Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 1, 99 – 115

*Посвящается светлой памяти
Игоря Владимировича Скрыпника*

Об асимптотическом поведении решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка

Владимир А. Кондратьев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Изучается асимптотическое поведение решений параболического и эллиптического полулинейного уравнения второго порядка в цилиндрической области с нелинейным краевым условием. Получен главный член асимптотического разложения решения. Показано, что каждое решение такой задачи асимптотически эквивалентно решению некоторого обыкновенного дифференциального уравнения.

2000 MSC. 35J35, 35J60.

Ключевые слова и фразы. Нелинейные краевые условия, параболичность, верхние оценки.

1. Введение

Пусть Ω — гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$, L — эллиптический оператор:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

Статья поступила в редакцию 24.12.2007
Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 06-01-00288-а, 06-01-00715-а и ИНТАС 05-1000008-7921.

ISSN 1810 – 3200.

где $x = (x_1, \dots x_n)$, $a_{ij}(x)$ — ограниченные измеримые в Ω функции,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq m|\xi|^2$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$, $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $m = \text{const} > 0$.

Рассматриваются решения уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - f(x, u) \tag{1.1}$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Lu = f(x, u) \tag{1.2}$$

в $\Pi_0 = \Omega \times (0, \infty)$, удовлетворяющие нелинейному краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(x, u) = 0 \tag{1.3}$$

при $(x, t) \in \Gamma_0 = \partial\Omega \times (0, \infty)$, где

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(\vec{n}, x_i),$$

$\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Предполагается, что функции $f(x, u)$, $g(x, u)$, $f_u(x, u)$, $g_u(x, u)$ непрерывны в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1$, $f(x, 0) = g(x, 0) = f_u(x, 0) = g_u(x, 0) = 0$.

Будем обозначать $\Pi_{a,b} = \{(x, t) : \ x \in \Omega, \ a < t < b\}$, $\Pi_{a,\infty} = \Pi_a$, $\Gamma_{a,b} = \{(x, t) : \ x \in \partial\Omega, \ a < t < b\}$, $\Gamma_{a,\infty} = \Gamma_a$, $\Pi = \Pi_{-\infty,+\infty}$, $\Gamma = \Gamma_{-\infty,+\infty}$.

В качестве решения уравнения (1.1) или (1.2), удовлетворяющего краевому условию (1.3) понимается обобщенное решение в стандартном определении. Исследованию уравнений вида (1.1), (1.2) посвящено много работ. Отметим работы [1–5], хотя их значительно больше.

В работе [1] рассматривались уравнения (1.1), (1.2) в случае $f(x, u) \equiv f(u)$, $g(x, u) \equiv 0$. Доказано, что если решение имеет нулевой предел при $t \to \infty$ равномерно в $\overline{\Omega}$, то в случае уравнения (1.1) найдется решение обыкновенного уравнения

$$\dot{\alpha} = -f(\alpha)$$

такое, что $u(x, t) - \alpha(t) = O(e^{-\beta t})$, $\beta = \text{const} > 0$ от u не зависит. При этом $\alpha(t) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда u меняет знак в каждой области Π_τ, $\tau > 0$.

В случае уравнения (1.2) доказано такое же утверждение, где $\alpha(t)$ решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{\alpha} = f(\alpha).$$

Отметим, что эти утверждения неверны, если $g(x,u) \equiv g(u) \not\equiv 0$.

В работе [2] рассматривались уравнения (1.1), (1.2) в случае $f(x,u) = a(x)|u|^{\sigma-1}u$, $a(x) \geq 0$ — непрерывная функция, $\sigma = \mathrm{const} > 1$, $g(x,u) \equiv 0$. Доказано, что в случае уравнения (1.1) существует $\lim_{t\to\infty} ut^{\frac{1}{1-\sigma}}$, который равен одному из чисел 0, $\pm(\frac{1}{\overline{a}(\sigma-1)})^{\frac{1}{\sigma-1}}$. Здесь и далее

$$\overline{a} = (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}\int\limits_{\Omega} a(x)\,dx > 0, \qquad dx = dx_1, \dots dx_n.$$

В случае уравнения (2), если $\lim_{t\to+\infty} u = 0$, то существует $\lim_{t\to\infty} ut^{\frac{2}{1-\sigma}}$, который равен одному из чисел $\pm(\frac{2(1+\sigma)}{\overline{a}(1-\sigma)})^{\frac{1}{\sigma-1}}$, 0. Причем, как в эллиптическом, так и в параболическом случае, предел нуль тогда и только тогда, когда $u(t,x)$ меняет знак в каждой области Π_τ.

Заметим, что это утверждение в параболическом случае имеет место для всех решений в Π_0, а в эллиптическом случае для решений, которые стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Дело в том, что у решения параболической задачи все решения стремятся к нулю, а в случае эллиптической это не так. Существует $a(x) \geq 0$, $a(x) \not\equiv 0$ такая, что уравнение (1.2) (где L — оператор Лапласа) $f(x,u) = a(x)|u|^{\sigma-1}u$, $\sigma > 1$ имеет в Π_0 положительное решение, удовлетворяющее условию (1.3) на Γ_0 с $g(x,u) \equiv 0$, такое, что $\overline{\lim}_{t\to+\infty} u(x,t) = +\infty$ [2].

Если же $a(x) \geq \mathrm{const} > 0$, то нетрудно доказать, что все решения (1.2), удовлетворяющие условию (1.3) на Γ_0 имеют нулевой предел при $t \to +\infty$ и, следовательно, $\lim_{t\to+\infty} ut^{\frac{2}{1-\sigma}}$ существует и равен либо $\pm(\frac{2(1+\sigma)}{\overline{a}(1-\sigma)})^{\frac{1}{\sigma-1}}$, либо нулю.

В работе [3] рассмотрен случай $f(x,u) = a(x)|u|^{\sigma-1}u$, $a(x) \geq 0$, $\sigma > 1$, $g(x,u) \equiv 0$ и установлена асимптотика при $\to +\infty$ всех решений уравнений (1.1), (1.2) в Π_0, удовлетворяющих условию (1.3) на Γ_0. В случае уравнения (1.1) эта асимптотическая формула имеет вид

$$u = \sum_{\substack{i\geq 0\\ 0\leq k\leq k(i)}} t^{\frac{1}{1-\sigma}-i}\ln^k t\Phi_{ik}(x),$$

k — целые, $k(0) = 0$. В случае уравнения (1.2), если $\lim_{t\to+\infty} u = 0$, то

$$u = \sum_{i\geq 0} t^{\frac{2}{1-\sigma}-i}\Phi_i(x).$$

В работе [4] изучался случай

$$f(x,u) = a(x)f(u), \quad g(x,u) = b(x)g(u), \quad a(x) \geq 0, \quad b(x) \geq 0 - \tag{1.4}$$

непрерывные функции.

Случаю задачи (1.1), (1.3) посвящена работа [5]. Ниже будут описаны результаты этой работы и других, относящихся к задаче (1.1), (1.3), и приведены дополнения к ним.

2. Случай параболического уравнения

Функция $u(x,t)$ называется решением уравнения (1.1) в Π_0, удовлетворяющим условию (1.3) на Γ_0, если $u(x,t) \in W_2^1(\Pi_{a,b})$ при любых $a, b,\ 0 \leq a < b < \infty,\ u(x,t)$ — непрерывна в $\overline{\Pi}_0$ и

$$\int\limits_{\Pi_{a,b}} \left[\Psi\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + \Psi f(x,u)\right] dx\,dt + \int\limits_{\Gamma_{a,b}} \Psi g(x,u)\,dx\,dt = 0$$

какова бы ни была $\Psi \in W_2^1(\Pi_{a,b})$.

В работе [4] рассмотрен случай (1.4) и доказано, что если $u(x,t)$ положительное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.3), то при $t \to +\infty$

$$u(x,t) = \alpha(t)(1 + o(1)),$$

где $\alpha(t)$ — решение уравнения

$$\dot{\alpha} = -\lambda h(\alpha), \qquad \alpha(0) = 1,$$

$h = \varepsilon_f f(t) + \varepsilon_q g(t)$, причем

$$\varepsilon_f = 0,\ \varepsilon_q = 1,\ \text{если}\ \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)} = 0$$

$$\varepsilon_f = 1,\ \varepsilon_q = 0,\ \text{если}\ \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)} = \infty$$

$$\varepsilon_f = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \varepsilon_q = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{если}\ \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

$$\lambda = \frac{\varepsilon_q \int_{\partial\Omega} f(x)ds + \varepsilon_f \int_{\Omega} a(x)dx}{\operatorname{mes}\Omega}.$$

Укажем условия на f, g, которые требуются в работе [4]:

1) $uf(u) > 0,\ ug(u) > 0$ при $u \neq 0$

2) $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{g(t)}$ существует (конечный или бесконечный).

3) $|t\dot{\alpha}(t)| \le C\alpha(t)$ при всех $t > 1$

4) функции f, g выпуклы.

Наиболее ограничительным здесь является условие 3), и встает вопрос, можно ли от него освободиться. Показывается, что его можно ослабить, но полностью снять невозможно.

В работах [5, 6] изучался более общий случай, когда f, g зависят от x и от u.

Условию 3) удовлетворяют функции $f(u) = |u|^{\sigma-1}u,\ g(u) = |u|^{\sigma-1}u$, $\sigma > 1$ и не удовлетворяет функция $u|\ln u|^k$ ни при каких k.

В работе [6] предполагается, что

$$f_u \ge 0,\ g_u \ge 0, \quad h(u) = \int\limits_{\Omega} f(x,u)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} g(x,u)\,ds \neq 0 \text{ при } u \neq 0$$

$$|f(x,u)| \le C\int\limits_{\Omega} |f(x,u)|\,dx; \quad |g(x,u)| \le C\int\limits_{\Omega} |g(x,u)|\,ds \text{ при } u \in \mathbb{R}^1$$

$$|f_u(x,u)| \le C\int\limits_{\Omega} |f_u(x,u)|\,dx; \quad |g_u(x,u)| \le C\int\limits_{\partial\Omega} |g_u(x,u)|\,ds,\ u \in \mathbb{R}^1. \tag{2.1}$$

Приведем основной результат работы [6].

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.1). *Любое решение уравнения* (1.1) *в* Π_0, *удовлетворяющее условию* (1.3) *стремится к нулю при* $t \to +\infty$ *равномерно в* $\overline{\Omega}$. *Если, кроме того,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t}h(\alpha_0(t))}{\alpha_0(t)} = 0,$$

где

$$\dot{\alpha}_0 = -\frac{h(\alpha_0)}{\operatorname{mes}\Omega}, \quad \alpha_0(0) = 1,$$

и $u(x,t)$ *— положительное решение уравнения* (1.1) *в* Π_0, *удовлетворяющее условию* (1.3) *на* Γ_0, *то*

$$u(x,t) = \alpha_0(t)(1 + o(1))$$

при $t \to +\infty$.

Если же $u(x,t)$ *меняет знак в каждой области* Π_a, $a > 0$, *то* $u(x,t) = O(e^{-\beta t})$, *где* $\beta > 0$ *от* u *не зависит.*

3. Примеры

Уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - a(x)u^p,\ p > 1$ с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u^q = 0,\ q > 1$. Все условия теоремы 1 выполняются.

Уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - a(x)u|\ln^p u|,\ p < -1$ с краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u|\ln^q u| = 0, \qquad q < -1,\ a(x) \geq 0,\ b(x) \geq 0.$$

Все условия теоремы 2.1 также выполняются.

Если же уравнение (1.1) имеет вид $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - a(x)u|\ln u|^p$, $0 > p \geq -1$, а краевые условия $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, то условия теоремы 2.1 не выполняются и асимптотика решений (она получена в работе [3]) отличается от утверждаемой в теореме 2.1.

Наконец, если уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - a(x)u|\ln u|^{-1}|\varphi(u)$, где $\varphi(u) \to 0$ при $u \to 0$, то условия теоремы 2.1 опять выполнены.

4. Эллиптические уравнения

Такое уравнение также рассматривалось в работах [4,7] и получен результат, аналогичный результату для параболического уравнения. Так в работе [7] доказано, что если $\lim u(x,t) = 0$ при $t \to +\infty$, то $u = \alpha(t)(1 + o(1))$, где $\dot{\alpha} = -h(\alpha)$ при условии $\int_0 \frac{h(\alpha)}{\alpha^2}\, d\alpha < \infty$.

Рассмотрим уравнение (1.2). В качестве решения (1.2), удовлетворяющго условию (1.3), понимается обобщенное решение. Напомним это определение.

Обобщенное решение уравнения (1.2), удовлетворяющее (1.3) в Π_0 — это функция $u(t,x) \in W_2^1(\Pi_{a,b}) \bigcap L_\infty(\Pi_{a,b})$ при любых a, b $(0 \leq a < b < \infty$ и такая, что

$$-\int\limits_{\Pi_{a,b}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\, dx\, dt - \int\limits_{\Pi_{a,b}} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t}\, dx\, dt - \int\limits_{\Gamma_{a,b}} g(x,u)\Psi(t)\, ds\, dt = \int\limits_{\Pi_{a,b}} \Psi(x,t) f(x,t)\, dx\, dt$$

какова бы ни была $\Psi(x,t) \in W_2^1(\Pi_{a,b}),\ \Psi|_{t=a} = \Psi|_{t=b} = 0$.

Предполагается, что f, g, f_u, g_u непрерывны в $\Omega \times \overline{\mathbb{R}^1}$, f_{uu}, g_{uu} непрерывны в $\Omega \times \mathbb{R}^1_+$.

$$f(x,0) = g(x,0) = f_u(x,0) = g_u(x,0) = 0, \quad uf_u,\ ug_u > 0 \tag{4.1}$$

при $u \neq 0$.

Важную роль играет функция

$$h(u) = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\left[\,\int\limits_{\Omega} f(x,u)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} g(x,u)\,ds\right].$$

Требуется, чтобы

$$\begin{gathered} |f(x,u)| + |g(x,u)| \le C|h(x,u)| \\ |f_u(x,u)| + |g_u(x,u)| \le C|h_u(x,u)| \end{gathered} \tag{4.2}$$

и

$$\left|\frac{uf_u}{f}\right| + \left|\frac{ug_u}{g}\right| + \left|\frac{uf_{uu}}{f_u}\right| + \left|\frac{ug_{uu}}{g_u}\right| \le C \quad \text{при } |u| \le 1, \tag{4.3}$$

а также, что $f_u, f_{uu}, g_u, g_{uu}, h_u$ — монотонные при $x \in \Omega,\ u \ne 0$ по u (не важно, возрастающие или убывающие).

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot\alpha = h(\alpha). \tag{4.4}$$

Легко видеть, что у него существует решение $\alpha_0(t)$, такое, что $\alpha_0(t) > 0,\ \dot\alpha_0(t) < 0$ на $[0,\infty),\ \lim_{t\to+\infty}\alpha_0(t) = 0,\ \lim_{t\to+\infty}\dot\alpha_0(t) = 0$. Более того, каково бы ни было $a > 0$, существует единственное $\alpha_0(t)$, такое, что $\alpha_0(0) = a$.

Предполагается, что

$$\begin{gathered} \lim_{t\to+\infty} t^{1/3}\frac{\dot\alpha_0}{\alpha_0} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} t^{1/3}\frac{\ddot\alpha_0}{\dot\alpha_0} = 0, \\ \lim_{t\to+\infty} \frac{\dddot\alpha_0}{\ddot\alpha_0} = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{\ddddot\alpha_0}{\dddot\alpha_0}t^{1/3} = 0. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Будет доказываться следующая теорема.

Теорема 4.1. *Если выполнены условия* (4.1)–(4.5), $u(x,t) > 0$ — *решение уравнения* (1.1) *в* Π_0, *удовлетворяющее условию* (1.3) *на* Γ_0, $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$, *то*

$$u(x,t) = \alpha_0(t)(1 + o(1)).$$

Перед доказательством необходимо установить ряд достаточно элементарных свойств некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot\alpha = -F(\alpha), \tag{4.6}$$

где

$$F(\alpha) \in C^1[0,\infty), \quad F(0) = 0, \quad \alpha F(\alpha) \geq 0, \quad F'(\alpha) \geq 0,$$

$$\left|\frac{tF'}{F}\right| \leq C, \qquad \left|\frac{tF''}{F'}\right| \leq C, \qquad F''(t) \neq 0 \tag{4.7}$$

при $t \neq 0$. Решение уравнения (4.6) называется кнезеровским решением, если оно положительно на $[t', \infty)$ и имеет нулевой предел при $t \to +\infty$. Легко видеть, что кнезевские решения существуют, более того, каковы бы ни были $t_0 > 0$, $a > 0$ существует единственное кнезеровское решение (1.1) такое, что $\alpha(t_0) = \alpha$.

Заметим, что если $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ — кнезеровские решения уравнения (4.6), то

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1.$$

Следующее утверждение проверяется элементарно.

Пусть $\beta(t) > 0$, $\dot{\beta}(t) < 0$ и

$$\ddot{\beta} \geq F(\beta) \quad (\leq) \quad t_0 < t < \infty.$$

Если $\alpha(t)$ — кнезеровское решение уравнения (4.6) такое, что $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, то $\alpha_0(t) \geq \beta(t)$ $(\leq)$ при $t > t_0$.

Будем называть две функции $g_1(t)$, $g_2(t)$ эквивалентными, если они не имеют нулей при t достаточно больших и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g_1(t)}{g_2(t)} = 1.$$

Символ $g_1 \backsim g_2$ означает эквивалентность.

Рассмотрим еще уравнение

$$\ddot{\alpha} = (1 + \gamma(t))F(\alpha), \tag{4.8}$$

где $\gamma(t) \backsim Ct^{\gamma}$, $\gamma = \mathrm{const} < 0$, $C = \mathrm{const} \neq 0$.

Такое уравнение имеет кнезеровское решение и каковы бы ни были $t' > 0$, $a' > 0$ существует единственное кнезеровское решение уравнения (4.7), такое, что $\alpha(t') = a'$.

Сделаем в (4.7) замену независимого переменного

$$s = \int\limits_1^t \sqrt{1 + p(t)}\, dt.$$

Получим

$$\dot\alpha = \frac{d\alpha}{ds}\sqrt{1+p(t)}, \qquad \ddot\alpha = \frac{d^2\alpha}{ds^2}(1+p(t)) + \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{ds}\frac{p'(t)}{\sqrt{1+p(t)}}$$

и уравнение (4.7) преобразуется в следующее:

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = f(\alpha) - \frac{C\gamma t^{\gamma-1}}{2(1+t^\gamma)^{3/2}}\frac{d\alpha}{ds}.$$

Рассмотрим сначала случай $C > 0$. В таком случае

$$\frac{d^2\alpha_+}{ds^2} \le f(\alpha_+), \qquad \alpha_+(0) = 1. \tag{4.9}$$

Будем обозначать через $\alpha_+(t)$ решение уравнения (4.7) при $C > 0$, а через $\alpha_-(t)$ при $C < 0$.

Выше уже было замечено, что $\alpha_+(t) \ge \alpha_0(s(t))$.

Аналогично показывается, что

$$\alpha_-(t) \le \alpha_0(s_2(t)),$$

где $s_2(t) = \int_1^t \sqrt{1-p(t)}\,dt$. Таким образом,

$$\alpha_0(s(t)) \le \alpha_+(t) \le \alpha_0(t) \le \alpha_2(t) \le \alpha_0(s_2(t)). \tag{4.10}$$

Лемма 4.1. *Если*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{1+\gamma}\dot\alpha_0}{\alpha_0} = 0,$$

то функции $\alpha_\pm(t)$, $\alpha_0(t)$ *— эквивалентны.*

Доказательство. Имеем

$$\Big|\frac{\alpha_0(t)-\alpha_0(s(t))}{\alpha_0(t)}\Big| \le \frac{Ct^{\gamma+1}\dot\alpha_0(t)}{\alpha_0(t)}. \tag{4.11}$$

Следовательно, $\lim \frac{\alpha_0(s(t))}{\alpha_0(t)} = 1$. Отсюда и из (4.10) следует, что $\alpha_+(t) \backsim \alpha_0(t)$.

Доказательство эквивалентности функций $\alpha_0(t)$ и $\alpha_-(t)$ совершенно аналогично:

$$\Big|\frac{\alpha_0(t)-\alpha_0(s_2(t))}{\alpha_0(s_2(t))}\Big| \le t^{\gamma+1}\Big|\frac{\dot\alpha_0(s_2(t))}{\alpha_0(s_2(t))}\Big| \le \frac{s_2(t)^{\gamma+1}\dot\alpha_0(s_2(t))}{\alpha_0(s_2(t))} \to 0$$

при $t \to +\infty$. □

Лемма 4.2. *Если выполнены условия* (4.5), (4.7), *то функции* $\ddot{\alpha}_\pm$, $\ddot{\alpha}_0$ *— попарно эквивалентны, а также* $F(\alpha_\pm)$, $F(\alpha_0)$ *— попарно эквивалентны.*

Доказательство. Сначала докажем эквивалентность функций $F(\alpha_+)$ и $F(\alpha_0)$.

Имеет место неравенство:

$$\Big|\frac{F(\alpha_+)-F(\alpha_0)}{F(\alpha_+)}\Big| \le \frac{|\alpha_+-\alpha_0|F'(\alpha_+)}{\alpha_+F(\alpha_+)}\cdot\alpha_+$$

и правая часть этого неравенства стремится к нулю при $t\to+\infty$ в силу эквивалентности $\alpha_+,\ \alpha_0$ и (4.7).

Следующая оценка очевидна:

$$\Big|\frac{\ddot{\alpha}_+-\ddot{\alpha}_0}{\ddot{\alpha}_+}\Big| \le \Big|\frac{F(\alpha_+)-F(\alpha_0)}{F(\alpha_+)}\Big| + t^\gamma \to 0 \quad \text{при } t\to+\infty$$

ввиду эквивалентности $F(\alpha_+),\ F(\alpha_0)$. Точно так же доказывается эквивалентность $\ddot{\alpha}_0,\ \ddot{\alpha}_-$ □

Лемма 4.3. *Если выполнены условия* (4.5), (4.7), *то* $\dot{\alpha}_\pm,\ \dot{\alpha}_0$ *— попарно эквивалентны.*

Доказательство. Действительно,

$$\Big|\frac{\dot{\alpha}_+-\dot{\alpha}_0}{\dot{\alpha}_0}\Big| \le \Big|\frac{1}{\dot{\alpha}_0(t)}\int\limits_t^\infty \frac{\ddot{\alpha}_+(\tau)-\ddot{\alpha}_0(\tau)}{\ddot{\alpha}_0}\,\ddot{\alpha}_0(\tau)\,d\tau\Big| \le \varepsilon,$$

если t так велико, что $\big|\frac{\ddot{\alpha}_+(\tau)-\ddot{\alpha}_0(\tau)}{\ddot{\alpha}_0(\tau)}\big| \le \varepsilon$ при всех $\tau > t$, а это имеет место в силу эквивалентности $\ddot{\alpha}_+,\ \ddot{\alpha}_0$. □

Лемма 4.4. *Если выполнены условия* (4.3), (4.5), *то* $f'(\alpha_\pm),\ f'(\alpha_0)$ *эквивалентны.*

Доказательство. Очевидно

$$\Big|\frac{f'(\alpha_0)-f'(\alpha_+)}{f'(\alpha_0)}\Big| \le \frac{|\alpha_+-\alpha_0|f''(\alpha_0(t))}{\alpha_0(t)f'(\alpha_0)}\cdot\alpha_0 \le \varepsilon\alpha_0 h''(\alpha_0) \le C\varepsilon,$$

т.е. $f'(\alpha_+)$ и $f'(\alpha_0)$ — эквивалентны в случае, когда h'' убывает. Аналогично рассматриваются и остальные случаи. □

Переходим к доказательству теоремы 2.1.

Доказательство будет излагаться в частном случае: $a_{ij}(x) \equiv \delta_{ij}$, т.е. в случае, когда старшая часть оператора является оператором Лапласа. Метод доказательства основан на построении барьеров: верхних и нижних решений, естественно, в смысле обобщенных решений. Проверка того, что предложенные функции будут функциями сравнения для общего эллиптического оператора, весьма громоздка (в случае слабых решений) и единственно для того, чтобы избежать этих формальных вычислений, рассматриваются классические решения.

Итак, пусть Ω — гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u(x,t) \in C^2(\overline{\Pi}_0)$

$$u_{tt} + \Delta u - f(x,u) = 0, \quad x \in \Omega, \ t > 0 \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + g(x,u) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ t > 0, \tag{4.13}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Функции f, g удовлетворяют условиям (4.3), .

Рассмотрим функцию

$$v(t,x) = \alpha(t) + \ddot{\alpha}(t) w(x,t),$$

где

$$\ddot{\alpha} = \frac{h(\alpha)}{1 - k\delta(t)}, \tag{4.14}$$

$$k = \frac{\operatorname{mes}\Omega + \operatorname{mes}\partial\Omega}{\operatorname{mes}\Omega}, \quad h(u) = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\left[\int\limits_{\Omega} f(x,u)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} g(x,u)\,dx\right],$$

$\alpha(t)$ — кнезеровское решение уравнения (4.14), $\delta(t) = -t^{-\frac{2}{3}}$.

Функция $w(x,t)$ — решение краевой задачи

$$\Delta w = \delta(t) - 1 + \frac{f(x,\alpha)}{h(\alpha)}(1 - k\delta(t)), \quad x \in \Omega, \ t \geq t_0, \tag{4.15}$$

удовлетворяющее краевому условию:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = -\delta(t) - \frac{g(x,\alpha)}{h(\alpha)}[1 - k\delta(t)], \quad x \in \partial\Omega, \, t > t_0, \tag{4.16}$$

$$k = 1 + \frac{\operatorname{mes}\partial\Omega}{\operatorname{mes}\Omega}.$$

Условия разрешимости задачи (4.15), (4.16) выполнены, ибо

$$\delta(t)\operatorname{mes}\Omega - \operatorname{mes}\Omega + \delta(t)\operatorname{mes}\Omega \\ + [1 - k\delta(t)]\frac{\int_\Omega f(x,\alpha)\,ds + \int_{\partial\Omega} g(x,\alpha)\,ds}{h(\alpha)} = 0.$$

Следовательно, существует единственное решение задачи (4.15), (4.16) такое, что $\min_{\overline{\Omega}} w = 0$. Из классических оценок решений эллиптических краевых задач следует, что

$$|w| \le C,$$

$$|w_t| \le C|\delta'(t)| + C\frac{|f_u\dot{\alpha}|}{h} + \frac{|g_u\dot{\alpha}|}{h} + \frac{|fh'(\alpha)\dot{\alpha}|}{h^2} + \frac{|gh'\dot{\alpha}|}{h^2} \\ \le C|\delta'(t)| + Ct^{-1/3} = C_1 t^{-2/3};$$

$$|w_{tt}| \le C|\delta''(t)| + C\frac{f_{uu}\dot{\alpha}^2}{h} + C\frac{g_{uu}\dot{\alpha}^2}{h} + C|f_u| + C|g_u| \\ + C\Big|\frac{f_u h_u \dot{\alpha}^2}{\alpha^2}\Big| + C\Big|\frac{g_u\dot{\alpha}\alpha^2}{h^3}\Big| + C\Big|\frac{fh''\dot{\alpha}^2}{h^2}\Big| + C\Big|\frac{gh''\dot{\alpha}^2}{h^2}\Big| \\ + C\Big|\frac{fh'}{h}\Big| + C\Big|\frac{gh'}{h}\Big| + C\Big|\frac{\dot{\alpha}^2 h'^2}{h^3}f\Big| + C\Big|\frac{gh'^2\dot{\alpha}^2}{h^3}\Big| \\ + C\Big[\,|\delta''(t)| + \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} + \Big|\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}\Big| + |h'(\alpha)|\,\Big] \\ \le C|\delta''(t)| + Ct^{-2/3} \le C_1 t^{-2/3}.$$

Для того, чтобы $v(t,x)$ была верхним решением, требуется выполнение неравенств:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \Delta v - f(x,v) \le 0, \quad x \in \Omega \tag{4.17}$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial n} + g(x,v) \ge 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.18}$$

Оценим левую часть неравенства (4.17), которая есть

$$\ddot{\alpha} + \ddddot{\alpha}\,w + 2\dddot{\alpha}\,w_t + \ddot{\alpha}w_{tt} + \ddot{\alpha}\Delta w - f(x,\alpha+\ddot{\alpha}w) \\ = \frac{h(\alpha)}{1-k\delta(t)}(\delta(t) + \frac{f(x,\alpha)}{h(\alpha)}(1-k\delta(t)) \\ - f(x,\alpha) + \ddddot{\alpha}\,w + 2\dddot{\alpha}\,w_t + \ddot{\alpha}w_{tt} \\ \le \frac{h(\alpha)}{1-k\delta(t)}\delta(t) + |\ddddot{\alpha}\,w| + 2|\dddot{\alpha}\,w_t| + |\ddot{\alpha}w_{tt}| \\ \le \ddot{\alpha}\delta(t) + |\ddddot{\alpha}\,t^{-1/2}| + |\ddot{\alpha}t^{-2/3}|\cdot o(1) + \dot{\alpha}t^{-2/3}\cdot o(1) \le 0$$

при t достаточно большом. Проверим, что неравенство (4.16) также выполнено:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\alpha}\frac{\partial w}{\partial n} + g(x,v) \geq \ddot{\alpha}\frac{\partial w}{\partial n} + g(x,\alpha)& \\
\geq \frac{h(\alpha)}{1-k\delta(t)}\Big[-\delta(t) - \frac{g(x,\alpha)}{h(\alpha)}(1-k\delta(t))\Big] + g(x,\alpha)& \\
= -\delta(t)\ddot{\alpha} \geq 0&
\end{aligned}
$$

при $t \geq T_1$.

Из принципа максимума следует, что $u(x, T_1+\tau) \leq v(x, T_1)$, если τ достаточно большое. Отсюда и из принципа максимума следует, что

$$
u(x, t+\tau) \leq v(x,t), \tag{4.19}
$$

т.е. $u(x,t) \leq v(x, t-\tau)$ при некотором $\tau > 0$.

Установим оценку типа (4.14) для $u(x,t)$ снизу, предполагая, что $u > 0$. Нижнее решение, как и верхнее, строится в виде

$$
v(x,t) = \alpha(t) + \ddot{\alpha} w(t,x),
$$

где $\alpha(t)$ — кнезеровское решение уравнения

$$
\ddot{\alpha} = \frac{h(\alpha)}{1-k\delta(t)}, \qquad \delta(t) = t^{-2/3},
$$

$k = 1 + \frac{\operatorname{mes}\partial\Omega}{\Omega}$, а (x,t) при каждом фиксированном $t > 0$ решение задачи

$$
\begin{aligned}
&\Delta w = -1 + \delta(t) + \frac{f(x,\alpha)}{h(\alpha)}[1 - k\delta(t)], \quad x \in \Omega \\
&\frac{\partial w}{\partial n} = -\delta(t)\frac{g(x,\alpha)}{h(\alpha)}[1-k\delta(t)],
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

такое, что $\max_{\overline{\Omega}} w = 0$.

Из оценок решений эллиптических краевых задач следует, что

$$
|w| \leq C, \quad |w_t| \leq Ct^{-1/3}, \quad |w_{tt}| \leq Ct^{-2/3}.
$$

Эти оценки выводились при построении верхнего решения, а уравнения для $w(x,t)$ и $\alpha(t)$ совпадают как при построении верхнего, так и при построении нижнего решения. Проверим, что функция $v(x,t)$

является нижним решением.

$$
\begin{aligned}
\ddot\alpha &+ \ddddot\alpha w + 2\dddot\alpha w_t + \ddot\alpha w_{tt} + \ddot\alpha\Delta w - f(x,v) \\
&\geq \ddot\alpha(1+w) + \dddot\alpha w_t + 2\ddot\alpha w - f(x,\alpha) \\
&\geq \frac{-h(\alpha)}{1-k\delta(t)}(1+w) - f(x,\alpha) + \frac{h(\alpha)}{1-k\delta(t)}(\delta(t) \\
&+ \frac{f(x,\alpha)}{h(\alpha)}[1-k\delta(t)) - |\ddddot\alpha w| - |\ddot\alpha w_{tt}| - f(x,\alpha) - 2|\dddot\alpha w_t| \\
&\geq \frac{h(\alpha)\delta(t)}{1-k\delta(t)} - C|\dddot\alpha|t^{-1/3}o(1) - C\ddot\alpha t^{-2/3}o(1) - C|\ddot\alpha|t^{-2/3}o(1) \\
&- C\ddot\alpha t^{-2/3}o(1) \geq \frac{\ddot\alpha}{2}\delta(t) - |\ddot\alpha|t^{-2/3}o(1) > 0, \quad t > t_1,\ x \in \Omega.
\end{aligned}
$$

Кроме того,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial n} + g(x,v) &\leq \ddot\alpha\frac{\partial w}{\partial n} + g(x,\alpha) \\
&= \ddot\alpha\Big(-\delta(t) - \frac{g(x,\alpha)}{h(\alpha)}[1-k\delta(t)]\Big) + g(x,\alpha) \\
&\leq -\delta(t)\ddot\alpha - \frac{h(\alpha)}{1-k\delta(t)}\cdot\frac{g(x,\alpha)}{h(\alpha)}[1-k\delta(t)] + g(\alpha) \\
&\leq -\delta(t)\ddot\alpha \leq 0,
\end{aligned}
$$

т.е. $v(x,t)$ есть нижнее решение задачи (4.10), (4.11), (4.8). Из принципа максимума следует, что

$$u(x,t) \geq v(x,\tau),$$

где τ достаточно большое. Из этого неравенства и из (4.14) получаем, что

$$v(x,t) \backsim \alpha(t).$$

Можно проверить, что условия теоремы выполняются при

$$h(\alpha) = \alpha^\sigma, \quad \sigma > 1, \qquad h(\alpha) = \frac{\alpha}{|\ln\alpha|^\sigma}, \quad \sigma > 1$$

и при

$$h(\alpha) = \frac{\alpha}{\ln\ \alpha|\ln\ln\alpha|^{-k}}$$

при любом $k > 0$.

Если $h(\alpha) = \frac{\alpha}{\ln\alpha}$, то условия теоремы не выполняются и, как показано в работе [7] утверждение $u(x,\alpha) \sim \alpha(t)$ неверно.

Проверим, что при $h(\alpha)=\frac{\alpha|\ln(\ln\alpha)|^k}{|\ln\alpha|}$, $k>0$, условия теоремы 2.1 выполнены.

Функция $\alpha(t)$ является кнезеровским решением уравнения:

$$\ddot{\alpha}=\frac{\alpha}{|\ln\alpha|}|\ln(\ln\alpha)|^k,\quad k<0.$$

Значит

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2}=\int\limits_0^2\frac{\alpha}{|\ln\alpha|}|\ln(\ln\alpha)|^k\,d\alpha,$$

т.е.

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2}=\frac{\alpha^2|\ln(\ln\alpha)|^k}{|\ln\alpha|}+O\Bigg(\int\limits_0^2\frac{\alpha}{\ln^2\alpha}|\ln(\ln\alpha)|^k\,d\alpha\Bigg).$$

Отсюда

$$\dot{\alpha}=-\frac{\alpha}{(\ln\alpha)^{1/2}}|\ln(\ln\alpha)|^{k/2}(1+O(\frac{1}{|\ln\alpha|})).$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$|\ln\alpha|^{3/2}|\ln(\ln\alpha)|^{-k/2}=t(1+O(\ln\alpha))$$

и

$$|\ln\alpha|=t^{2/3}|\ln(\ln\alpha)|^{k/3}(1+o(1)).$$

Следовательно,

$$t^{1/3}\frac{|\dot{\alpha}|}{\alpha}\le|\ln(\ln\alpha)|^{k/6}(1+o(1)))$$

и

$$\lim_{t\to+\infty}t^{1/3}|\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}|=0,\qquad\text{если } k<0.$$

Проверим еще необходимые для выполнения условий теоремы оценки

$$\Big|t^{1/3}\frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}}\Big|\le t^{1/3}\frac{\alpha|\ln\alpha(\ln\alpha)\alpha|^k|\ln\alpha|^{1/2}}{|\ln\alpha|\alpha|\ln(\ln\alpha)|^{k/2}}\le\frac{|\ln(\ln\alpha)|^{k/2}}{|\ln(\ln\alpha)|^{k/3}}\to 0,$$
$$\text{при } t\to+\infty.$$

Наконец,

$$\Big|t^{1/3}\frac{\dddot{\alpha}}{\ddot{\alpha}}\Big|\le t^{1/3}\frac{\dot{\alpha}|\ln(\ln\alpha)|^k\ln\alpha}{\ln\alpha\alpha|\ln(\ln\alpha)|^k}\le t^{1/3}\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\to 0\ \text{при } t\to+\infty.$$

И, наконец,

$$\left|t^{1/3}\frac{\dddot{\alpha}}{\ddot{\alpha}}\right| \le t^{1/3}\frac{\ddot{\alpha}|\ln(\ln\alpha)|^k\ln\alpha}{\dot{\alpha}|\ln\alpha|\dot{\alpha}|\ln(\ln\alpha)|^k} \le \frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}}t^{1/3} \to 0 \text{ при } t\to+\infty.$$

Таким образом, в случае $\frac{\alpha|\ln(\ln\alpha)|^k}{\ln\alpha}$ при любом $k<0$, асимптотическая формула теоремы 2.1 имеет место.

Наконец, надо убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$\left|\frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right| + \left|\frac{\alpha f''(\alpha)}{\alpha}\right| \le C$$

в окрестности точки $\alpha = 0$.

В самом деле,

$$\left|\frac{\alpha f'(\alpha)}{f(\alpha)}\right| \le \frac{\alpha|\ln(\ln\alpha)|^k\alpha|\ln\alpha|}{\alpha^2\ln\alpha|\ln(\ln\alpha)|^k} \le C_1,$$

$$\left|\frac{\alpha f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right| \le \alpha\frac{\alpha\ln\alpha\alpha^2\ln\alpha\ln(\ln\alpha)}{\alpha^3|\ln(\ln\alpha)|^k} \le C.$$

Теорема 4.2. *Если выполнены условия теоремы* 4.1, $u(x,t)$ *— решение уравнения* (1.2), *которое меняет знак в любой области* Π_a, $a>0$, *то*

$$u(x,t) < Ce^{-\alpha t},$$

где $\alpha = const > 0$, *от* u *не зависит.*

Такая теорема доказана в [1] для случая параболического уравнения (1.1), в рассматриваемом эллиптическом случае доказательства аналогичны.

Литература

[1] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, *Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях* // Мат. Сб. **189** (1988), вып. 3, 45–68.

[2] V. A. Kondratiev, L. Veron, *Asymptotic behavior of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations* // Asymptotic Analysis (1997), N 14, 117–156.

[3] И. В. Филимонова, *Асимптотика решений полулинейного параболического уравнения в цилиндрической области* // Мат. Сб. **195** (2004), 141–156.

[4] T. Boni, *On the asymptotic behavior of solutions for some semilinear parabolic and elliptic of second order with nonlinear boundary conditions* // Nonlinear Analysis, (2000), N 45, 895–908.

[5] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, *Об асимптотическом поведении решений полулинейных параболических уравнений* // Математический Сборник, (2008).

[6] В. А. Кондратьев, *Об асимптотическом поведении решений нелинейных параболических уравнений второго порядка* // Труды МИАН, (2008).

[7] И. В. Филимонова, *О поведении решений полулинейного параболического или эллиптического уравнения, удовлетворяющих нелинейному краевому условию в цилиндрической области* // Труды семинара им. И. Г. Петровского, (2007).

Сведения об авторах

Владимир Александрович Кондратьев

Московский государственный университет
Ленинские Горы,
119899 Москва,
Россия
E-Mail: vla-kondratiev@yandex.ru