 М.І. Іванчов, Г.А. Снітко

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЧАСУ КОЕФІЦІЄНТІВ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови локального існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для одновимірного параболічного рівняння з невідомими залежними від часу старшим та молодшими коефіцієнтами в області з невідомою ділянкою межі.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння, вільна межа, функція Гріна
MSC (2000): 35R30

В області з невідомою ділянкою межі досліджується обернена задача одночасного визначення залежних від часу старшого та молодших коефіцієнтів одновимірного параболічного рівняння. Ця задача поєднує два типи задач – коефіцієнтні обернені задачі та задачі з вільною межею. Коефіцієнтні обернені задачі, в яких до невідомих належить один або декілька коефіцієнтів рівняння, в областях з відомими межами достатньо повно вивчені. Зокрема, дослідженню задач для одновимірних параболічних рівнянь з невідомими залежними від часу старшим та молодшими коефіцієнтами в областях з відомими межами присвячено роботи [1]–[5]. Задачі з вільною межею, типовим представником яких є задача Стефана, можна трактувати як обернені задачі, бо заміною змінних задачі з вільною межею зводяться до коефіцієнтних обернених задач в областях з фіксованими межами. Це дозволяє об'єднати два типи задач – коефіцієнтні обернені задачі та задачі з вільною межею – в один. Зауважимо, що в [6], [7] знайдено умови однозначної розв'язності обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь з невідомим залежним від часу старшим коефіцієнтом в області, частина або вся межа якої є невідомою. На сучасному етапі розвитку теорії обернених задач привернули до себе увагу обернені задачі для рівнянь з виродженням. Випадок параболічних рівнянь зі степеневим виродженням в областях з вільними межами розглянуто в [8], [9].

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ – невідома функція, розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнтів $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ параболічного рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(t)u_x + c(t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad \int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t),$$

$$\int\limits_0^{h(t)} xu(x,t)dx = \mu_5(t), \quad \int\limits_0^{h(t)} x^2u(x,t)dx = \mu_6(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Заміною змінних $y = \dfrac{x}{h(t)}$, $t = t$ задачу (1)–(4) зводимо до оберненої задачі з невідомими $(h(t), a(t), b(t), c(t), v(y,t))$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області з відомою межею $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}\, v_{yy} + \frac{b(t) + y\, h'(t)}{h(t)} v_y + c(t)\, v + f(yh(t),t),\ (y,t) \in Q_T, \tag{5}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \quad y \in [0,1], \tag{6}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \quad v(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$a(t)v_y(0,t) = h(t)\mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$h(t) \int\limits_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$h^2(t) \int\limits_0^1 y\, v(y,t)dy = \mu_5(t), \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

$$h^3(t) \int\limits_0^1 y^2 v(y,t)dy = \mu_6(t), \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $f \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T])$, $\varphi \in C^2[0,h_0]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,4,5,6$, $\mu_3 \in C[0,T]$;

2) $f(x,t) \geq 0,\ (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T],\ \varphi(x) \geq \varphi_0 > 0,\ x \in [0,\infty),$ $\varphi'(x) > 0,\ \varphi''(x) > 0,\ x \in [0,h_0],\ \mu_i(t) > 0,\ i = \overline{1,6},\ t \in [0,T],$

де $h(0) = h_0 > 0$ *є розв'язком рівняння* $\int\limits_0^{h(0)} \varphi(x)dx = \mu_4(0);$

3) умови узгодження нульового та першого порядків.

Тоді можна вказати таке число $T_0, 0 < T_0 \leq T$, *яке визначається вихідними даними, що існує єдиний розв'язок* $(h,a,b,c,v) \in C^1[0,T_0] \times (C[0,T_0])^3 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0}),\ a(t) > 0,\ h(t) > 0,\ t \in [0,T_0]$, *задачі (5)–(11).*

Доведення. Визначимо значення функції, що задає невідому ділянку межі, в початковий момент часу. Згідно з умовами теореми існує єдиний розв'язок $h(0) = h_0 > 0$ рівняння

$$\int\limits_0^{h(0)} \varphi(x)dx = \mu_4(0).$$

Зведемо задачу (5)–(11) до еквівалентної системи рівнянь. Позначимо $w(y,t) = v_y(y,t),\ p(t) = h'(t)$. Припустимо тимчасово, що функції $h(t) > 0,\ a(t) > 0,\ t \in [0,T],\ b(t),\ c(t)$ відомі. Пряма задача (5)–(7) еквівалентна наступній системі рівнянь:

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{b(\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)+$$
$$+c(\tau)v(\eta,\tau)\bigg)d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{12}$$

$$w(y,t) = w_0(y,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{b(\tau)+\eta p(\tau)}{h(\tau)}w(\eta,\tau)+$$
$$+c(\tau)v(\eta,\tau)\bigg)d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{13}$$

де $G_k(y,t,\eta,\tau),\ k = 1,2,$ – функції Гріна першої ($k = 1$) та другої ($k = 2$) крайових задач для рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy} + f(yh(t),t). \tag{14}$$

Вони визначаються формулою

$$G_k(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bigg(\exp\bigg(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\bigg)+$$

$$+(-1)^k \exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\Bigg), \quad k=1,2,$$

де $\theta(t)=\int\limits_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}d\tau$. Через $v_0(y,t)$ позначено розв'язок рівняння (14) з умовами (6), (7), який має наступний вигляд

$$v_0(y,t)=\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_0)d\eta+\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\,\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_2(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)f(\eta h(\tau),\tau)d\eta d\tau.$$

Продиференціювавши $v_0(y,t)$ за змінною y, використавши властивості функції Гріна $G_{1y}(y,t,\eta,\tau)=-G_{2\eta}(y,t,\eta,\tau)$, $G_{2\tau}=-\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}G_{2\eta\eta}$ та інтегрування частинами, одержуємо

$$w_0(y,t)=h_0\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0)d\eta-\int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)f(\eta h(\tau),\tau)d\eta d\tau.$$

Встановимо оцінки функцій $v(y,t)$, $w(y,t)$ знизу. Використовуючи принцип максимуму [10] для розв'язку задачі (14), (6), (7), одержуємо

$$v_0(y,t)\ge M_0>0, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T,$$

де стала M_0 визначається вихідними даними задачі. З (12) можемо зробити висновок про існування такого числа t_1, $0<t_1\le T$, що

$$v(y,t)\ge\frac{M_0}{2}\equiv M_1>0, \quad (y,t)\in\overline{Q}_{t_1}. \tag{15}$$

З умов 2) теореми випливає оцінка

$$h_0\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0)d\eta\ge h_0\min_{[0,1]}\varphi'(yh_0)>0, \quad (y,t)\in\overline{Q}_T.$$

Тоді з (13) можемо вважати, що існує таке число t_2, $0 < t_2 \le T$, що

$$w(y,t) \ge \frac{h_0}{2} \min_{[0,1]} \varphi'(yh_0) \equiv M_2 > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_2}. \tag{16}$$

Виконання нерівностей (15), (16) надає можливість записати (8), (9) у вигляді

$$a(t) = \frac{h(t)\mu_3(t)}{w(0,t)}, \quad t \in [0, t_2], \tag{17}$$

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}, \quad t \in [0, t_1]. \tag{18}$$

Продиференціювавши умови (9)–(11) за змінною t і використавши рівняння (5), одержуємо

$$\begin{aligned} b(t) = \Big[& a(t)\big(w(0,t)(h(t)\mu_5(t) - \mu_6(t)) + \mu_2(t)\mu_6(t) - \mu_1(t)\mu_6(t) + 2\mu_4(t)\mu_5(t) - \\ & - 2h(t)\mu_2(t)\mu_5(t) - 2h(t)\mu_4^2(t) + h^2(t)\mu_1(t)\mu_4(t) + h^2(t)\mu_2(t)\mu_4(t)\big) - \\ & - h^2(t)\int\limits_0^1 \big(h(t)y^2(h(t)\mu_4(t) - \mu_5(t)) + y(\mu_6(t) - h^2(t)\mu_4(t)) + h(t)\mu_5(t) - \\ & - \mu_6(t)\big) f(yh(t),t)dy + \mu_4'(t)h(t)(h(t)\mu_5(t) - \mu_6(t)) + \mu_5'(t)(\mu_6(t) - \\ & - h^2(t)\mu_4(t)) + \mu_6'(t)(h(t)\mu_4(t) - \mu_5(t))\Big] \big(2\mu_5^2(t) - \mu_4(t)\mu_6(t) + \\ & + h^2(t)\mu_4^2(t) + h(t)\mu_1(t)\mu_6(t) - 2h(t)\mu_4(t)\mu_5(t) - h^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t)\big)^{-1}, \\ & \qquad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} c(t) = \Big[& a(t)\big(w(0,t)(h(t)\mu_4(t) - 2\mu_5(t)) + 2\mu_2(t)\mu_5(t) - 2\mu_1(t)\mu_5(t) + 2\mu_4^2(t) - \\ & - 2h(t)\mu_2(t)\mu_4(t) - 2h(t)\mu_1(t)\mu_4(t) + h^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t) + h^2(t)\mu_1^2(t)\big) + \\ & + h^2(t)\int\limits_0^1 \big(2\mu_5(t) - h(t)\mu_4(t) + h(t)y^2(\mu_4(t) - h(t)\mu_1(t)) + y(h^2(t)\mu_1(t) - \\ & - 2\mu_5(t))\big) f(yh(t),t)dy + \mu_4'(t)h(t)(h(t)\mu_4(t) - 2\mu_5(t)) + \mu_5'(t)(2\mu_5(t) - \\ & - h^2(t)\mu_1(t)) + \mu_6'(t)(h(t)\mu_1(t) - \mu_4(t))\Big] \big(2\mu_5^2(t) - \mu_4(t)\mu_6(t) + \\ & + h(t)\mu_1(t)\mu_6(t) - 2h(t)\mu_4(t)\mu_5(t) + h^2(t)\mu_4^2(t) - h^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t)\big)^{-1}, \\ & \qquad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{20}$$

$$p(t)=\Big[a(t)\Big(\frac{w(0,t)}{h(t)}(h(t)\mu_2(t)\mu_6(t)-h^2(t)\mu_2(t)\mu_5(t)+2\mu_5^2(t)-\mu_4(t)\mu_6(t))+$$
$$+\frac{w(1,t)}{h(t)}(-2\mu_5^2(t)+\mu_4(t)\mu_6(t)-h(t)\mu_1(t)\mu_6(t)+2h(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-$$
$$-h^2(t)\mu_4^2(t)+h^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t))+2\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_6(t)+2h(t)\mu_2^2(t)\mu_5(t)-$$
$$-h^2(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_4(t)-h^2(t)\mu_2^2(t)\mu_4(t)-\mu_2^2(t)\mu_6(t)+4h(t)\mu_2(t)\mu_4^2(t)-$$
$$-4\mu_2(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-\mu_1^2(t)\mu_6(t)-2h(t)\mu_1(t)\mu_2(t)\mu_5(t)+4\mu_1(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-$$
$$-2\mu_4^3(t)\Big)+h(t)\int_0^1\big(h^2(t)\mu_2(t)\mu_5(t)-h(t)\mu_2(t)\mu_6(t)-2\mu_5^2(t)+$$
$$+\mu_4(t)\mu_6(t)+h^2(t)y^2(h(t)\mu_2(t)\mu_4(t)+\mu_1(t)\mu_5(t)-\mu_2(t)\mu_5(t)-\mu_4^2(t))+$$
$$+h(t)y(\mu_2(t)\mu_6(t)-\mu_1(t)\mu_6(t)-h^2(t)\mu_2(t)\mu_4(t)+2\mu_4(t)\mu_5(t))\big)\times$$
$$\times f(yh(t),t)dy+\mu_4'(t)(h(t)\mu_2(t)\mu_6(t)-h^2(t)\mu_2(t)\mu_5(t)+2\mu_5^2(t)-$$
$$-\mu_4(t)\mu_6(t))+\mu_5'(t)(h^2(t)\mu_2(t)\mu_4(t)-\mu_2(t)\mu_6(t)+\mu_1(t)\mu_6(t)-$$
$$-2\mu_4(t)\mu_5(t))+\mu_6'(t)(\mu_2(t)\mu_5(t)-h(t)\mu_2(t)\mu_4(t)-\mu_1(t)\mu_5(t)+\mu_4^2(t))\Big]\times$$
$$\times\big((2\mu_5^2(t)-\mu_4(t)\mu_6(t)+h(t)\mu_1(t)\mu_6(t)+h^2(t)\mu_4^2(t)-2h(t)\mu_4(t)\mu_5(t)-$$
$$-h^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t))\mu_2(t)\big)^{-1},\quad t\in[0,T]. \tag{21}$$

Зведемо знаменник в (19)–(21) до вигляду

$$2\mu_5^2(t)-\mu_4(t)\mu_6(t)+h(t)\mu_1(t)\mu_6(t)-2h(t)\mu_4(t)\mu_5(t)+h^2(t)\mu_4^2(t)-h^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t)=$$

$$=2\mu_5(t)(\mu_5(t)-h(t)\mu_4(t))+\mu_4(t)(h^2(t)\mu_4(t)-\mu_6(t))+h(t)\mu_1(t)(\mu_6(t)-h(t)\mu_5(t))=$$

$$=h^4(t)\Big(2\int_0^1 yv(y,t)dy\int_0^1(y-1)v(y,t)dy+\int_0^1 v(y,t)dy\int_0^1(1-y^2)v(y,t)dy+$$

$$+v(0,t)\int_0^1 y(y-1)v(y,t)dy\Big)=h^4(t)\Big(\int_0^1(1-y)w(y,t)dy\int_0^1 y(1-y)v(y,t)dy+$$

$$+\int_0^1(1-y)v(y,t)dy\int_0^1(1-2y)v(y,t)dy\Big).$$

Подамо вираз $\int\limits_0^1 (1-2y)v(y,t)dy$ у вигляді

$$\int\limits_0^1 (1-2y)v(y,t)dy = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1-2y)(v(y,t)-v(1-y,t))dy =$$

$$= -\int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1-2y)dy \int\limits_y^{1-y} v_z(z,t)dz.$$

Змінивши порядок інтегрування в отриманому виразі, одержуємо

$$\int\limits_0^1 (1-2y)v(y,t)dy = -\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-z\right)^2 v_z(z,t)dz + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2}-z\right)^2 v_z(z,t)dz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-z\right)^2 (v_z(1-z,t)-v_z(z,t))dz = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-z\right)^2 dz \int\limits_z^{1-z} v_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi.$$

Отже,

$$2\mu_5^2(t) - \mu_4(t)\mu_6(t) + h(t)\mu_1(t)\mu_6(t) - 2h(t)\mu_4(t)\mu_5(t) + h^2(t)\mu_4^2(t) -$$

$$-h^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t) = h^4(t)\Bigg(\int\limits_0^1 (1-y)w(y,t)dy \int\limits_0^1 y(1-y)v(y,t)dy +$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^1 (1-y)v(y,t)dy \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1-2y)^2 dy \int\limits_y^{1-y} v_{zz}(z,t)dz\Bigg).$$

Враховуючи (15), (16), отримуємо

$$\int\limits_0^1 y(1-y)v(y,t)dy > 0, \quad \int\limits_0^1 (1-y)v(y,t)dy > 0, \quad t \in [0,t_1],$$

$$\int\limits_0^1 (1-y)w(y,t)dy > 0, \quad t \in [0,t_2].$$

Для оцінки $v_{yy}(y,t)$ знизу введемо функцію

$$\widetilde{v}(y,t) = v(y,t) - \varphi(yh_0) - y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (y-1)(\mu_1(t) - \mu_1(0)).$$

Для функції $\widetilde{v}(y,t)$ одержуємо задачу

$$\widetilde{v}_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}\widetilde{v}_{yy} + \frac{b(t)+yh'(t)}{h(t)}(\widetilde{v}_y + d(y,t)) + c(t)(\widetilde{v} + z(y,t)) + F(y,t), \quad (y,t) \in Q_T,$$

$$\widetilde{v}(y,0) = 0, \quad y \in [0,1],$$

$$\widetilde{v}(0,t) = \widetilde{v}(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{22}$$

де $d(y,t) = h_0\varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0)$,
$z(y,t) = \varphi(yh_0) + y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) - (y-1)(\mu_1(t) + \mu_1(0))$,
$F(y,t) = h_0^2\varphi''(yh_0)\dfrac{a(t)}{h^2(t)} + f(yh(t),t) - y\mu_2'(t) + \mu_1'(t)(y-1)$.

За допомогою функції Гріна $G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння (14) задачу (22) зводимо до рівняння

$$\widetilde{v}(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Big(\frac{b(\tau)+\eta h'(\tau)}{h(\tau)}(\widetilde{v}_\eta(\eta,\tau) + d(\eta,\tau)) + \\ + c(\tau)(\widetilde{v}(\eta,\tau) + z(\eta,\tau)) + F(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau.$$

Продиференціювавши останню рівність двічі за змінною y, одержуємо

$$v_{yy}(y,t) = h_0^2\varphi''(yh_0) + \int_0^t d\tau \int_0^1 G_{1yy}(y,t,\eta,\tau)\Big(\frac{b(\tau)+\eta h'(\tau)}{h(\tau)}v_\eta(\eta,\tau) + \\ + c(\tau)v(\eta,\tau) + F(\eta,\tau)\Big)d\eta.$$

Звідси можемо зробити висновок про існування такого числа t_3, $0 < t_3 \le T$, що

$$v_{yy}(y,t) \ge \frac{h_0^2}{2}\min_{[0,1]}\varphi''(yh_0) > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{t_3}.$$

Таким чином,

$$2\mu_5^2(t) - \mu_4(t)\mu_6(t) + h(t)\mu_1(t)\mu_6(t) - 2h(t)\mu_4(t)\mu_5(t) + h^2(t)\mu_4^2(t) - \\ - h^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t) \ge C_0h^4(t), \quad t \in [0,t_4],\ t_4 = \min\{t_1,t_2,t_3\}, \tag{23}$$

де C_0 визначається вихідними даними задачі.

Таким чином, якщо $(h, a, b, c, v) \in C^1[0,T] \times (C[0,T])^3 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(11), то (v, w, a, h, b, c, p) є неперервним розв'язком системи рівнянь (12), (13), (17)–(21). Покажемо, що правильним є обернене твердження.

Нехай (v, w, a, h, b, c, p) є неперервним розв'язком системи рівнянь (12), (13), (17)–(21). Продиференціюємо (12) за змінною y. Праві частини отриманої рівності та рівності (13) співпадають, тому можемо зробити висновок, що $w(y,t) = v_y(y,t)$. Отже, функція $v \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(t) + yp(t)}{h(t)} v_y + c(t)\, v + f(yh(t), t), \quad (y,t) \in Q_T, \tag{24}$$

та умови (6), (7) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $a(t), b(t), c(t), h(t)$, $p(t)$. З рівностей (17), (18) випливають умови (8), (9). Подамо (19)–(21) у вигляді

$$p(t)\mu_2(t) + b(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + c(t)\mu_4(t) = \frac{a(t)}{h(t)}(w(0,t) - w(1,t)) + \mu_4'(t) - \\ - h(t)\int_0^1 f(yh(t), t)dy, \tag{25}$$

$$p(t)h(t)\mu_2(t) + b(t)(h(t)\mu_2(t) - \mu_4(t)) + c(t)\mu_5(t) = a(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t) - w(1,t)) - \\ - h^2(t)\int_0^1 yf(yh(t), t)dy + \mu_5'(t), \tag{26}$$

$$p(t)h^2(t)\mu_2(t) + b(t)(h^2(t)\mu_2(t) - 2\mu_5(t)) + c(t)\mu_6(t) = a(t)(2h(t)\mu_2(t) - 2\mu_4(t) - \\ - h(t)w(1,t)) - h^3(t)\int_0^1 y^2 f(yh(t), t)dy + \mu_6'(t). \tag{27}$$

Продиференціюємо (18) за змінною t, використовуючи те, що $v(y,t)$ є розв'язком рівняння (24). Віднявши від отриманої рівності рівність (25), одержуємо

$$(h'(t) - p(t))\frac{\mu_4(t)}{h(t)} = 0.$$

Звідси робимо висновок, що $p(t) = h'(t)$ і, отже, $v(y,t)$ задовольняє рівняння (5).

Залишилося довести виконання умов (10), (11). Подамо (26), (27) у вигляді

$$2h(t)h'(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy + h^2(t)\int\limits_0^1 y\bigg(\frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy}(y,t) + \frac{b(t)+yp(t)}{h(t)}v_y(y,t)+$$
$$+c(t)v(y,t) + f(yh(t),t)\bigg)dy = \mu_5'(t), \quad (28)$$

$$3h^2(t)h'(t)\int\limits_0^1 y^2v(y,t)dy + h^3(t)\int\limits_0^1 y^2\bigg(\frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy}(y,t) + \frac{b(t)+yp(t)}{h(t)}v_y(y,t)+$$
$$+c(t)v(y,t) + f(yh(t),t)\bigg)dy = \mu_6'(t). \quad (29)$$

Використавши рівняння (5) та проінтегрувавши (28), (29) від 0 до t, отримуємо умови (10), (11).

Отже, еквівалентність задачі (5)–(11) і системи рівнянь (12), (13), (17)–(21) доведено.

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (12), (13), (17)–(21) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього встановимо апріорні оцінки розв'язків системи.

Враховуючи нерівності (15), (16), для розв'язків рівнянь (18), (17) справджуються оцінки

$$h(t) \le \frac{1}{M_1}\max_{[0,T]}\mu_4(t) \equiv H_1 < \infty, \qquad t\in[0,t_1], \quad (30)$$

$$a(t) \le \frac{H_1}{M_2}\max_{[0,T]}\mu_3(t) \equiv A_1 < \infty, \qquad t\in[0,t_5], \quad t_5=\min\{t_1,t_2\}. \quad (31)$$

Позначимо $V(t) = \max\limits_{y\in[0,1]}|v(y,t)|$, $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]}|w(y,t)|$. Використавши вище встановлені оцінки, з (19)–(21) отримуємо

$$|b(t)| \le \frac{C_1}{h^4(t)}, \quad |c(t)| \le \frac{C_2}{h^4(t)}, \quad |p(t)| \le \frac{1}{h^4(t)}\bigg(C_3 + C_4\frac{W(t)}{h(t)}\bigg), \quad t\in[0,t_4]. \quad (32)$$

З (18), (17) одержуємо

$$h(t) \ge \frac{1}{V(t)}\min_{[0,T]}\mu_4(t), \quad t\in[0,T], \quad (33)$$

$$a(t) \ge \frac{C_5}{V(t)W(t)}, \quad t\in[0,T]. \quad (34)$$

Оскільки для функції $v(y,t)$ виконується рівність

$$v(y,t)=\mu_1(t)+\int\limits_0^y w(\xi,t)d\xi,$$

то звідси маємо

$$V(t)\leq C_6+C_7W(t),\quad t\in[0,T]. \tag{35}$$

Для оцінки $w(y,t)$ використаємо оцінки функції Гріна

$$|G_2(y,t,\eta,\tau)|\leq C_8\left(1+\frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right),\quad \int\limits_0^1|G_{1\eta}(y,t,\eta,\tau)|d\eta\leq\frac{C_9}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

З (13) отримуємо нерівність

$$W(t)\leq C_{10}+C_{11}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}+C_{12}\int\limits_0^t\left(\frac{|b(\tau)|+|p(\tau)|}{h(\tau)}W(\tau)+|c(\tau)|V(\tau)\right)\times$$
$$\times\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},\quad t\in[0,T]. \tag{36}$$

Підставивши одержані оцінки (30)–(35) у (36) і ввівши позначення $W_1(t)=W(t)+1$, приходимо до нерівності

$$W_1(t)\leq C_{13}+C_{14}\int\limits_0^t\frac{a(\tau)W_1^4(\tau)d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},\quad t\in[0,t_4]. \tag{37}$$

Піднесемо обидві частини нерівності до четвертого степеня, застосовуючи при цьому нерівність Гельдера:

$$W_1^4(t)\leq C_{15}+C_{16}\int\limits_0^t\frac{a(\tau)W_1^{16}(\tau)d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Замінивши t на σ, домножимо попередню нерівність на $\dfrac{a(\sigma)}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$ та проінтегруємо від 0 до t:

$$\int\limits_0^t\frac{a(\sigma)W_1^4(\sigma)d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}\leq C_{17}+C_{16}\int\limits_0^t\frac{a(\sigma)d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}\int\limits_0^\sigma\frac{a(\tau)W_1^{16}(\tau)d\tau}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}.$$

Змінивши порядок інтегрування у другому доданку правої частини нерівності та використавши рівність

$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi,$$

одержуємо

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)W_1^4(\sigma)d\sigma}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \le C_{17} + C_{18}\int_0^t \frac{a(\tau)W_1^{16}(\tau)d\tau}{h^2(\tau)}. \tag{38}$$

Беручи до уваги (38), надамо нерівності (37) вигляду

$$W_1(t) \le C_{19} + C_{20}\int_0^t \frac{a(\tau)W_1^{16}(\tau)d\tau}{h^2(\tau)}.$$

Використавши (31), (33), (35) і позначивши $W_2(t) = W_1(t)+1$, попередню нерівність подамо у вигляді

$$W_2(t) \le C_{21} + C_{22}\int_0^t W_2^{18}(\tau)d\tau.$$

Метод розв'язування останньої нерівності подано в [11]. Звідси отримуємо оцінку

$$W(t) \le M_3, \quad t \in [0, T_0],$$

де $0 < T_0 \le t_4$, визначається сталими C_{21}, C_{22}. Тоді

$$|v(y,t)| \le C_6 + C_7M_3 \equiv M_4, \quad h(t) \ge \frac{1}{M_4}\min_{[0,T]}\mu_4(t) \equiv H_0 > 0,$$
$$a(t) \ge \frac{C_5}{M_3M_4} \equiv A_0 > 0, \quad |b(t)| \le \frac{C_1}{H_0^4} \equiv B_1, \quad |c(t)| \le \frac{C_2}{H_0^4} \equiv B_2,$$
$$|p(t)| \le \frac{1}{H_0^4}\left(C_3 + C_4\frac{M_3}{H_0}\right) \equiv B_3, \quad (y,t) \in \overline{Q}_{T_0}.$$

Подамо систему (12), (13), (17)–(21) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v(y,t), w(y,t), a(t), h(t), b(t), c(t), p(t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (12), (13), (17)–(21). За допомогою встановлених апріорних оцінок розв'язків системи рівнянь (12), (13), (17)–(21), аналогічно як в [12], побудуємо множину $N \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0,T_0])^5$ таку, що оператор P переводить її в себе. Те, що оператор P цілком неперервний на N, доводиться як в [11]. Отже, за теоремою Шаудера існує розв'язок системи рівнянь (12), (13), (17)–(21) і, відповідно, розв'язок задачі (5)–(11) при $y \in [0,1],\ t \in [0,T_0]$.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (5)–(11). Припустимо, що $(h_i(t), a_i(t), b_i(t), c_i(t), v_i(y,t)),\ i = 1,2,$ – два розв'язки задачі (5)–(11). Позначимо

$$\frac{a_i(t)}{h_i^2(t)} = s_i(t), \quad \frac{b_i(t)}{h_i(t)} = q_i(t), \quad \frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = r_i(t), \quad i = 1,2,$$
$$s(t) = s_1(t) - s_2(t), \quad q(t) = q_1(t) - q_2(t), \qquad r(t) = r_1(t) - r_2(t),$$
$$c(t) = c_1(t) - c_2(t) \quad v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t).$$

Функції $s(t), q(t), r(t), c(t), v(y,t)$ задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} v_t =& s_1(t)v_{yy} + (q_1(t) + yr_1(t))v_y + c_1(t)v + s(t)v_{2yy} + (q(t) + yr(t))v_{2y} + c(t)v_2 + \\ &+ f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t), \quad (y,t) \in Q_T, \end{aligned} \tag{39}$$

та умови

$$v(y,0) = 0, \quad y \in [0,1], \qquad v(0,t) = v(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{40}$$

$$s(t)v_{2y}(0,t) + s_1(t)v_y(0,t) = \mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \quad t \in [0,T], \tag{41}$$

$$\int_0^1 v(y,t)dy = \mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \quad t \in [0,T], \tag{42}$$

$$\int_0^1 yv(y,t)dy = \mu_5(t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right), \quad t \in [0,T], \tag{43}$$

$$\int_0^1 y^2v(y,t)dy = \mu_6(t)\left(\frac{1}{h_1^3(t)} - \frac{1}{h_2^3(t)}\right), \quad t \in [0,T]. \tag{44}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = s_1(t)v_{yy} + (q_1(t) + yr_1(t))v_y + c_1(t)v$$

з урахуванням умов (40) функцію $v(y,t)$ подамо у вигляді

$$\begin{aligned} v(y,t) = \int_0^t \int_0^1 & G_1^*(y,t,\eta,\tau)(s(\tau)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau) + (q(\tau) + \eta r(\tau))v_{2\eta}(\eta,\tau) + c(\tau)v_2(\eta,\tau) + \\ &+ f(\eta h_1(\tau),\tau) - f(\eta h_2(\tau),\tau))d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T. \end{aligned} \tag{45}$$

Продиференціюємо (45) за змінною y

$$v_y(y,t) = \int_0^t \int_0^1 G^*_{1y}(y,t,\eta,\tau)(s(\tau)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau) + (q(\tau) + \eta r(\tau))v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$

$$+ c(\tau)v_2(\eta,\tau) + f(\eta h_1(\tau),\tau) - f(\eta h_2(\tau),\tau))d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{46}$$

Враховуючи те, що для $v_{2y}(y,t)$ справджується умова (8), маємо $v_{2y}(0,t) > 0$, $t \in [0,T]$. Тоді з умови (41) знаходимо

$$s(t) = -s_1(t)\frac{v_y(0,t)}{v_{2y}(0,t)} + \frac{\mu_3(t)}{v_{2y}(0,t)}\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \quad t \in [0,T]. \tag{47}$$

Оскільки для $b_i(t), c_i(t), p_i(t)$, $i = 1,2$, справджуються рівності, аналогічні до (19)–(21), то звідси отримуємо

$$r(t)\mu_2(t) + q(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + c(t)\frac{\mu_4(t)}{h_2(t)} = s(t)(v_{2y}(0,t) - v_{2y}(1,t))+$$

$$+ s_1(t)(v_y(0,t) - v_y(1,t)) - c_1(t)\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right) - \int_0^1 (f(yh_1(t),t)-$$

$$- f(yh_2(t),t))dy + \mu_4'(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right), \quad t \in [0,T], \tag{48}$$

$$q(t)\left(\mu_1(t) - \frac{\mu_4(t)}{h_2(t)}\right) + \frac{c(t)}{h_2(t)}\left(\frac{\mu_5(t)}{h_2(t)} - \mu_4(t)\right) = s(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t) - v_{2y}(0,t))+$$

$$+ (q_1(t) + c_1(t))\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right) - c_1(t)\mu_5(t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right)-$$

$$- \int_0^1 (y-1)(f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t))dy - \mu_4'(t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right)+$$

$$+ s_1(t)v_y(0,t) + \mu_5'(t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right), \quad t \in [0,T], \tag{49}$$

$$c(t) = (h_1(t) - h_2(t))((\mu_1(t)\mu_5(t) - \mu_4^2(t))(h_1(t) + h_2(t)) + 2\mu_4(t)\mu_5(t)-$$

$$- \mu_1(t)\mu_6(t))\Big[s_1(t)\big(v_{1y}(0,t)(h_1^3(t)\mu_4(t) - 2h_1^2(t)\mu_5(t)) + 2h_1^2(t)\mu_2(t)\mu_5(t)-$$

$$- 2h_1^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t) - 2h_1^3(t)\mu_2(t)\mu_4(t) + 2h_1^2(t)\mu_4^2(t) - 2h_1^3(t)\mu_1(t)\mu_4(t)+$$

$$+ h_1^4(t)\mu_1(t)\mu_2(t) + h_1^4(t)\mu_1^2(t)\big) + h_1^2(t)\int_0^1 \big(2\mu_5(t) - h_1(t)\mu_4(t) + h_1(t)y^2(\mu_4(t)-$$

$$- h_1(t)\mu_1(t)) + y(h_1^2(t)\mu_1(t) - 2\mu_5(t))\big)f(yh_1(t),t)dy + \mu_4'(t)h_1(t)(h_1(t)\mu_4(t)-$$

$$- 2\mu_5(t)) + \mu_5'(t)(2\mu_5(t) - h_1^2(t)\mu_1(t)) + \mu_6'(t)(h_1(t)\mu_1(t) - \mu_4(t))\Big]\big((2\mu_5^2(t)-$$
$$- \mu_4(t)\mu_6(t) + h_1(t)\mu_1(t)\mu_6(t) - 2h_1(t)\mu_4(t)\mu_5(t) - h_1^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t)+$$
$$+ h_1^2(t)\mu_4^2(t)\big)\big(2\mu_5^2(t) - \mu_4(t)\mu_6(t) + h_2(t)\mu_1(t)\mu_6(t) + h_2^2(t)\mu_4^2(t)-$$
$$- 2h_2(t)\mu_4(t)\mu_5(t) - h_2^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t)\big)\big)^{-1} + \Big[s(t)\big(v_{1y}(0,t)(h_1^3(t)\mu_4(t)-$$
$$- 2h_1^2(t)\mu_5(t)) + 2h_1^2(t)\mu_2(t)\mu_5(t) - 2h_1^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t) - 2h_1^3(t)\mu_2(t)\mu_4(t)-$$
$$- 2h_1^3(t)\mu_1(t)\mu_4(t) + 2h_1^2(t)\mu_4^2(t) + h_1^4(t)\mu_1(t)\mu_2(t) + h_1^4(t)\mu_1^2(t)\big)+$$
$$+ s_2(t)\big(v_y(0,t)(h_1^3(t)\mu_4(t) - 2h_1^2(t)\mu_5(t)) + (h_1^3(t) - h_2^3(t))\mu_4(t)(v_{2y}(0,t)-$$
$$- 2\mu_1(t) - 2\mu_2(t)) + \mu_1(t)(\mu_1(t) + \mu_2(t))(h_1^4(t) - h_2^4(t)) + 2(h_1^2(t) - h_2^2(t))\times$$
$$\times (\mu_5(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) - \mu_5(t)v_{2y}(0,t) + \mu_4^2(t))\big) + h_1^2(t)\int_0^1 \big(2\mu_5(t) - h_1(t)\mu_4(t)+$$
$$+ h_1(t)y^2(\mu_4(t) - h_1(t)\mu_1(t)) + y(h_1^2(t)\mu_1(t) - 2\mu_5(t))\big)\big(f(yh_1(t),t)-$$
$$- f(yh_2(t),t))dy + \int_0^1 (1-y)(2\mu_5(t)(h_1^2(t) - h_2^2(t)) + y\mu_1(t)(h_1^4(t) - h_2^4(t))-$$
$$- \mu_4(t)(1+y)(h_1^3(t) - h_2^3(t)))f(yh_2(t),t)dy + (h_1^2(t) - h_2^2(t))(\mu_4(t)\mu_4'(t)-$$
$$- \mu_1(t)\mu_5'(t)) + (h_1(t) - h_2(t))(\mu_1(t)\mu_6'(t) - 2\mu_5(t))\Big]\big(2\mu_5^2(t) - \mu_4(t)\mu_6(t)+$$
$$+ h_2(t)\mu_1(t)\mu_6(t) + h_2^2(t)\mu_4^2(t) - 2h_2(t)\mu_4(t)\mu_5(t) - h_2^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t)\big)^{-1},$$
$$t \in [0,T]. \qquad (50)$$

Зауважимо, що згідно з (23) маємо

$$2\mu_5^2(t) - \mu_4(t)\mu_6(t) + h_i(t)\mu_1(t)\mu_6(t) - 2h_i(t)\mu_4(t)\mu_5(t) + h_i^2(t)\mu_4^2(t)-$$
$$- h_i^2(t)\mu_1(t)\mu_5(t) \geq C_0 h_i^4(t), \quad i = 1,2,\ t \in [0,t_4].$$

Виразимо $h_i(t)$ через $r_i(t)$

$$h_i(t) = h_i(0)\exp\left(\int_0^t r_i(\tau)d\tau\right), \quad i = 1,2,$$

де $h_1(0) = h_2(0) = h_0$.

Звідси, використовуючи рівність

$$e^x - e^y = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau,$$

отримуємо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0}\int\limits_0^t r(\tau)d\tau \int\limits_0^1 \exp\left(-\int\limits_0^t (\sigma r(\tau) + r_2(\tau))d\tau\right) d\sigma. \qquad (51)$$

Рівність (51) можемо аналогічно використати для зображення різниць $\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}$, $h_1(t) - h_2(t)$, $h_1^2(t) - h_2^2(t)$, $h_1^3(t) - h_2^3(t)$, $h_1^4(t) - h_2^4(t)$.

Припущення теореми забезпечують правильність рівності

$$f(yh_1(t), t) - f(yh_2(t), t) =$$
$$= y(h_1(t) - h_2(t))\int\limits_0^1 f_x(y(h_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t))), t)d\sigma. \qquad (52)$$

Підставивши (45), (46), (51), (52) в (47)–(50), одержимо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих $s(t), q(t)$, $r(t), c(t)$ з ядрами, що мають інтегровні особливості. Внаслідок єдиності розв'язку системи рівнянь (47)–(50) одержуємо $r(t) = 0$, $s(t) = 0$, $q(t) = 0$, $c(t) = 0$, $t \in [0, t_4]$. Звідси отримуємо, що $r_1(t) = r_2(t)$, $s_1(t) = s_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$, $c_1(t) = c_2(t)$, $t \in [0, t_4]$, а, отже, $h_1(t) = h_2(t)$, $b_1(t) = b_2(t)$, $a_1(t) = a_2(t)$, $t \in [0, t_4]$. Враховуючи це в задачі (39)–(41), знаходимо, що $v_1(y, t) = v_2(y, t)$, $(y, t) \in \overline{Q}_{t_4}$, що завершує доведення теореми.

1. *Пабирівська Н. В.* Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 1. – С. 51–58.
2. *Пабирівська Н. В.* Теплові моменти в оберненій задачі для параболічного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 142–149.
3. *Ang D. D., Trong D. D.* Coefficient identification for a parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – V. 10, N. 3. – P. 733–752.
4. *Cannon J., Lin, Y., Wang S.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – V.33. – P. 149–163.
5. *Cannon J., Perez-Esteva S.* Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation // Inverse Problems. – 1994. – V. 10, N. 3. – P. 521–531.
6. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.
7. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності. // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 7. – С. 901–910.
8. *Гринців Н. М.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 20–59.
9. *Гринців Н. М.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 4. – С. 28–39.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа // Москва: Наука, 1967. – 736 с.
11. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type // Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)

12. *Снітко Г. А.* Коефіцієнтна обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4. – С. 37–47.

Львівський національний університет
імені Івана Франка
вул. Університетська 1, 79000, Львів,
ivanchov@franko.lviv.ua

Отримано 20.05.11

Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
вул. Наукова 3б, 79060, Львів
snitkog@ukr.net