mathbb{C}^n$ $(1<p\le\infty)$. Положим

$$L_{0n} : f \to B^{-1}\frac{df}{dx} + Q^n(x)f(x) - \int\limits_0^x M^n(x,t)f(t)\,dt.$$

Поскольку $Q^n(x)$ и $M^n(x,t)$ — C^1-гладкие функции, то $R^n(x,t)$ является решением интегрального уравнения (2.20), а следовательно, и решением задачи Гурса (2.17), (2.18), (2.19), и, кроме того, оператор $I + R^n$ ограниченно обратим в $L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n$ и осуществляет подобие операторов L_{0n} и $B^{-1} \otimes D_0$, т.е. имеет место равенство:

$$L_{0n}^{-1}(I + R^n) = (I + R^n)(J \otimes B). \tag{2.49}$$

Для завершения доказательства теоремы осталось перейти к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (2.49).

Литература

[1] М. С. Бродский *Треугольные и жордановы представления линейных операторов*, М., “Наука”, 1969, 288 с.

[2] М. С. Бродский, М. С. Лившиц *Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы* // УМН, (1958), 13:1(79), 3–85.

[3] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения*, М., “Наука”, 1967, 508 с.

[4] Г. М. Губреев, *Об одном классе безусловных базисов гильбертовых пространств и о проблеме подобия диссипативных вольтерровых операторов* // Мат. сб., **183** (1992), N 9, 105–146.

[5] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, М., “Иностранная литература”, 1962, 896 с.

[6] И. Ю. Доманов *О спектральной кратности некоторых вольтерровых операторов в соболевских пространствах* // Матем. заметки, (2002), 72:2, 306––311.

[7] И. И. Кальмушевский, *О линейной эквивалентности вольтерровых операторов* // Успехи мат. наук, **20** (1965), вып. 6, 181–192.

[8] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака*, М., Наука, 1988, 431 с.

[9] М. М. Маламуд, *О достаточных условиях линейной эквивалентности вольтерровых операторов* // Теория функций, функц. анализ, Харьков, (1975), вып. 23, 59–69.

[10] М. М. Маламуд, Э. Р. Цекановский, *Критерий линейной эквивалентности вольтерровых операторов в шкале $L_p[0,1]$* // Изв. АН СССР., сер. мат., **41** (1977), N 4, 768–793.

[11] М. М. Маламуд, *Спектральный анализ вольтерровых операторов с ядром, зависящим от разности аргументов* // Укр. Мат. Ж., **32** (1980), N 5, 601–609.

[12] М. М. Маламуд, *Два замечания о подобии вольтерровых операторов* // Мат. Физ. Нелин. Мех., **9 (43)** (1988), 19–26.

[13] М. М. Маламуд, *Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробных порядков* // Тр. Моск. мат. о-ва, **55** (1994), 73–148.

[14] М. М. Маламуд, *Вопросы единственности в обратных задачах для систем дифференциальных уравнений на конечном интервале* // Тр. Моск. мат. о-ва, **60** (1999), 199–259.

[15] В. А. Марченко, *Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля*, К., "Наукова думка", 1972, 219 с.

[16] Л. А. Сахнович, *О приведении вольтерровых операторов к простейшему виду в пространствах вектор-функций* // Укр. мат. журнал, **14** (1962), 114–126.

[17] Л. А. Сахнович, *Спектральный анализ операторов вида* $Kf = \int_0^x k(x-t)f(t)\,dt$ // Изв. АН СССР. Сер. мат., **22** (1958), N 2, 299–308.

[18] R. Frankfurt and J. Rovnyak, *Finite convolution operators* // J. Math. Anal. Appl., **49** (1975), 347–374.

[19] R. Frankfurt and J. Rovnyak, *Recent Results and Unsolved Problems on Finite Convolution Operators* // Linear Spaces and Approximation (1978), 133–150.

[20] J. M. Freeman, *Volterra operators similar to* $J : f \to \int_0^x f(t)\,dt$ // Trans. Amer. Math. Soc., **116** (1965), N 4, 181–192.

[21] L. T. Hill, *Spectral analysis of finite convolution operators with matrix kernels* // Integral Equations and Operator Theory, **3/1** (1980), 62–96.

[22] G. K. Kalich, *On similarity, reducing manifolds and unitary equivalence of certain Volterra operators* // Ann. of Math., **66** (1957), N 3, 481–494.

[23] G. K. Kalich, *On similarity invariants of certain operators in* L_p // Pacific J. Math., **11** (1961), 247–252.

[24] M. M. Malamud, *Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators* // Operator Theory : Advances and Applications, **102** (1998), 143–167.

Сведения об авторах

Галина С. Ромащенко

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская 24,
Донецк, 83055,
Украина
E-Mail: gal_romash@mail.ru