©2010. **М.І. Конаровська**

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Установлено коректність сингулярної параболічної задачі зі спеціальними крайовими умовами.

Ключові слова: крайова задача, модельна крайова задача, функція Гріна, білінійні форми, умова Лопатинського, ядра Пуассона, функції типу ядер Пуассона.
MSC (2000): 35K35, 35K40, 35K50

Вступ.

Коректність загальних параболічних крайових задач встановлено у монографіях [1, 3, 4]. Задачі зі спеціальними крайовими умовами і сингулярні крайові задачі вивчались у багатьох працях, зокрема в [2, 5, 6].

Розглядається параболічна система з сингулярним оператором Бесселя і парними похідними по одній просторовій змінній. Відшукується класичний розв'язок системи з крайовими умовами типу умов Діріхле і Неймана для рівнянь довільного порядку. На основі формули Гріна-Остроградського отримано зображення розв'язку задач з допомогою функції Гріна задачі Коші. Побудовано розв'язок задач з використанням операторів дробового інтегрування та диференціювання редукцією задач до інтегральних рівнянь.

Задачі з крайовими умовами за виділеними змінними моделюють фізичні та інші процеси.

1. Про зображення розв'язку крайових задач для сингулярних параболічних систем.

У шарі $\Pi_{t_0}^+ \equiv (t_0; T) \times E_n^+$, $E_n^+ = (0, +\infty) \times E_{n-2} \times (0, +\infty)$ розглянемо систему рівнянь, яка містить тільки парні похідні по x_1 функцій $u_1(t,x), \ldots, u_N(t,x)$

$$L(t,D) \equiv \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \sum_{|k|+2j \le 2b} A_{kj}(t) D_{x_1}^{2k_1} D_{x''}^{k''} B_{x_n}^j u(t,x) = f(t,x) \qquad (1)$$

з умовами

$$u(t,x)|_{t=t_0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0, \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial^{2l} u(t,x)}{\partial x_1^{2l}}\right|_{x_1=0} = g_l(t,x'), \quad l = \overline{0, b-1}, \qquad (3)$$

або з умовами (2) та

$$\left.\frac{\partial^{2l+1}u(t,x)}{\partial x_1^{2l+1}}\right|_{x_1=0}=\tilde g_l(t,x'),\quad l=\overline{0,b-1}. \tag{4}$$

В системі (1) коефіцієнти матриці $A_{kj}(t)$ – неперервні функції на $[t_0,T]$, $D_{x''}^{k''}=$ $=\frac{\partial^{|k''|}}{\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_{n-1}^{k_{n-1}}}$ – оператор диференціювання, $B_{x_n}=\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\frac{2\nu+1}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$, $\nu\ge-\frac12$, – оператор Бесселя, $x=(x_1,x')$, $x'=(x'',x_n)$, $x''=(x_2,\ldots,x_{n-1})$, $|k|=2k_1+|k''|$, $|k''|=\sum\limits_{i=2}^{n-1}k_i$.

Система (1) називається B-параболічною, якщо характеристичне рівняння

$$\det\left\{\sum_{|k|+2j=2b}A_{kj}(t)(i\sigma_1)^{2k_1}(i\sigma'')^{k''}(-\sigma_n^2)^j-\lambda E\right\}=0$$

має всі корені $\lambda=\lambda(t,\sigma)$, в яких $Re\lambda\le-\delta|\sigma|^{2b}$, $\delta>0$, $\sigma\in E_n^+$, $t\in(t_0;T)$.

Нехай $T_{x_n}^{\xi_n}G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)$ – матриця Гріна системи (1). Вона є цілою функцією аргументів $(x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2b}$, $(x''-\xi'')(t-\tau)^{-1/2b}$, $x_n(t-\tau)^{-1/2b}$, $\xi_n(t-\tau)^{-1/2b}$, парною по останніх двох аргументах, і визначається як обернене перетворення Фур'є-Бесселя нормальної фундаментальної матриці відповідної системи в образах Фур'є-Бесселя. Оператор $T_{x_n}^{\xi_n}$ – оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [2, с. 14] і

$$f(x,\xi)=T_{x_n}^{\xi_n}f(\tilde x,x_n,\tilde\xi)=$$

$$=\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_0^\pi f(\tilde x,\sqrt{x_n^2+\xi_n^2-2x_n\xi_n\cos\alpha},\tilde\xi)\sin^{2\nu}\alpha d\alpha,$$

де $x=(\tilde x,x_n)$, $\tilde x=(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Припустимо, що матриця Гріна системи (1) задовольняє умову Λ_1, тобто для її похідних справджується оцінка [1, с.116]

$$|D_x^kB_{x_n}^jT_{x_n}^{\xi_n}G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)|\le C_{kj}(t-\tau)^{-\frac{n_\nu+|k|+2j}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c|\frac{x-\tilde\xi}{(t-\tau)^{1/2b}}|^q}\right\}, \tag{Λ_1}$$

$\tau<t\le T$, $x\in E_n^+$, C_{kj}, c – додатні сталі, $n_\nu=n+2\nu+1$, $q=\frac{2b}{2b-1}$.

Введемо простір $C_{k(t),N}^{(2b)}(\Pi_{t_0}^+)$ як сукупність вектор-функцій $u_1(t,x),\ldots,$ $u_N(t,x)$, які мають в шарі $\Pi_{t_0}^+$ неперервні похідні по x до порядку $2b$ зі скінченною нормою

$$||u||_{2b}=\sum_{|k|+2j\le2b}\sup_{\Pi}\left\{\sqrt{\sum_{i=1}^N|D_x^kB_{x_n}^ju_i|^2e^{-k(t)|x|^q}}\right\},$$

де $k(t-t_0,a) = a(c-\varepsilon)\left[(c-\varepsilon)^{2b-1} - a^{2b-1}(t-t_0)\right]^{-\frac{1}{2b-1}}$, $0 < \varepsilon < c$, $a > 0$, $t_0 < t < t_1$, $t_1 = t_0 + ((c-\varepsilon)a^{-1})^{2b-1}$.

Позначимо

$$\Gamma^{\pm}(t,\tau,x,\xi) \equiv T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) \pm T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1+\xi_1,x''-\xi'',x_n).$$

Теорема 1. *(про зображення розв'язку). Якщо розв'язки задач (1) – (3) і (1), (2), (4) існують, то вони зображаються відповідно формулами*

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n^+} \Gamma^-(t,t_0,x,\xi)\varphi(\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{E_n^+} \Gamma^-(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{E_{n-1}^+} \sum_{l=0}^{b-1} \sum_{|k|+2j\le 2b-2-2l} 2(-1)^{|k|} A'_{kj}(\tau)\times \tag{5}$$

$$\times D_{\xi_1}^{2k_1+1} D_{\xi''}^{k''} B_{\xi_n}^{j} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1,x''-\xi'',x_n) g_l(\tau,\xi')\xi_n^{2\nu+1}d\xi',$$

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n^+} \Gamma^+(t,t_0,x,\xi)\varphi(\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{E_n^+} \Gamma^+(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{E_{n-1}^+} \sum_{l=0}^{b-1} \sum_{|k|+2j\le 2b-2-2l} 2(-1)^{|k|} A'_{kj}(\tau)\times \tag{6}$$

$$\times D_{\xi_1}^{2k_1} D_{\xi''}^{k''} B_{\xi_n}^{j} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1,x''-\xi'',x_n) \tilde{g}_l(\tau,\xi')\xi_n^{2\nu+1}d\xi',$$

де $l = \overline{0,b-1}$, A'_{kj} *– транспоновані матриці.*

Доведення. Доведення теореми ґрунтується на використанні формули Гріна-Остроградського. Випишемо для оператора L системи (1) спряжений оператор $L^*(t,D)$ [2, c.25]

$$L^*(t,D) \equiv -\frac{\partial}{\partial t}E - \sum_{|k|+2j\le 2b} A'_{kj}(t) D_{x_1}^{2k_1}(-D_{x''})^{k''} B_{x_n}^{j},$$

матриця $A'_{kj}(t)$ транспонована до $A_{kj}(t)$.

Розглянемо область $Q^+ = (t_0,T)\times\Omega^+$, де Ω^+ прямокутний паралелепіпед

$$0 \le \xi_1 \le R, \quad -R \le \xi_s \le R, \quad 0 \le \xi_n \le R, \quad s = \overline{2,n-1},$$

Γ^+ – межа області Ω^+. Припустимо, що функції $u(t,x)$ і $v(t,x)$ визначені в області $Q^+=(t_0,T)\times\Omega^+$ і допускають застосування операторів L і L^*. Тоді

$$[vLu-(L^*v')'u]x_n^{2\nu+1}=\frac{\partial}{\partial t}(uv)x_n^{2\nu+1}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(B_s[u,v]x_n^{2\nu+1}\right), \tag{7}$$

де $B_s[u,v]$, $s=\overline{1,n-1}$, білінійні форми, які містять похідні $D_{\xi_1}^{2k_1}D_{\xi''}^{k''}B_{\xi_n}^{j}u$, $D_{\xi_1}^{2k_1}D_{\xi''}^{k''}B_{\xi_n}^{j}v$ з $|k|+2j\le 2b-1$, а $B_n[u,v]$ має вигляд

$$B_n[u,v]=\sum_{2\le|k|+2j\le 2b}\left[vA_{kj}(t)\frac{\partial}{\partial x_n}(D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j-1}u)-(-1)^{|k|}A'_{kj}(t)\frac{\partial}{\partial x_n}(D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j-1}v)u\right].$$

Для подальшого дослідження важливо знати явний вигляд білінійної форми $B_1[u,v]$:

$$B_1[u,v]=\sum_{l=0}^{b-1}\sum_{|k|+2j\le 2b-2-2l}(-1)^{|k|}A'_{kj}(t)D_{\xi_1}^{2k_1}D_{\xi''}^{k''}B_{\xi_n}^{j}vD_{x_1}^{2l+1}u-$$

$$-\sum_{l=0}^{b-1}\sum_{|k|+2j\le 2b-2-2l}(-1)^{|k|}A'_{kj}(t)D_{\xi_1}^{2k_1+1}D_{\xi''}^{k''}B_{\xi_n}^{j}vD_{x_1}^{2l}u. \tag{8}$$

У рівності (7) візьмемо за $v(\tau,\xi)$ матрицю Гріна $T_{x_n}^{\xi_n}G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)$ системи (1), а за $u(\tau,\xi)$ – неперервно-диференційовну функцію в Q^+ $2b$ раз, парну по x_n. Зауважимо, що матриця $T_{x_n}^{\xi_n}G'(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)$ як матриця аргументів τ і ξ є регулярним розв'язком спряженої системи, тобто $L^*T_{x_n}^{\xi_n}G'(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)=0$ при $t>\tau$ [2]. Крім того, $T_{x_n}^{\xi_n}G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)$ має особливість при $\tau=t$. Проінтегруємо (7) по області $(t_0,t-\varepsilon)\times\Omega^+$:

$$\int_{t_0}^{t-\varepsilon}d\tau\int_{\Omega^+}T_{x_n}^{\xi_n}G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)Lu\xi_n^{2\nu+1}d\xi=$$

$$=\int_{\Omega^+}T_{x_n}^{\xi_n}G(t,t-\varepsilon,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)u(t-\varepsilon,\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi-$$

$$-\int_{\Omega^+}T_{x_n}^{\xi_n}G(t,t_0,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n)u(t_0,\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t-\varepsilon}d\tau\int_{\Gamma^+}B_s[T_{x_n}^{\xi_n}G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n),u]\cos(\vec{n},\xi_i)\xi_n^{2\nu+1}d\Gamma_\xi^+.$$

Перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$ і скористаємось в другому доданку властивістю δ-подібності функції Гріна задачі Коші, а також розпишемо поверхневі інтеграли. Будемо мати для $x \in \Omega^+$

$$u(t,x) = \int\limits_0^R \dots \int\limits_0^R T_{x_n}^{\xi_n} G(t, t_0, x_1 - \xi_1, x'' - \xi'', x_n) u(t_0, \xi) \xi_n^{2\nu+1} d\xi_1 \dots d\xi_n +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^t d\tau \int\limits_0^R \dots \int\limits_0^R T_{x_n}^{\xi_n} G(t, \tau, x_1 - \xi_1, x'' - \xi'', x_n) Lu \xi_n^{2\nu+1} d\xi_1 \dots d\xi_n +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^t d\tau \int\limits_{-R}^R \dots \int\limits_0^R B_1[T_{x_n}^{\xi_n} G(t, \tau, x_1, x_2 - \xi_2, \dots, x_n),$$
$$u(\tau, 0, \xi_2, \dots, \xi_n)] \xi_n^{2\nu+1} d\xi_2 \dots d\xi_n -$$

$$- \int\limits_{t_0}^t d\tau \int\limits_{-R}^R \dots \int\limits_0^R B_1[T_{x_n}^{\xi_n} G(t, \tau, x_1 - R, x_2 - \xi_2, \dots, x_n),$$
$$u(\tau, R, \xi_2, \dots, \xi_n)] \xi_n^{2\nu+1} d\xi_2 \dots d\xi_n -$$

$$- \sum_{s=2}^{n-1} \int\limits_{t_0}^t d\tau \int\limits_0^R \int\limits_{-R}^R \dots \int\limits_0^R B_s[T_{x_n}^{\xi_n} G(t, \tau, x_1 - \xi_1, \dots, x_s - \xi_s, x_{s+1} - \xi_{s+1}, \dots, x_n),$$
$$u(\tau, \xi_1, \dots, \xi_s, \xi_{s+1} \dots, \xi_n)] \Bigg|_{\xi_s=-R}^{\xi_s=R} \xi_n^{2\nu+1} d\xi_1 \dots d\xi_{s-1} d\xi_{s+1} \dots d\xi_n +$$

$$- \int\limits_{t_0}^t d\tau \int\limits_0^R \int\limits_{-R}^R \dots \int\limits_{-R}^R B_n[T_{x_n}^R G(t, \tau, x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \dots, x_n),$$
$$u(\tau, \xi_1, \xi_2, \dots, R)] R^{2\nu+1} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}. \quad (9)$$

Якщо $x \bar{\in} \Omega^+$, то в лівій частині (9) замість $u(t,x)$ буде нуль.

Якщо функція $u \in C_{k(t),N}^{(2b)}(\Pi_{t_0}^+)$ і матриця Гріна задовольняє умову Λ_1, то інтеграли з (9), в підінтегральну функцію яких входить R, прямують до нуля при $R \to \infty$ [6]. Отримаємо

$$u(t,x) = \int\limits_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} G(t, t_0, x_1 - \xi_1, x'' - \xi'', x_n) u(t_0, \xi) \xi_n^{2\nu+1} d\xi +$$

$$+\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) Lu(\tau,\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi+ \tag{10}$$

$$+\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^+} B_1[T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1,x''-\xi'',x_n), u(\tau,\xi')]\xi_n^{2\nu+1}d\xi',$$

якщо $x_1 > 0$. При $x_1 < 0$ ліва частина в (10) дорівнює нулеві. Візьмемо у формулі (10) точку, симетричну з $(t, x_1, \ldots, x_n)$ відносно гіперплощини $x_1 = 0$, будемо мати

$$\int_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,t_0,-x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) u(t_0,\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi+$$

$$+\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{E_n^+} T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,-x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) Lu(\tau,\xi)\xi_n^{2\nu+1}d\xi+ \tag{11}$$

$$+\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^+} B_1[T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,-x_1,x''-\xi'',x_n), u(\tau,\xi')]\xi_n^{2\nu+1}d\xi' = 0.$$

Похідні матриці Гріна мають таку властивість:

$$D_{\xi_1}^m D_{\xi''}^k B_{\xi_n}^j T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,-x_1-\xi_1,x''-\xi'',x_n) =$$

$$= (-1)^m D_{\xi_1}^m D_{\xi''}^k B_{\xi_n}^j T_{x_n}^{\xi_n} G(t,\tau,x_1+\xi_1,x''-\xi'',x_n). \tag{12}$$

(12) одержується за рахунок парності нормальної фундаментальної матриці $Q(t,\tau,\sigma)$ відповідної системи в образах Фур'є-Бесселя.

Просумуємо вирази з (10) і (11). Тоді, використовуючи властивість (12) та зображення білінійної форми (8), дістанемо зображення розв'язку (6). Аналогічно, якщо розглянути різницю (10) і (11), отримаємо зображення (5).

2. Існування розв'язку крайових задач.

2.1. Модельна крайова задача. Розглянемо систему зі сталими коефіцієнтами, яка містить тільки групу старших і по змінній x_1 в систему входять тільки парні похідні

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj} D_{x_1}^{2k_1} D_{x''}^{k''} B_{x_n}^j u(t,x), \tag{1'}$$

з нулевою початковою умовою (2) та крайовими умовами (3).

Для знаходження розв'язку використаємо перетворення Фур'є-Бесселя по x'', x_n, а по t – перетворення Лапласа. В образах Фур'є-Бесселя-Лапласа отримаємо наступну задачу на півосі

$$\left(pE - \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(i\sigma'')^{k''}(-\sigma_n^2)^j D_{x_1}^{2k_1}\right) v(p, x_1, \sigma') = 0, \tag{13}$$

$$D_{x_1}^{2l} v(p, x_1, \sigma')|_{x_1=0} = \tilde{g}_l(p, \sigma'), \quad l = \overline{0, b-1}, \tag{14}$$

$$v(p, x_1, \sigma')|_{x_1=\infty} = 0, \tag{15}$$

$\sigma' = (\sigma'', \sigma_n)$, $\tilde{g}_l(p, \sigma') = F_{x'', x_n} L_t g_l(t, x')$. Розв'язок системи (13) шукаємо у вигляді

$$v(p, x_1, \sigma') = \alpha e^{i\sigma_1 x_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_N \end{pmatrix} e^{i\sigma_1 x_1}. \tag{16}$$

Підставляючи (16) в (13), отримаємо однорідну алгебраїчну систему відносно невідомих $\alpha_1, \dots, \alpha_N$

$$\left(pE - \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(i\sigma_1)^{2k_1}(i\sigma'')^{k''}(-\sigma_n^2)^j\right) \alpha = 0, \tag{17}$$

яка має ненульовий розв'язок при умові, що

$$\det\left(pE - \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(i\sigma_1)^{2k_1}(i\sigma'')^{k''}(-\sigma_n^2)^j\right) = 0. \tag{18}$$

Многочлен в (18) є многочленом степеня $2bN$ відносно σ_1. Нехай $\{\sigma_1^{(s)}(p, \sigma')\}_{s=1}^{2bN}$ корені цього многочлена. Розміщення цих коренів характеризує лема 1.4 [1, с.354], згідно якої маємо, що якщо система ($1'$) параболічна, то в області

$$D_a = \{(p, \sigma') \neq 0,\ Re\ p = a \geq 0\}$$

система (18) не має дійсних коренів і половина коренів знаходиться у верхній характеристичній півплощині, а половина – у нижній.

Позначимо ці корені $\{\sigma_1^{\pm(s)}(p, \sigma')\}_{s=1}^{bN}$, де $\sigma_1^{+(s)}$ – корені, для яких $Im\,\sigma_1 > 0$, $\sigma_1^{-(s)}$ – корені, для яких $Im\ \sigma_1 < 0$. Кожному $\sigma_1^{\pm(s)}(p, \sigma')$ кореню відповідає частинний розв'язок і загальний розв'язок записується у вигляді

$$v(p, x_1, \sigma') = \sum_{s=1}^{bN} P_s^+(p, x_1, \sigma') e^{i\sigma_1^{+(s)} x_1} + \sum_{s=1}^{bN} P_s^-(p, x_1, \sigma') e^{i\sigma_1^{-(s)} x_1}, \tag{19}$$

де $P_s^+(p,x_1,\sigma')$ та $P_s^-(p,x_1,\sigma')$ – многочлени по x_1, степеня на одиницю меншого, ніж кратність коренів $\sigma_1^{+(s)}$ та $\sigma_1^{-(s)}$ відповідно. Оскільки кореням, які лежать у верхній півплощині, відповідають спадні розв'язки, а кореням, які лежать у нижній півплощині, – зростаючі розв'язки, то виконання умови (15) досягатиметься за рахунок коефіцієнтів многочленів $P_s^-(p,x_1,\sigma')$, тобто $P_s^-(p,x_1,\sigma') \equiv 0$. Нехай всі $\sigma_1^{+(s)}$ – прості корені. Тоді

$$v(p,x_1,\sigma') = \sum_{s=1}^{bN} C_s \alpha_s e^{i\sigma_1^{(s)} x_1}, \quad \sigma_1^{(s)} \equiv \sigma_1^{+(s)}, \alpha_s = \begin{pmatrix} \alpha_{1s} \\ \cdots \\ \alpha_{Ns} \end{pmatrix}.$$

Для знаходження C_s задовольнимо крайові умови в (14)

$$D_{x_1}^{2l} v(p,x_1,\sigma')|_{x_1=0} = \sum_{s=1}^{bN} C_s \alpha_s (i\sigma_1^{(s)})^{2l} = \tilde{g}_l(p,\sigma'), l = \overline{0,b-1}. \tag{20}$$

Отримаємо систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь. Кількість невідомих та кількість рівнянь дорівнює bN. Нехай $\Delta(p,\sigma')$ – головний визначник системи (20). Якщо виконується умова Я.Б. Лопатинського, а саме

$$\Delta(p,\sigma') \neq 0, \quad (p,\sigma') \in D_a,$$

то система (20) має ненульовий розв'язок і $C_s = \frac{\Delta_s}{\Delta}$, $s = \overline{1,bN}$, Δ_s – визначники, утворені з визначника Δ заміною s-го стовпця на стовпець з вільних членів системи (20). Тоді компоненти розв'язку $v_j(p,x_1,\sigma')$, $j = \overline{1,N}$, визначаються наступним чином

$$v_j(p,x_1,\sigma') = \sum_{m=0}^{b-1} Q_{jm}(p,x_1,\sigma') \tilde{g}_m(p,\sigma'), \tag{21}$$

де

$$Q_{jm}(p,x_1,\sigma') = \sum_{s=1}^{bN} \frac{\Delta_s^m}{\Delta} \alpha_{js} e^{i\sigma_1^{(s)} x_1},$$

$\Delta_s^m = (\Delta_s^{m1}, \ldots, (-1)^{N+1}\Delta_s^{mN})$, Δ_s^{mj} – відповідні алгебраїчні доповнення до елементів $\tilde{g}_m^{(j)}, j = \overline{1,N}$; нижній індекс s вказує на те, що відповідні алгебраїчні доповнення вираховуються в Δ_s. У формулі (21) елементи $Q_{jm}(p,x_1,\sigma')$ – матриці розміру $1 \times N$, а функції $\tilde{g}_m(p,\sigma')$ – матриці розміру $N \times 1$.

Для подальшого дослідження важливо знати оцінки $Q_{jm}(p,x_1,\sigma')$. Підрахуємо степінь однорідності Q_{jm}, $j = \overline{1,N}$, $m = \overline{0,b-1}$. Зауважимо, що $\{\sigma_1^{(s)}(p,\sigma')\}_{s=1}^{bN}$ як функції (p,σ') задовольняють умову однорідності [1, с.355]

$$\{\sigma_1^{(s)}(a^{2b}p, a\sigma')\}_{s=1}^{bN} = \{a\sigma_1^{(s)}(p,\sigma')\}_{s=1}^{bN}.$$

Степінь однорідності Δ дорівнює $bN(b-1)$, а степені однорідності Δ_s^m – $bN(b-1)-2m$. Враховуючи вигляд Q_{jm}, визначається степінь однорідності Q_{jm}, який дорівнює $(-2m)$. Крім того, для Q_{jm} справджується оцінка

$$|Q_{jm}| \leq \sum_{s=1}^{bN} \left| \frac{\Delta_s^m}{\Delta} \alpha_{js} e^{i\sigma_1^{(s)} x_1} \right| \leq C_{jm} \rho^{-2m}(p,\sigma') e^{-c_0 \rho(p,\sigma') x_1}, \tag{22}$$

$$c_0 = \min_{1 \leq s \leq b} Im\ \sigma_1^{(s)}(p^*, \sigma'^*), \quad (p^*, \sigma'^*) \in D_a,\ \rho(p^*, \sigma'^*) = 1,$$

де $C_{jm} > 0$, $\rho(p,\sigma') = \sqrt{|\sigma'|^2 + |p|^{2/2b}}$. Елементи Q_{jm} є аналітичними функціями по (p,σ') в області D_a, які експоненціально спадають при $x_1 > 0$, якщо $(p,\sigma') \to \infty$.

Нерівність (22) дозволяє здійснити обернене перетворення Фур'є-Бесселя-Лапласа по (p,σ'). Тоді з (21) на основі теореми про перетворення Фур'є-Бесселя-Лапласа згортки отримаємо

$$u_j(t,x) = \sum_{m=0}^{b-1} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{E_{n-1}^+} T_{x_n}^{\xi_n} \mathsf{G}_{jm}(t-\tau, x_1, x''-\xi'', x_n) \times$$

$$\times\, g_m(\tau,\xi') \xi_n^{2\nu+1} d\xi',\ j = \overline{1,N}, \tag{23}$$

де

$$\mathsf{G}_{jm}(t,x) = c'_\nu \int_{E_{n-1}^+} e^{i\sigma'' x''} j_\nu(\sigma_n x_n) \sigma_n^{2\nu+1} d\sigma' \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} Q_{jm}(p, x_1, \sigma') dp,$$

$c'_\nu = (2\pi)^{-n} 2^{-2\nu} \Gamma^{-2}(\nu+1) i^{-1}$, $\mathsf{G}_{jm}(t,x)$, $j = \overline{1,N}$, – елементи m-го стовпчика ядер Пуассона, $m = \overline{0, b-1}$.

Нехай $\mathsf{G}(t,x)$ – матриця, складена з $\mathsf{G}_{jm}(t,x)$, а $T_{x_n}^{\xi_n} \mathsf{G}_m(t,x)$ – m-ий стовпчик матриці $\mathsf{G}(t,x)$. Для похідних $T_{x_n}^{\xi_n} \mathsf{G}_m(t,x)$ справджуються оцінки

$$|D_x^k B_{x_n}^j T_{x_n}^{\xi_n} \mathsf{G}_m(t-\tau, x_1, x''-\xi'', x_n)| \leq C_{kj} (t-\tau)^{-\frac{n_\nu - 1 + 2b - 2m + |k| + 2j}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n} \left\{ e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi'')} \right\},$$

$C_{kj} > 0$. Тоді на основі теореми 2.4 [1, с.381] одержуємо наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай система* $(1')$ *B-параболічна в* $\Pi_{t_0}^+$, *виконується умова Лопатинського в області* D_a, *крайові функції* $g_m \in C_{x',t}^{(2b-2-2m+\alpha, \frac{2b-2-2m+\alpha}{2b})}(\Pi_{t_0}'^+)$, $\Pi_{t_0}'^+ = (t_0, T) \times E_{n-1}^+$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* $(1')$, *(2), (3), який визначається формулою (23).*

Наслідок 1. *Розглянемо випадок $N = 1$. Тоді головний визначник системи (20) є визначником Вандермонда і*

$$\Delta = \prod_{\substack{1 \le j, s \le b \\ j \ne s}} \left((\sigma_1^{(j)})^2 - (\sigma_1^{(s)})^2 \right) =$$

$$= \left((\sigma_1^{(1)})^2 - (\sigma_1^{(2)})^2 \right) \left((\sigma_1^{(1)})^2 - (\sigma_1^{(3)})^2 \right) \dots \left((\sigma_1^{(b-1)})^2 - (\sigma_1^{(b)})^2 \right).$$

Для випадку різних $\sigma_1^{(s)}$-коренів визначник $\Delta \ne 0$ в області D_a, тому умова Я.Б. Лопатинського буде виконуватися.

Наслідок 2. *Із зображення (5) та (23) розв'язку задачі* $(1')$, *(2), (3) випливає зв'язок між елементами l-го стовпчика ядер Пуассона та матрицею Гріна G_0 системи* $(1')$

$$T_{x_n}^{\xi_n} \mathsf{G}_l(t-\tau, x_1, x'' - \xi'', x_n) =$$

$$= \sum_{|k|+2j \le 2b-2-2l} 2A'_{kj} D_{\xi_1}^{2k_1+1} D_{\xi''}^{k''} B_{\xi_n}^j T_{x_n}^{\xi_n} G_0(t-\tau, x_1, x''-\xi'', x_n), \ l = \overline{0, b-1}.$$

2.2. Випадок загальної крайової задачі. У шарі $\Pi_{t_0}^+ = (t_0, T) \times E_n^+$ розглянемо крайову задачу (1) – (3). Розв'язок задачі (1) – (3) відшукуємо у вигляді $u(t,x) = u_{\text{зк}}(t,x) + u_{\text{кз}}(t,x)$, де $u_{\text{зк}}(t,x)$ – розв'язок задачі Коші (1) – (2), а $u_{\text{кз}}(t,x)$ – розв'язок крайової задачі $Lu = 0$, $u|_{t=t_0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0} = 0$, $\frac{\partial^{2l} u}{\partial x_1^{2l}}\Big|_{x_1=0} = g_l(t,x') - \frac{\partial^{2l}}{\partial x_1^{2l}} u_{\text{зк}}\Big|_{x_1=0} \equiv \bar{g}_l(t,x')$, який будемо знаходити за алгоритмом, описаним в [2, с.82-94]. Виділимо із задачі (1) – (3) модельну крайову задачу, а саме: розглянемо однорідну систему N рівнянь, які містять лише групу старших, коефіцієнти в (1) "заморозимо" в точці $\tau \in (t_0, T)$:

$$\tilde{L}(\tau, D) u(t,x) \equiv \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(\tau) D_{x_1}^{2k_1} D_{x''}^{k''} B_{x_n}^j u(t,x) = 0.$$

Далі розглянемо функції типу ядер Пуассона $T_{x_n}^{\xi_n} \mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}(t-\tau, x_1, x''-\xi'', x_n; \tau) \equiv \mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}(t-\tau, x-\xi''; \tau) = J_{x'}^{(\alpha_m)} \mathsf{G}_m(t-\tau, x-\xi''; \tau)$, де $J_{x'}^{(\alpha_m)}$ – оператор дробового інтегрування, що відповідає оператору $\Lambda(D)$ [2, с.69]:

$$\Lambda(D) u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + (-1)^b (\Delta_{x''} + B_{x_n})^b \right) u = 0,$$

$$J_{x'}^{(\alpha_m)}(f)(t,x') = \frac{1}{\Gamma(\alpha_m)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha_m - 1} \int_{E_{n-1}^+} G_0(t-\tau, x', y') f(\tau, y') y_n^{2\nu+1} dy',$$

$\alpha_m \in (0,1)$, $G_0(t-\tau, x', y')$ – фундаментальний розв'язок рівняння $\Lambda(D)u = 0$. Функції типу ядер Пуассона $\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}(t-\tau, x-\xi''; \tau)$ задовольняють нерівність [2, с.85]

$$|D_x^k B_{x_n}^j \mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}(t-\tau, x-\xi''; \tau)| \leq C_{kjm}(t-\tau)^{-\frac{n_\nu - 1 + 2b - r_m - 2b\alpha_m + |k| + 2j}{2b}} \times \\ \times T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi'')}\right\}, \quad (24)$$

$m = \overline{0, b-1}$, $r_m = 2m$.

Візьмемо $\alpha_m = \frac{2b - r_m - \varepsilon}{2b}$ і розглянемо об'ємний потенціал

$$W_m(t,\tau,x,\xi') = \int_\tau^t d\beta \int_{E_n^+} T_{x_n}^{y_n} G(t,\beta,x_1-y_1,x''-y'',y_n) \times \\ \times L(\beta, D)\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}(\beta-\tau, y-\xi''; \tau) y_n^{2\nu+1} dy, \quad (25)$$

$m = \overline{0, b-1}$. Оскільки $\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}$ – функції типу ядер Пуассона задачі із "замороженими" коефіцієнтами, то

$$L(t,D)\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)} = \sum_{|k|+2j=2b} [A_{kj}(\tau) - A_{kj}(t)] D_{x_1}^{2k_1} D_{x''}^{k''} B_{x_n}^j \mathsf{G}_m^{(\alpha_m)} - \\ - \sum_{|k|+2j<2b} A_{kj}(t) D_{x_1}^{2k_1} D_{x''}^{k''} B_{x_n}^j \mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}.$$

Використовуючи умову Гельдера коефіцієнтів A_{kj}, $|k| + 2j = 2b$, та оцінки похідних функцій типу ядер Пуассона (24), дістанемо оцінку щільності об'ємного потенціала (25)

$$|L(t,D)\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}(t-\tau, x-\xi''; \tau)| \leq C(t-\tau)^{-\frac{n_\nu - 1 + 2b - \alpha + \varepsilon}{2b}} T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi'')}\right\}, \quad (26)$$

$0 < \varepsilon < \alpha$. На основі леми 3.1 [2, с.36] визначається порядок особливості W_m, який на α менший від порядку особливості $\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}$. В результаті застосування оператора $L(t, D_x)$ до $W_m(t,\tau,x,\xi')$ одержимо щільність $L(t,D_x)G_m^{(\alpha_m)}$. Розв'язок крайової задачі відшукуємо у вигляді поверхневого потенціалу

$$u_{\text{кз}}(t,x) = \sum_{m=0}^{b-1} \int_{t_0}^t d\tau \int_{E_{n-1}^+} \mathcal{E}_m^{(\alpha_m)}(t,\tau,x,\xi')\mu_m(\tau,\xi')\xi_n^{2\nu+1} d\xi',$$

де $\mathcal{E}_m^{(\alpha_m)} = \mathsf{G}_m^{(\alpha_m)} - W_m$, $\mu_m(t,x')$ – шукані функції, які неперервні при $t > t_0$ і сумовні на $[t_0, T]$. Так побудована функція $u_{\text{кз}}(t,x)$ є розв'язком однорідної системи і виконується нульова початкова умова [2, с.87]. Для визначення $\mu_m(t,x')$

задовольнимо крайові умови. В результаті дістанемо систему інтегральних рівнянь Вольтера-Фредгольма першого роду

$$J_{x'}^{\alpha_l}\mu_l(t,x')+\sum_{m=0}^{b-1}\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{E_{n-1}^{+}}E_{lm}(t,\tau,x',\xi')\mu_m(\tau,\xi')\xi_n^{2\nu+1}d\xi'=\bar g_l(t,x'),\qquad(27)$$

де

$$E_{lm}(t,\tau,x',\xi')=\frac{\partial^{2l}}{\partial x_1^{2l}}\Big[\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}(t-\tau,x-\xi'';\tau)-$$

$$-\mathsf{G}_m^{(\alpha_m)}(t-\tau,x-\xi'';t)\Big]\bigg|_{x_1=0}-\frac{\partial^{2l}}{\partial x_1^{2l}}W_m(t,\tau,x,\xi')\bigg|_{x_1=0}.$$

На основі теореми 6.4 [2, с.79] в результаті дії оператора дробового диференціювання $D_{x'}^{(\alpha_l)}$ на обидві частини (27) отримаємо систему рівнянь другого роду

$$\mu_l(t,x')=D_{x'}^{(\alpha_l)}\bar g_l(t,x')-\sum_{m=0}^{b-1}\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{E_{n-1}^{+}}D_{x'}^{(\alpha_l)}E_{lm}(t,\tau,x',\xi')\mu_m(\tau,\xi')\xi_n^{2\nu+1}d\xi'.\qquad(28)$$

Позначимо $K_{lm}(t,\tau,x',\xi')\equiv -D_{x'}^{(\alpha_l)}E_{lm}(t,\tau,x',\xi')$. Розв'язок (28) шукаємо методом послідовних наближень. На основі оцінок ядер K_{lm}

$$|K_{lm}(t,\tau,x',\xi')|\le C(t-\tau)^{-\frac{n_\nu-1+2b-\alpha}{2b}}T_{x_n}^{\xi_n}\left\{e^{-c\rho(t,\tau,x',\xi'')}\right\}$$

встановлюється існування резольвенти

$$R_{lm}(t,\tau,x',\xi')=K_{lm}(t,\tau,x',\xi')+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{b-1}\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{E_{n-1}^{+}}K_{ls}(t,\beta,x',y')K_{sm}^{(j)}(\beta,\tau,y',\xi')y_n^{2\nu+1}dy',$$

$m=\overline{0,b-1}$, $K_{lm}^{(1)}\equiv K_{lm}$. Розв'язок системи (28) визначається формулою

$$\mu_m(t,x')=D_{x'}^{(\alpha_m)}\bar g_m(t,x')-\sum_{s=0}^{b-1}\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{E_{n-1}^{+}}R_{ms}(t,\tau,x',\xi')D_{\xi'}^{(\alpha_m)}\bar g_s(\tau,\xi')\xi_n^{2\nu+1}d\xi'.$$

Підставляючи знайдені функції $\mu_m(t,x')$ у формулу для знаходження $u_{\text{кз}}(t,x)$ і проводячи заміну порядку інтегрування, отримаємо, що

$$u_{\text{кз}}(t,x)=\sum_{m=0}^{b-1}\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int\limits_{E_{n-1}^{+}}\tilde E_m(t,\tau,x,\xi')D_{\xi'}^{(\alpha_m)}\bar g_m(\tau,\xi')\xi_n^{2\nu+1}d\xi',$$

де

$$\tilde{E}_m(t,\tau,x,\xi') = \mathcal{E}_m^{(\alpha_m)}(t,\tau,x,\xi')+$$

$$+\sum_{m=0}^{b-1}\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{E_{n-1}^{+}} \mathcal{E}_s^{(\alpha_m)}(t,\beta,x,y')R_{ms}(\beta,\tau,y',\xi')y_n^{2\nu+1}dy', \quad m=\overline{0,b-1}.$$

Сформулюємо теорему про коректність крайової задачі.

Теорема 3. *Припустимо, що для задачі (1) – (3) виконуються умови:*

1) *система (1) B-параболічна в $\Pi_{t_0}^{+}$;*

2) *виконується умова Лопатинського для відповідної модельної задачі із "замороженими" коефіцієнтами у групі старших системи (1);*

3) *коефіцієнти $A_{kj}(t)$ гельдерові по t при $|k|+2j=2b$, крайові функції $g_l \in C_{x',t}^{\left(2b-2-2l+\alpha,\frac{2b-2-2l+\alpha}{2b}\right)}(\Pi_{t_0}^{\prime +})$, початкова функція $\varphi \in C^{(2b+\alpha)}(E_n^{+})$, функція $f \in C^{(\alpha)}(\Pi_{t_0}^{+})$;*

4) *виконується умова узгодження між початковою і крайовими функціями:*

$$\left.\frac{\partial^{2l}}{\partial x_1^{2l}}\varphi(x)\right|_{x_1=0} = g_l(t_0,x'), \quad l=\overline{0,b-1}.$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі, який належить класу $C_{x,t}^{(2b+\alpha,1)}(\Pi_{t_0}^{+})$ і справджується нерівність:

$$|u|_{2b+\alpha} \le C\left(|\varphi|_{2b+\alpha}+|f|_{\alpha}+\sum_{l=0}^{b-1}|g_l|_{2b-2-2l+\alpha}\right).$$

Зауваження. *Для того, щоб записати умову 2) теореми 3, потрібно в системі (1) у групі старших "заморозити" коефіцієнти в точці τ і провести аналогічні міркування, як і у випадку модельної крайової задачі. Ця умова буде такою ж, як і в пункті 2.1., тобто для кожного τ головний визначник системи (20) повинен бути відмінним від нуля.*

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 442 с.
2. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. *Ивасишен С.Д.* Матрица Грина параболических задач. – К.: Вища школа, 1990. – 199 с.
4. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических дифференциальных уравнений общего вида // Труды МИАН СССР, 83, 1965. – 163 с.
5. *Михайлов В.П.* О смешаной задаче для параболической системы на плоскости // ДАН СССР, 126, №6, 1959, – С.1199-1202.

6. *Эйдельман С.Д.* О некоторых свойствах решений параболических систем // Укр. матем. журн., т.8, №2, 1956. – С.191-207.
7. *Конаровська М.І.* Теореми Ліувілля для сингулярних параболічних систем // Науковий вісник ЧНУ: Збірник наук. праць. Вип.485. Математика. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2009. – С.28-34.
8. *Масікевич М.І., Матійчук М.І.* Оцінка матриці Гріна в чверті простору B-параболічної системи з імпульсною дією // Науковий вісник ЧНУ: Збірник наук. праць. Вип.374. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С.88-95.

Чернівецький національний університет
імені Ю.Федьковича,
вул. Коцюбинського 2, 58012 Чернівці
mmi_marina@mail.ru

Отримано 29.12.10