Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 2, 203 – 218

Берівська класифікація нарізно неперервних функцій і властивість Наміоки

Володимир В. Михайлюк

(*Представлена В. В. Шарко*)

Анотація. Доведено наступні два результати.

1. Якщо X такий цілком регулярний простір, що для довільного топологічного простору Y кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера, то кожний лінделефовий підпростір простору X можна неперервно бієктивно відобразити на сепарабельний метризовний простір.

2. Якщо X берівський простір, Y компактний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ нарізно неперервна функція, яка є функцією першого класу Бера, то існує щільна в X G_δ-множина A така, що f сукупно неперервна в кожній точці множини $A \times Y$ (це дає позитивну відповідь на одне питання Ґ. Вери).

2000 MSC. C08, 54C30, 54C05.

Ключові слова та фрази. Нарізно неперервні функції, лінделефові простори, функції першого класу Бера, властивість Наміоки.

1. Вступ

Функція $f : X \to \mathbb{R}$, визначена на топологічному просторі X, називається *функцією першого класу Бера*, якщо існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ така, що $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Для довільного не більш, ніж зліченного ординала α функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *функцією берівського класу* α, якщо існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, які є берівського класу, меншого, ніж α, така, що $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Функції берівського класу α, де α — деякий не більш, ніж зліченний ординал, називаються *вимірними за Бером.*

Стаття надійшла в редакцію 30.08.2007

ISSN 1810 – 3200.

Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *функцією першого класу Лебеґа*, якщо $f^{-1}(G)$ є F_σ-множиною в X для довільної відкритої множини $G \subseteq \mathbb{R}$.

Питання берівської і лебеґівської класифікацій нарізно неперервних функцій, тобто функцій двох (чи більшої кількості) змінних, неперервних відносно кожної змінної зокрема, беруть свій початок з класичної роботи А. Лебеґа [1] і були продовжені в працях багатьох математиків (дивись, наприклад, [2] і вказану там літературу).

Зокрема, В. Моран і А. Розенталь [3, 4] довели, що для компакту X наступні умови рівносильні:

(*i*) для довільного компактного простору Y кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера;

(*ii*) X має властивість зліченності ланцюжків, тобто довільна система попарно неперетинних відкритих в X непорожніх множин є не більш, ніж зліченною.

Топологічний простір X називається *морановим* (*слабко морановим*), якщо для довільного компактного простору Y кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера (вимірною за Бером). Ці поняття були введені в [5], де було одержано наступний результат.

Теорема 1.1. *Нехай X — цілком регулярний простір з умовою зліченності ланцюжків, Y — компакт, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна функція і $\varphi : Y \to C_p(X)$, $\varphi(y)(x) = f(x, y)$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(*i*) *f першого класу Бера;*

(*ii*) *простір $\varphi(Y)$ метризовний.*

Для топологічного простору X через $C_p(X)$ ми позначаємо простір неперервних на X функцій з топологією поточкової збіжності.

Крім того, в [5] досліджувався зв'язок між морановими просторами і властивістю Наміоки. Відображення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, визначене на добутку $X \times Y$ топологічних просторів X і Y, *має властивість Наміоки*, якщо існує всюди щільна в X G_δ-множина $A \subseteq X$ така, що f неперервна за сукупністю змінних в кожній точці множини $A \times Y$. Топологічний простір X називається *наміоковим*, якщо для довільного компактного простору Y кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ має властивість Наміоки. В [5] було поставлене наступне питання.

Питання 1.1. *Чи обов'язково берівський морановий простір є наміоковим простором?*

Топологічний простір X називатимемо *простором з B-властивістю* (*L-властивістю*), якщо для довільного топологічного простору Y кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера (Лебеґа).

Стандартні міркування (див. [6, с. 394]) показують, що кожна функція першого класу Бера є функцією першого класу Лебеґа. Тому довільний простір з B-властивістю має L-властивість. Зауважимо, що в [7] простори з B-властивістю названі просторами Рудіна, але ця назва не зовсім виправдана, адже В. Рудін у своїй праці [8] використав техніку розбиттів одиниці для доведення того, що кожне нарізно неперервне відображення, визначене на добутку топологічного і метризовного просторів і зі значеннями в локально опуклому просторі, є відображенням першого класу Бера, не розглядаючи окремо функції зі значеннями в $\mathbb{R}$.

Розвиток результату В. Рудіна привів до виникнення наступних понять, пов'язаних із просторами з B-властивістю.

Топологічний простір X називається *PP-простором*, якщо існують послідовність $((h_{n,i} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ локально скінченних розбиттів одиниці $(h_{n,i} : i \in I_n)$ на просторі X і послідовність $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ сімей $\alpha_n = (x_{n,i} : i \in I_n)$ точок $x_{n,i} \in X$ такі, що для довільних $x \in X$ і околу U точки x в X існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $x_{n,i} \in U$, якщо $n \geq n_0$ і $x \in \mathrm{supp} h_{n,i}$, де через $\mathrm{supp} h$ ми позначаємо *носій* $\{x \in X : h(x) \neq 0\}$ функції h.

Це поняття було введене в [9], а в [10, теорема 1] було встановлено, що кожний PP-простір має B-властивість.

Топологічний простір X з топологією $\mathcal{T}$ називається *чверть-вичерпним*, якщо існує функція $g : \mathbb{N} \times X \to \mathcal{T}$ така, що

(*i*) $X = \bigcup_{x \in X} g(n, x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$;

(*ii*) якщо $x \in g(n, x_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $x_n \to x$.

Якщо в чверть-вичерпному просторі X існує слабша за вихідну метризовна топологія $\mathcal{T}$ така, що всі покриття $\mathcal{U}_n = \{g(n, x) : x \in X\}$ можна вибрати $\mathcal{T}$-відкритими, то простір X називається *метрично чверть-вичерпним.*

Ці поняття були введені в [7], де, зокрема показано (теорема 6.2(3)), що кожний метрично чверть-вичерпний простір має B-властивість.

У зв'язку з дослідженнями просторів із B-властивістю в [7, питання 6.3] були поставлені наступні питання.

Питання 1.2. *Чи існує простір з B-властивістю, який не є чверть-вичерпним? Чи має (компактний) простір X B-властивість, якщо множина $\{(x, y) : y(x) = 0\}$ є G_δ-множиною в $X \times C_p(X)$? Чи кожний компактний простір з B-властивістю є метризовним?*

Зрозуміло, що аналогічні питання можна ставити і для просторів з L-властивістю. Зокрема, оскільки з [11, твердження 2.1] випливає, що довільний чверть-вичерпний простір має L-властивість, то природно виникає наступне питання.

Питання 1.3. *Чи існує простір з L-властивістю, який не є чверть-вичерпним?*

Зауважимо, що в [7]([12]) показано, що довільний топологічний простір X має B-властивість (L-властивість) тоді і тільки тоді, коли функція обчислення $c_X : X \times C_p(X) \to \mathbb{R}$, $c_X(x, y) = y(x)$, є функцією першого класу Бера (Лебеґа). Оскільки простір $C_p(X)$ має властивість зліченності ланцюжків, то з теореми 1.1 випливає, що кожний компактний підпростір цілком регулярного простору із B-властивістю є метризовним (це дає позитивну відповідь на третю частину питання 1.2) або, іншими словами, кожний компактний підпростір цілком регулярного простору з B-властивістю є субметризовним, тобто неперервно бієктивно відображається на деякий метризовний простір. Крім того, довільний ліндельофовий простір з B-властивістю є сепарабельним [7, теорема 6.2.(6)], чи загальніше, довільний ліндельофовий підпростір M цілком регулярного простору X з L-властивістю міститься в замиканні деякої зліченної множини $A \subseteq X$ [13, твердження 4.7]. Тому природно виникає наступне питання.

Питання 1.4. *Нехай Z — цілком регулярний простір з B-властивістю і $X \subseteq Z$ — ліндельофовий підпростір простору Z. Чи можна простір X за допомогою неперервної бієкції відобразити на сепарабельний метризовний простір?*

У даній статті ми, використовуючи техніку залежності функцій від певної кількості координат, дамо позитивні відповіді на питання 1.1 і 1.4.

2.

У даному пункті ми встановимо деякі властивості просторів із B-властивістю і L-властивістю.

Множина $G \subseteq X$ у топологічному просторі X називається *функціонально відкритою*, якщо існує неперервна функція $\varphi : X \to [0,1]$ така, що $G = \varphi^{-1}((0,1])$, і множина $E \subseteq X$ має *функціональний тип* G_δ, якщо $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, де $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність функціонально відкритих в X множин. Множини $X \setminus G$ і $X \setminus E$ називаються *функціонально замкненою* і *функціонального типу* F_σ, відповідно.

Наступні твердження уточнюють характеристичні властивості просторів із B-властивістю і L-властивістю, викладені в [7, теорема 6.2.(1)] і [12, твердження 2.3], які дають можливість розглядати лише функцію обчислення.

Твердження 2.1. *Нехай X — топологічний простір. Тоді наступні умови рівносильні:*

(*i*) *X має B-властивість;*

(*ii*) *множина $E = \{(x,y) : y(x) = 0\}$ є множиною функціонального типу G_δ в $X \times C_p(X)$.*

Доведення. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Оскільки X має B-властивість, то існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, де $Y = C_p(X)$, яка поточково на X збігається до нарізно неперервної функції обчислення $f = c_X$. Для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ покладемо $G_{mn} = f_n^{-1}((-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}))$ і $E_{mn} = \bigcup_{k\geq n} G_{mk}$. Оскільки множини E_{mn} функціонально відкриті і $E = \bigcap_{m,n\in\mathbb{N}} E_{mn}$, то має місце (*ii*).

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*). Згідно з [7, теорема 6.2.(1)] достатньо довести, що функція обчислення $f = c_X$ є функцією першого класу Бера на $X \times C_p(X)$.

Нехай $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ і $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – така неперервна функція, що $g^{-1}(0) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$. Зрозуміло, що відображення $\varphi : C_p(X) \to C_p(X)$, $\varphi(y)(x) = g(y(x))$, і $h : X \times C_p(X) \to X \times C_p(X)$, $h(x,y) = (x, \varphi(y))$, є неперервними. Оскільки $f^{-1}((-\infty, a] \cup [b, +\infty)) = h^{-1}(E)$, то множина $f^{-1}((a,b))$ є множиною функціонального типу F_σ. Тому згідно з [11, теорема 3.8] функція f першого класу Бера. □

Твердження 2.2. *Нехай X — топологічний простір. Тоді наступні умови рівносильні:*

(*i*) *X має L-властивість;*

(*ii*) *множина $E = \{(x,y) : y(x) = 0\}$ є множиною типу G_δ в $X \times C_p(X)$.*

Доведення. Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ є очевидною, а імплікація $(ii) \Rightarrow (i)$ доводиться аналогічно, як у попередньому твердженні, використовуючи [12, твердження 2.3]. □

Зауваження 2.1. Як випливає з тверджень 2.1 і 2.2 друга частина питання 1.2 є певним варіантом задачі про ідентичність берівської і лебеґівської класифікацій нарізно неперервних функцій двох змінних (з фіксованим першим множником і довільним — другим). Згідно з [13, теорема 4.12] добуток сім'ї $(X_s : s \in S)$ нетривіальних сепарабельних лінійно впорядкованих просторів X_s має L-властивість тоді і тільки тоді, коли $|S| \leq 2^{\aleph_o}$. Тому компактний простір $[0,1]^{[0,1]}$ є прикладом компактного простору з L-властивістю, який не має B-властивості, адже всі компактні простори з B-властивістю є метризовними. Це дає негативну відповідь на другу частину питання 1.2.

Зауваження 2.2. Простір $X = [0,1]^{[0,1]}$ також є прикладом простору з L-властивістю, який не є чверть-вичерпним, і це дає негативну відповідь на питання 1.3. Справді, припустивши чверть-вичерпність простору X, ми, згідно з [7, теорема 2.3], одержуємо, що X метрично чверть-вичерпний, а отже, має B-властивість.

Наступне твердження уточнює внутрішню структуру просторів із B-властивістю.

Твердження 2.3. *Нехай X — довільний цілком регулярний простір з B-властивістю. Тоді кожна одноточкова множина є G_δ-множиною в X.*

Доведення. Нехай $(f_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, де $Y = C_p(X)$, яка поточково на X збігається до нарізно неперервної функції обчислення $f = c_X$ і $x_0 \in X$ — фіксована точка. Враховуючи неперервність функцій f_n і те, що простір Y задовольняє умову зліченності ланцюжків, для кожного $n \in \mathbb{N}$ побудуємо послідовності $(U_{nm})_{m=1}^\infty$ відкритих околів точки $x_0 \in X$ і $(V_{nm})_{m=1}^\infty$ відкритих множин у просторі Y такі, що множина $\bigcup_{m=1}^\infty V_{nm}$ щільна в Y і $|f_n(x',y') - f_n(x'',y'')| < \frac{1}{n}$ для довільних $m \in \mathbb{N}$, $x', x'' \in U_{nm}$ і $y', y'' \in V_{nm}$. Тоді $|f_n(x,y) - f_n(x_0,y)| \leq \frac{1}{n}$ для довільних $x \in \bigcap_{m=1}^\infty U_{nm}$ і $y \in Y$. Отже, $f(x,y) = f(x_0,y)$ для довільних $x \in \bigcap_{n=1}^\infty \bigcap_{m=1}^\infty U_{nm}$ і $y \in Y$. Оскільки X цілком регулярний, то $\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcap_{m=1}^\infty U_{nm}$. □

3.

У даному пункті ми покажемо, що метрично чверть-вичерпні простори — це, в точності, гаусдорфові PP-простори.

Поняття чверть-вичерпного простору має також інше рівносильне переформулювання (див. [7, теорема 1.4]), яке близьке до означення PP-простору. Топологічний простір X є чверть-вичерпним тоді і тільки тоді, коли існують послідовність $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих покриттів $\mathcal{U}_n = (U_{n,i} : i \in I_n)$ простору X і послідовність $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ сімей $\alpha_n = (x_{n,i} : i \in I_n)$ точок $x_{n,i} \in X$ такі, що для довільних $x \in X$ і околу U точки x в X існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $x_{n,i} \in U$, якщо $n \geq n_0$ і $x \in U_{n,i}$.

Зауваження 3.1. Для метрично чверть-вичерпного простору X, використовуючи паракомпактність простору $(X, \mathcal{T})$, можна вибрати $\mathcal{T}$-локально скінченні $\mathcal{T}$-відкриті покриття $\mathcal{V}_n = (V_{n,j} : j \in J_n)$ простору X, які вписані в покриття $\mathcal{U}_n$. Тепер поклавши $y_{n,j} = x_{n,i}$, де $i \in I_n$ — такий індекс, що $V_{n,j} \subseteq U_{n,i}$, і врахувавши, що всі множини $V_{n,j}$ є функціонально відкритими в X, одержимо, що кожний метрично чверть-вичерпний простір є PP-простором. Крім того, згідно з [14, лема 5.1.8], аналогічні міркування показують, що умова локальної скінченності розбиттів одиниці в означенні PP-просторів не є істотною.

Наступні твердження показують, що кожний гаусдорфовий PP-простір є метрично чверть-вичерпним.

Твердження 3.1. *Нехай X — топологічний простір і $(h_i : i \in I)$ — розбиття одиниці на X. Тоді функція $p : X^2 \to \mathbb{R}$, $p(x,y) = \sum_{i \in I} |h_i(x) - h_i(y)|$ є неперервною псевдометрикою на X.*

Доведення. Оскільки $h_i(x) \geq 0$ для довільних $i \in I$ та $x \in X$ і $\sum_{i \in I} h_i(x) = 1$ для кожного $x \in X$, то функція p означена коректно, причому $p(x,y) \leq 2$ для довільних $x, y \in X$.

Легко бачити, що p задовольняє всі аксіоми псевдометрики. Залишилось перевірити, що p неперервна. Для цього достатньо показати, що для довільних $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$ множина $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : p(x_0, x) < \varepsilon\}$ є околом точки x_0 в X. Виберемо скінченну множину $I_0 \subseteq I$ таку, що $\sum_{i \in I_0} h_i(x_0) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$. Використовуючи неперервність функцій h_i, знайдемо окіл U точки x_0 в X такий, що $\sum_{i \in I_0} |h_i(x_0) - h_i(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ для кожного $x \in U$. Тоді $\sum_{i \in I_0} h_i(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ і

$$p(x_0, x) \leq \sum_{i\in I_0} |h_i(x_0) - h_i(x)| + \sum_{i\in I\setminus I_0} h_i(x_0) + \sum_{i\in I\setminus I_0} h_i(x) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для кожного $x \in U$, тобто $U \subseteq B_\varepsilon(x_0)$. □

Твердження 3.2. *Нехай X — топологічний простір і $((h_{n,i} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ — послідовність розбиттів одиниці на X. Тоді існує неперервна псевдометрика p на X, відносно якої всі функції $h_{n,i}$ неперервні.*

Доведення. Для довільних $x, y \in X$ покладемо

$$p(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \sum_{i\in I_n} |h_{n,i}(x) - h_{n,i}(y)|.$$

Із твердження 3.1 випливає, що p — неперервна псевдометрика на X. Крім того, для довільних $n \in \mathbb{N}$, $i \in I_n$ і $x, y \in X$ виконується нерівність $|h_{n,i}(x) - h_{n,i}(y)| \leq 2^n p(x, y)$. Тому всі функції $h_{n,i}$ є p-неперервними. □

Наслідок 3.1. *Довільний гаусдорфовий PP-простір є метрично чверть-вичерпним.*

4.

У даному пункті ми вивчатимемо властивості ліндельофових підмножин просторів із B-властивістю. Основним технічним інструментом при доведенні основних результатів виступає поняття залежності функцій від певної кількості координат.

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^S$, Y — довільна множина і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. Говорять, що f *зосереджена на множині $T \subseteq S$ відносно першої змінної*, якщо $f(x', y) = f(x'', y)$ для довільних $x', x'' \in X$ з $x'|_T = x''|_T$ і $y \in Y$; і f *залежить від $\aleph$ координат відносно першої змінної*, де $\aleph$ — нескінченний кардинал, якщо існує множина $T \subseteq S$ така, що f зосереджена на T і $|T| \leq \aleph$. Аналогічно вводяться поняття залежності функції відносно другої змінної чи просто залежності, якщо розглядати відображення $f : X \to \mathbb{R}$.

Зрозуміло, що для ліндельофового простору $X \subseteq \mathbb{R}^S$ кожна нарізно неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат.

Наступний результат займає центральне місце у вивченні властивостей ліндделефових підмножин просторів із B-властивістю.

Теорема 4.1. *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^S$ — ліндделефовий простір, Z — цілком регулярний простір, $Y = C_p(Z)$, $B \subseteq Y$ — щільна в Y множина і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — функція, неперервна відносно другої змінної і неперервна за сукупністю змінних у кожній точці множини $X \times B$. Тоді f залежить від зліченної кількості координат відносно першої змінної.*

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто для довільної зліченної множини $T \subseteq S$ існують $x', x'' \in X$ і $y \in Y$ такі, що $x'|_T = x''|_T$ і $f(x', y) \neq (x'', y)$. Зауважимо, що оскільки f неперервна відносно другої змінної і B щільна в Y, то без обмежень загальності ми можемо вважати, що $y \in B$.

Для кожного $y \in B$ і $\varepsilon > 0$, використовуючи неперервність f за сукупністю змінних у кожній точці множини $X \times \{y\}$ і ліндделефовість простору X, знайдемо покриття $(U(y, \varepsilon, n) : n \in \mathbb{N})$ простору X відкритими базисними множинами $U(y, \varepsilon, n)$ і послідовність $(V(y, \varepsilon, n) : n \in \mathbb{N})$ околів точки y в Y такі, що $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $(x', y'), (x'', y'') \in U(y, \varepsilon, n) \times V(y, \varepsilon, n)$. Враховуючи структуру відкритих базисних множин у просторі $X \subseteq \mathbb{R}^S$, знайдемо зліченну множину $T(y, \varepsilon) \subseteq S$ таку, що для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x', x'' \in X$ з умов $x'|_{T(y,\varepsilon)} = x''|_{T(y,\varepsilon)}$ і $x' \in U(y, \varepsilon, n)$ випливає $x'' \in U(y, \varepsilon, n)$. Покладемо $T(y) = \bigcup_{m=1}^{\infty} T(y, \frac{1}{m})$. Зрозуміло, що $T(y)$ зліченна і, зокрема, функція $f_y : X \to \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x, y)$, зосереджена на множині $T(y)$.

Нехай ω_1 — перший незліченний ординал. Використовуючи метод трансфінітної індукції, побудуємо зростаючу послідовність $(T_\alpha : \alpha < \omega_1)$ зліченних множин $T_\alpha \subseteq S$, послідовність $(\varepsilon_\alpha : \alpha < \omega_1)$ додатних чисел ε_α, послідовності $(x'_\alpha : \alpha < \omega_1)$, $(x''_\alpha : \alpha < \omega_1)$ і $(y_\alpha : \alpha < \omega_1)$ точок $x'_\alpha, x''_\alpha \in X$ і $y_\alpha \in Y$ і послідовність $(V_\alpha : \alpha < \omega_1)$ околів V_α точок y_α в Y такі, що для кожного $\alpha < \omega_1$ виконуються умови:

(*a*) $x'_\alpha|_{T_\alpha} = x''_\alpha|_{T_\alpha}$;

(*b*) $T(y_\alpha) \subseteq T_{\alpha+1}$;

(*c*) $|f(x'_\alpha, y) - f(x''_\alpha, y)| > \varepsilon_\alpha$ для кожного $y \in V_\alpha$.

Нехай T_1 — довільна зліченна множина. Використовуючи наше припущення, виберемо $x_1', x_1'' \in X$ і $y_1 \in B$ такі, що $f(x_1', y_1) \neq f(x_1'', y_1)$. Позначивши $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}|f(x_1', y_1) - f(x_1'', y_1)|$ і використавши неперервність f відносно другої змінної, виберемо окіл V_1 точки y_1 в Y такий, що виконується умова (c) при $\alpha = 1$.

Припустимо, що послідовності $(T_\alpha : \alpha < \beta)$, $(\varepsilon_\alpha : \alpha < \beta)$, $(x_\alpha' : \alpha < \beta)$, $(x_\alpha'' : \alpha < \beta)$, $(y_\alpha : \alpha < \beta)$ і $(V_\alpha : \alpha < \beta)$, де $\beta < \omega_1$, задовольняють умови (a), (b) і (c). Якщо β — граничний ординал, то покладемо $T_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} T_\alpha$. Якщо ж $\beta = \gamma + 1$ для деякого не більш, ніж зліченного ординала γ, то покладемо $T_\beta = T_\gamma \cup T(y_\gamma)$. Далі, використавши наше припущення аналогічно, як при $\alpha = 1$, знаходимо $x_\beta', x_\beta'' \in X$, $y_\beta \in B$, $\varepsilon_\beta > 0$ і окіл V_β точки y_β в Y такі, що виконуються умови (a) і (c).

Для кожного $\alpha < \omega_1$ виберемо скінченну множину $C_\alpha \subseteq Z$ і $\delta_\alpha > 0$ такі, що $\tilde{V}_\alpha = \{y \in Y : |y(z) - y_\alpha(z)| < \delta_\alpha$ для кожного $z \in C_\alpha\} \subseteq V_\alpha$. Оскільки $\aleph_1 = |\omega_1|$ регулярний кардинал, то використавши, крім того, лему Шаніна [14, с. 185], одержимо, що існують $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, скінченна множина $C \subseteq Z$ і множина $\Gamma \subseteq [1, \omega_1)$ такі, що $|\Gamma| = \aleph_1$, $\varepsilon_\gamma \geq \varepsilon_0$ і $\delta_\gamma \geq \delta_0$ для кожного $\gamma \in \Gamma$ і $C_{\gamma'} \cap C_{\gamma''} = C$ для довільних різних $\gamma', \gamma'' \in \Gamma$. Розглянемо неперервне відображення $\varphi : \{y_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \to \mathbb{R}^C$, $\varphi(y_\gamma) = (y_\gamma(z))_{z \in C}$. Оскільки $\mathbb{R}^C$ сепарабельний метричний простір, то існує $\gamma_0 \in \Gamma$ таке, що $|\Gamma_0| = \aleph_1$, де $\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : |y_\gamma(z) - y_{\gamma_0}(z)| < \delta_0$ для кожного $z \in C\}$.

Покажемо, що для довільного околу V точки $y_0 = y_{\gamma_0}$ множина $\Gamma(V) = \{\gamma \in \Gamma_0 : V \cap \tilde{V}_\gamma = \emptyset\}$ скінченна. Нехай $C' \subseteq Z$ — скінченна множина, $\delta' > 0$ і $V = \{y \in Y : |y(z) - y_0(z)| < \delta'$ для кожного $z \in C'\}$. Оскільки Z цілком регулярний простір, то з умови $V \cap \tilde{V}_\gamma = \emptyset$ для деякого $\gamma \in \Gamma_0$ випливає, що існує $z_\gamma \in C' \cap C_\gamma$ таке, що $|y_\gamma(z) - y_0(z)| \geq \delta_\gamma + \delta' > \delta_0$. З означення множини Γ_0 випливає, що $z_\gamma \notin C$. Врахувавши, що $C_{\gamma'} \cap C_{\gamma''} = C$ для довільних різних $\gamma', \gamma'' \in \Gamma_0$, одержимо, що $z_{\gamma'} \neq z_{\gamma''}$ для довільних різних $\gamma', \gamma'' \in \Gamma(V)$. Отже, $|\Gamma(V)| \leq |C' \setminus C| < \aleph_0$.

Виберемо $m_0 \in \mathbb{N}$ так, що $\frac{1}{m_0} < \varepsilon_0$. Оскільки множина $\Gamma' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(V(y_0, \frac{1}{m_0}, n))$ не більш, ніж зліченна, то $|\Gamma_0 \setminus \Gamma'| = \aleph_0$. Тому існує $\beta \in \Gamma_0$ таке, що $\beta > \gamma_0$ і $V(y_0, \frac{1}{m_0}, n) \cap \tilde{V}_\beta \neq \emptyset$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Нагадаємо, що $(U(y_0, \frac{1}{m_0}) : n \in \mathbb{N})$ є покриттям простору X. Візьмемо $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $x_\beta' \in U(y_0, \frac{1}{m_0} n_0))$. Оскільки, врахувавши (b), $T(y_0, \frac{1}{m_0}) \subseteq T(y_0) = T(y_{\gamma_0}) \subseteq T_\beta$ і $x_\beta'|_{T_\beta} = x_\beta''|_{T_\beta}$ згідно з (a), то $x_\beta'' \in U(y_0, \frac{1}{m_0}, n_0)$. Тепер взявши $y \in \tilde{V}_\beta \cap V(y_0, \frac{1}{m_0}, n_0)$, одержимо, що з одного боку згідно з (c)

$$|f(x'_\beta, y) - f(x''_\beta, y)| > \varepsilon_\beta \geq \varepsilon_0,$$

а з іншого,

$$|f(x'_\beta, y) - f(x''_\beta, y)| < \frac{1}{m_0} < \varepsilon_0$$

згідно з вибором множин $U(y_0, \frac{1}{m_0}, n_0)$ і $V(y_0, \frac{1}{m_0}, n_0)$.

Таким чином, ми прийшли до суперечності, і теорема доведена. □

Наступний результат дає позитивну відповідь на питання 1.4.

Теорема 4.2. *Нехай Z — цілком регулярний простір із B-властивістю і $X \subseteq Z$ — лінделефова підмножина простору Z. Тоді існують сепарабельний метризовний простір H і неперервне бієктивне відображення $\varphi : X \to H$.*

Доведення. Без обмежень загальності ми можемо вважати, що $Z \subseteq \mathbb{R}^S$. Позначимо $Y = C_p(Z)$ і розглянемо нарізно неперервну функцію $g : Z \times Y \to \mathbb{R}$, $g(z, y) = y(z)$. Оскільки Z має B-властивість, то існує послідовність неперервних функцій $g_n : Z \times Y \to \mathbb{R}$ така, що $g(z, y) = \lim_{n\to\infty} g_n(z, y)$ для довільних $(z, y) \in Z \times Y$. Покладемо $f_n = g_n|_{X\times Y}$. Згідно з теоремою 4.1 для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує не більш, ніж зліченна множина $T_n \subseteq S$ така, що f_n зосереджена на T_n відносно першої змінної. Тоді функція f, як поточкова границя послідовності $(f_n)_{n=1}^\infty$, зосереджена на не більш, ніж зліченній множині $T = \bigcup_{n=1}^\infty T_n$.

Залишилось розглянути неперервне відображення $\varphi : X \to \mathbb{R}^T$, $\varphi(x) = X|_T$, яке є бієкцією на сепарабельний метризовний простір $H = \varphi(X)$. Справді, якщо $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, то $y(x_1) = y(x_2)$ для кожного $y \in Y$, тому $x_1 = x_2$, адже Z цілком регулярний. □

Зауваження 4.1. Оскільки довільний зліченний простір X має B-властивість, адже простір $C_p(X)$ — метризовний, то довільний неметризовний зліченний простір є прикладом, який показує, що теорему 4.2 не можна підсилити до метризовності лінделефових підпросторів просторів із B-властивістю, аналогічно, як це можна зробити для компактних просторів.

5.

Тепер перейдемо до вивчення зв'язків між наміоковими просторами і морановими (слабко морановими) просторами.

Ми будемо використовувати наступні два допоміжні результати з [15], які дають можливість використовувати техніку залежності функцій від певної кількості координат для встановлення властивості Наміоки.

Твердження 5.1. *Нехай* $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ *— компактний простір,* $(Z, |\cdot - \cdot|)$ *— метричний простір,* $f : Y \to Z$ *— неперервне відображення,* $\varepsilon \geq 0$ *і множина* $S \subseteq T$ *такі, що* $|f(y') - f(y'')|_Z \leq \varepsilon$ *для довільних* $y', y'' \in Y$ *з* $y'|_S = y''|_S$*. Тоді для довільного* $\varepsilon' > \varepsilon$ *існують скінченна множина* $S_0 \subseteq S$ *і* $\delta > 0$ *такі, що* $|f(y') - f(y'')|_Z \leq \varepsilon'$ *для довільних* $y', y'' \in Y$ *з* $|y'(s) - y''(s)| < \delta$ *для кожного* $s \in S_0$*.*

Твердження 5.2. *Нехай* X *— берівський простір,* $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ *— компактний простір,* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *— нарізно неперервна функція. Тоді наступні твердження рівносильні:*

(*i*) f *має властивість Наміоки;*

(*ii*) *для довільної відкритої в* X *непорожньої множини* U *і числа* $\varepsilon > 0$ *існують відкрита в* X *непорожня множина* $U_0 \subseteq U$ *і не більш, ніж злічена множина* $S_0 \subseteq T$ *такі, що* $|f(x, y') - f(x, y'')| \leq \varepsilon$ *для довільних* $x \in U_0$ *і* $y', y'' \in Y$ *з* $y'|_{S_0} = y''|_{S_0}$*.*

Нехай X — топологічний простір. Нагадаємо означення гри Шоке на X, в якій беруть участь гравці α і β. На першому кроці спочатку гравець β вибирає відкриту в X непорожню множину U_0, а гравець α — відкриту в X непорожню множину $V_1 \subseteq U_0$. Далі гравець β вибирає відкриту непорожню множину $U_1 \subseteq V_1$, а гравець α вибирає відкриту непорожню множину $V_2 \subseteq U_1$ і так далі. На n-му кроці гравець β вибирає відкриту непорожню множину $U_{n-1} \subseteq V_{n-1}$, а гравець α — відкриту непорожню множину $V_n \subseteq U_{n-1}$. Гравець α виграє, якщо $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \emptyset$. Інакше виграє β.

Топологічний простір X називається *α-сприятливим у грі Шоке* або просто *α-сприятливим*, якщо гравець α має виграшну стратегію в цій грі, тобто якщо існує правило, яке забезпечує виграш гравцю α у випадку, коли α грає згідно з цим правилом. Відповідно топологічний простір X називатимемо *β-несприятливим*, якщо гравець β не має виграшної стратегії в цій грі.

Відомо (див. [17]), що β-несприятливість простору X у грі Шоке рівносильна беровості простору X (топологічний простір X називається *берівським*, якщо довільна відкрита в X множина є множиною другої категорії).

Центральне місце в даному пункті займає наступний результат.

Теорема 5.1. *Нехай X — берівський простір, $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ — компактний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — нарізно неперервна вимірна за Бером функція. Тоді f має властивість Наміоки.*

Доведення. Оскільки f вимірна за Бером, то існує така зліченна сім'я $\mathcal{F}$ неперервних на $X \times Y$ функцій, що функція f одержується за допомогою функцій з $\mathcal{F}$ шляхом переходу до поточкової границі відповідно не більш, ніж зліченну кількість разів. Занумеруємо елементи даної сім'ї в послідовність $\mathcal{F} = (f_n : n \in \mathbb{N})$.

Припустимо, що f не має властивості Наміоки. Тоді $|T| > \aleph_0$ і згідно з твердженням 5.2 існують відкрита в X непорожня множина U_0 і $\varepsilon_0 > 0$ такі, що для довільних відкритої в X непорожньої множини $U \subseteq U_0$ і не більш, ніж зліченної множини $S \subseteq T$ існують $x \in U$ і $y', y'' \in Y$ такі, що $y'|_S = y''|_S$ і $|f(x, y') - f(x, y'')| > \varepsilon_0$.

Побудуємо стратегію τ для гравця β у грі Шоке на просторі X. Множина U_0 — це перший хід гравця β. Нехай $V_1 \subseteq U_0$ — непорожня відкрита в X множина, яка є першим ходом гравця α. Оскільки неперервна функція f_1 має властивість Наміоки, то згідно з твердженням 5.2 існують відкрита в X непорожня множина $\tilde{U}_1 \subseteq V_1$ і зліченна множина $S_1 \subseteq T$ такі, що

$$|f_1(x, y') - f_1(x, y'')| < 1$$

для довільних $x \in \tilde{U}_1$ і $y', y'' \in Y$ з $y'|_{S_1} = y''|_{S_1}$. Використовуючи наше припущення, знайдемо точки $x_1 \in \tilde{U}_1$ і $y'_1, y''_1 \in Y$ такі, що $y'_1|_{S_1} = y''_1|_{S_1}$ і

$$|f(x_1, y'_1) - f(x_1, y''_1)| > \varepsilon_0.$$

Оскільки f неперервна відносно другої змінної, то існує відкритий в X окіл $U_1 \subseteq \tilde{U}_1$ точки x_1 такий, що

$$|f(x, y'_1) - f(x, y''_1)| > \varepsilon_0$$

для довільного $x \in U_1$. Тепер покладемо $U_1 = \tau(U_0, V_1)$ — другий хід гравця β.

Далі, нехай $V_2 \subseteq U_1$ — непорожня відкрита в X множина, яка є другим ходом гравця α. Виберемо відкриту в X непорожню множину $\tilde{U}_2 \subseteq V_2$ і зліченну множину $S_2 \subseteq T$, яка містить множину S_1, такі, що

$$|f_2(x,y') - f_2(x,y'')| < \frac{1}{2}$$

для довільних $x \in \tilde{U}_2$ і $y', y'' \in Y$ з $y'|_{S_2} = y''|_{S_2}$. Використовуючи наше припущення і неперервність f відносно першої змінної знайдемо відкриту в X непорожню множину $U_2 \subseteq \tilde{U}_2$ і точки $y'_2, y''_2 \in Y$ такі, що $y'_2|_{S_2} = y''_2|_{S_2}$ і

$$|f(x,y'_2) - f(x,y''_2)| > \varepsilon_0$$

для кожного $x \in U_2$, і покладемо $U_2 = \tau(U_0, V_1, U_1, V_2)$.

Продовжуючи цей процес до нескінченності, одержимо послідовності $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих в X непорожніх множин U_n і V_n, $(y'_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(y''_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $y'_n, y''_n \in Y$ і зростаючу послідовність $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ зліченних множин $S_n \subseteq T$ такі, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконуються умови:

(a) $U_n \subseteq V_n \subseteq U_{n-1}$;

(b) $y'_n|_{S_n} = y''_n|_{S_n}$;

(c) $|f_n(x,y') - f_n(x,y'')| < \frac{1}{n}$ для довільних $x \in U_n$ і $y', y'' \in Y$ з $y'|_{S_n} = y''|_{S_n}$;

(d) $|f(x,y'_n) - f(x,y''_n)| > \varepsilon_0$ для кожного $x \in U_n$.

Оскільки простір X берівський, тобто β-несприятливий у грі Шоке, то стратегія τ не є виграшною для гравця β. Отже, існує така партія, в якій гравець β, граючи згідно з τ, програє. Іншими словами, існують згадані вище послідовності з властивостями (a), (b),(c) і (d) такі, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \emptyset$.

Візьмемо довільну точку $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ і позначимо $S_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Нехай функція $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ є поточковою границею деякої підпослідовності $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ послідовності $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Врахувавши, що $S_{n_k} \subseteq S_0$ і $x_0 \in U_{n_k}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, і перейшовши в умові (c) до границі при $k \to \infty$, одержимо, що $g(x_0, y') = g(x_0, y'')$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $y'|_{S_0} = y''|_{S_0}$. Отже, для довільної поточкової границі g послідовності $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ її вертикальний розріз $g^{x_0} : Y \to \mathbb{R}$, $g^{x_0}(y) = g(x_0, y)$, зосереджений на множині S_0. Оскільки поточкова границя (не обов'язково неперервних) функцій $g_n : Y \to \mathbb{R}$, зосереджених на множині S_0, також зосереджена на множині S_0, то і неперервний вертикальний розріз $f^{x_0} : Y \to \mathbb{R}$, $f^{x_0}(y) = f(x_0, y)$, функції f зосереджений на множині S_0. Згідно з твердженням 5.1 існує скінченна множина

$T_0 \subseteq S_0$ така, що $|f(x_0, y') - f(x_0, y'')| \leq \varepsilon_0$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $y'|_{T_0} = y''|_{T_0}$. Оскільки послідовність $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ зростає, то існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $T_0 \subseteq S_{n_0}$. Тоді, з одного боку, з умови (b) і вибору T_0 випливає, що $|f(x_0, y'_{n_0}) - f(x_0, y''_{n_0})| \leq \varepsilon_0$. А з іншого боку, згідно з (d) $|f(x_0, y'_{n_0}) - f(x_0, y''_{n_0})| > \varepsilon_0$, що приводить до суперечності. $\square$

Наступний наслідок дає позитивну відповідь на питання 1.1.

Наслідок 5.1. *Довільний берівський слабко морановий простір є наміоковим простором.*

Література

[1] H. Lebesgue, *Sur l'approximation des fonctions* // Bull. Sci. Math. **22** (1898), 278–287.

[2] O. V. Maslyuchenko, V. K. Maslyuchenko, V. V. Mykhaylyuk, O. V. Sobchuk, *Paracompactness and separately continuous mappings* // General Topology in Banach spaces. Nova Sci. Publ. Nantintong, New-York. (2001), 147–169.

[3] W. Moran, *Separate continuity and support of measures* // J. London. Math. Soc. **44** (1969), 320–324.

[4] H. P. Rosental, *On injective Banach spaces and the $L^{\infty}(\mu)$ for finite measure μ* // Acte Math. **124** (1970), 205–247.

[5] G. Vera, *Baire measurability of separately continuous functions* // Quart. J. Math. Oxford. **39** (1988), N 153, 109–116.

[6] К. Куратовский, *Топология. Т.1.* М.:Мир, 1966, 594 с.

[7] T. O. Banakh, *(Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications in the theory of separately continuous functions* // Mat. studii. **18** (2002), N 1, 10–28.

[8] W. Rudin, *Lebesgue first theorem* // Math. Analysis and Applications, Part B. Adv. in Math. Supplem Studies, Academic Press, **7B** (1981), 741–747.

[9] O. V. Sobchuk, *PP-spaces and Baire classifications* // Internat. Conf. on Funct. Analysis and its Appl. Dedic. to the 110-th ann. of Stefan Banach. May 28–31, 2002, Lviv, p. 189.

[10] О. В. Собчук, *Берівська класифікація і простори Лебеґа* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. Чернівці: Рута, Вип. 111, (2001), 110–112.

[11] О. О. Карлова, *Перший функціональний лебегівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Математика. Чернівці: Рута, Вип. 191–192, (2004), 52–60.

[12] M. Burke, *Borel measurability of separately continuous functions* // Top. Appl. **129** (2003), N 1, 29–65.

[13] M. Burke, *Borel measurability of separately continuous functions II* // Top. Appl. **134** (2003), N 3, 159–188.

[14] Р. Энгелькинг, *Общая топология.* М.:Мир, 1986, 752 с.

[15] V. V. Mykhaylyuk, *Namioka spaces and topological games* // Bull. Austral. Math. Soc. **73** (2006), 263–272.

[16] I. Namioka, *Separate continuity and joint continuity* // Pacif. J. Math. **51** (1974), N 2, 515–531.

[17] J. Saint-Raymond,*Jeux topologiques et espaces de Namioka* // Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), N 3, 409–504.

Відомості про авторів

Володимир Васильович Михайлюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського, 2
58012 Чернівці
Україна
E-Mail: mathan@chnu.cv.ua