 А.А. Бондарь

МНОГООБРАЗИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ФИКСИРОВАННОЙ КРАТНОСТЬЮ ВЫДЕЛЕННОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

В.И. Арнольдом в [1] сформулирована "гипотеза трансверсальности" о том, что в "естественном" семействе вещественных симметрических эллиптических операторов, определенных на компактной области, те операторы, у которых выделенное собственное значение имеет фиксированную кратность, образуют банахово гладкое подмногообразие конечной коразмерности. Им же была получена предполагаемая формула коразмерности, зависящая только от кратности собственного значения. Достаточные условия выполнения гипотезы были получены D. Lupo, A.M. Micheletti [2] (для семейства операторов Лапласа на переменной компактной области определения) и Я.М. Дымарским [3] (для семейства операторов вида лапласиан плюс потенциал с переменным потенциалом).

Нами будет рассмотрено семейство комплексных несимметрических эллиптических операторов второго порядка, определенных на компактной области, у которых фиксирована кратность выделенного собственного значения. Для семейства получены достаточные условия справедливости гипотезы Арнольда.

Ключевые слова: Многообразие эллиптических операторов, гипотеза трансверсальности В.И. Арнольда.
MSC (2000): 35R30; 35K65; 45D05

Вступление.

В первом параграфе описан локальный диффеоморфизм, который используется во втором параграфе для "распрямления" многообразия абстрактных компактных операторов с фиксированной кратностью выделенного собственного значения. Утверждения теоремы из второго параграфа получены совместно с Я.М. Дымарским и еще не опубликованы, поэтому я привожу доказательство теоремы полностью. В третьем параграфе сформулирована и доказана теорема о семействе эллиптических операторов второго порядка с фиксированной кратностью выделенного собственного значения.

Автор признателен Я.М. Дымарскому за постановку проблемы и постоянную поддержку, а также благодарит А.В. Мартыненко за консультацию.

1. Вспомогательная лемма.

Пусть X – банахово пространство над полем $\mathbb{C}$. Пусть L_c банахово пространство компактных операторов действующих в X, A^0 – оператор, у которого собственному значению λ^0 кратности m отвечает одна клетка Жордана J^0. Поскольку собственное значение λ^0 не совпадает с остальными собственными значениями оператора A^0, спектр A^0 разбит на две непересекающиеся замкнутые части: изолированное собственное значение λ^0 и его дополнение. Все пространство X представимо в виде прямой суммы образов двух операторов проектирования: $X = P_1X \oplus P_2X$, где P_1 – проекционный оператор, отвечающий собственному значению λ^0, а P_2 – проекционный оператор, отвечающий остальной части спектра компактного оператора A^0 [6]. Произвольный оператор $B \in L_c$ имеет блочное представление

$$B = P_1BP_1 + P_1BP_2 + P_2BP_1 + P_2BP_2 = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right). \qquad (1)$$

Введем следующие обозначения

$$Ant\,(B) := \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix},\ Diag\,(B) := \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

В частности, в каноническом базисе подпространства $X_1 = P_1X$ оператор A^0 имеет вид

$$A^0 = \left(\begin{array}{c|c} J^0 & 0 \\ \hline 0 & A^0_{22} \end{array}\right). \qquad (2)$$

Указанный канонический базис индуцирует изоморфизм между операторами на X_1 и матрицами $m \times m$. Поэтому мы будем пользоваться обозначениями B_{11} и для операторов, и для матриц, что не приводит к двусмысленности. Через $V_\delta(A^0)$ обозначим δ-окрестность A^0 в L_c.

Вслед за работой [4] рассмотрим отображение:

$$\Psi : L_c \to L_c,\ \Psi(B) := \exp(Ant(B))(A^0 + Diag(B))\exp(-Ant(B)), \qquad (3)$$

где $\exp(B) = E + B + (1/2!)B^2 + \ldots$ – операторная экспонента. Справедлива следующая лемма:

Лемма. *Отображение Ψ является аналитическим на всем пространстве. Существует такое δ, что Ψ диффеоморфно отображает некоторую окрестность $V\,(0)$ нуля пространства L_c на окрестность $V_\delta(A^0)$ точки A^0.*

Доказательство. Аналитичность отображения Ψ следует из линейности и ограниченности отображений Ant и $Diag$ и аналитичности отображения exp.

Непосредственно из определения следует, что $\Psi(0) = A^0$. Найдем производную $D\Psi(0)$ в точке $0 \in L_c$ и докажем, что она является линейным изоморфизмом. Тогда из теоремы о существовании обратного отображения будет следовать утверждение леммы. С этой целью разложим операторную экспоненту в ряд и выделим в (3) линейную часть:

$$\Psi(B) = A^0 + Diag(B) + Ant(B) \cdot\ A^0 - A^0 \cdot Ant(B) + o(B),$$

где $o(B)$ – бесконечно малая второго порядка. Поэтому

$$D\Psi(0)B = Diag(B) + Ant(B) \cdot A^0 - A^0 \cdot Ant(B),$$

т.е.

$$D\Psi(0)B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \cdot A^0_{22} - J^0 \cdot B_{12} \\ B_{21} \cdot J^0 - A^0_{22} \cdot B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Из (4) следует, что отображение $D\Psi(0)$ ограничено. Покажем, что $D\Psi(0)$ является биекцией. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$D\Psi(0)B = C \tag{5}$$

имело единственное решение B при любых $C \in L_c$. Уравнение (5) равносильно системе операторных уравнений:

$$\begin{cases} B_{11} = C_{11}; \\ B_{22} = C_{22}; \\ B_{12} \cdot A^0_{22} - J^0 \cdot B_{12} = C_{12}; \\ B_{21} \cdot J^0 - A^0_{22} \cdot B_{21} = C_{21}. \end{cases}$$

Последние два уравнения являются уравнениями типа Сильвестра – Крейна. Согласно выбору A^0 собственное значение клетки J^0 не совпадает с остальными собственными значениями оператора A^0. Из теоремы 3.2 [5] следует, что указанные уравнения разрешимы, причем единственным образом. $\square$

2. Подмногообразие компактных операторов.

Пусть $L_c(A^0, \delta, \lambda^0, m)$ – подмножество компактных операторов, у которых собственное значение λ близко к λ^0, имеет ту же кратность m. Сформулируем вспомогательную теорему:

Теорема 1. *Для всех достаточно малых δ справедливо:*

1. *Подмножество $L_c(A^0, \delta, \lambda^0, m) \subset L_c$ является аналитическим подмногообразием комплексной коразмерности*

$$co\dim L_c(A^0, \delta, \lambda^0, m) = m - 1.$$

2. *В каноническом базисе касательное пространство $T_{A^0} L_c(A^0, \delta, \lambda^0, m)$ состоит из матриц $\begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix}$, у которых блоки $\Xi_{12}, \Xi_{21}, \Xi_{22}$ – произвольные, а блок Ξ_{11} имеет вид*

$$\Xi_{11} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{m1} & \dots & \xi_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & & & & \xi_{ij} \\ d_1 & \dots & & & \\ c_1 & d_2 & \dots & & \\ b_1 & c_2 & d_3 & \dots & \\ a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & \dots \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где на главной диагонали и выше стоят произвольные элементы ξ_{ij} $(i \le j)$, *а нижнедиагональные элементы* ξ_{ij} $(i > j)$ *связаны следующими соотношениями:*

$$\begin{cases} a_1 = 0; \\ b_1 + b_2 = 0; \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0; \\ \dots \quad . \end{cases}$$

Доказательство. Из определения кратности собственного значения следует, что оператор $A \in L_c(A^0, \delta, \lambda^0, m)$ имеет собственное значение λ кратности m (близкое к λ^0) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \det(J^0 + B_{11} - \lambda E) = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda} \det(J^0 + B_{11} - \lambda E) = 0; \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{m-2}}{\partial \lambda^{m-2}} \det(J^0 + B_{11} - \lambda E) = 0; \\ \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} \det(J^0 + B_{11} - \lambda E) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

В условиях (7) можно исключить параметр λ. Для этого перепишем последнее из условий следующим образом:

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} \big((\lambda^0 - \lambda)^m + b_{11}((\lambda^0 - \lambda)^{m-1}) + \ldots + b_{mm}((\lambda^0 - \lambda)^{m-1}) + P(\lambda) \big) = 0,$$

где $P(\lambda)$– полином степени $m-2$. Вычисляя производную, мы получаем:

$$m!(\lambda^0 - \lambda) + (m-1)!b_{11} + \ldots + (m-1)!b_{mm} = 0.$$

Следовательно

$$\lambda = \lambda^0 + \frac{Sp(B_{11})}{m}. \tag{8}$$

Подставив полученное значение λ в (7), мы получим $(m-1)$-но алгебраическое условие.

Покажем, что эти условия линейно независимы. Элементы матрицы B_{11} обозначим через b_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Чтобы проверить линейную независимость, достаточно доказать, что частные производные

$$d_k := \frac{\partial}{\partial b_{m-k,1}} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \det(J^0 + B_{11} - \lambda E) \Big|_{\lambda = \lambda^0 + \frac{Sp(B_{11})}{m}} \right) \Bigg|_{b_{ij}=0}, \; k = 0, \ldots, m-2. \tag{9}$$

не равны нулю. Поскольку

$$J^0 + B_{11} - \lambda E = \begin{pmatrix} b_{11} + \lambda^0 - \lambda & b_{12} + 1 & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} + \lambda^0 - \lambda & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} + \lambda^0 - \lambda \end{pmatrix},$$

то, в силу формулы (8), собственное значение λ не зависит от нижнедиагональных элементов $b_{m-k,1}$ ($k = 0, 1, \dots, m-2$). Поэтому в выражениях (9) можно поменять порядок дифференцирования. После дифференцирования по переменной $b_{m-k,1}$ ($k = 0, 1, \dots, m-2$) выражение (9) принимает вид:

$$d_k = (-1)^{m-k+1} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \det M_{m-k,1}|_{\lambda=\lambda^0},$$

где

$$M_{m-k,1} = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & \\ \lambda^0 - \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & & & 0 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^0 - \lambda & 1 & & & & & \\ \hline & & & & & \lambda^0 - \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 0 & & & 0 & 0 & \dots & \lambda^0 - \lambda & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^0 - \lambda \end{array}\right).$$

Теперь очевидно, что

$$d_k = (-1)^{m-k+1} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\lambda^0 - \lambda)^k \Big|_{\lambda=\lambda^0} =$$

$$= (-1)^{m-k+1} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\lambda^0 - \lambda)^k \Big|_{\lambda=\lambda^0} = (-1)^{m-k+1} \cdot (-1) k! = (-1)^{m-k} k! \neq 0$$

для любых $k = 0, \dots, m-2$. Независимость условий доказана. Отсюда следует, что подмножество $L_c(A^0, \delta, \lambda^0, m) \subset L_c$ является аналитическим подмногообразием комплексной коразмерности $m-1$.

Докажем второе утверждение теоремы. По определению, касательное пространство $T_{A^0} L_c(A^0, \delta, \lambda^0, m)$ – это ядро линеаризованного по B_{11} условия (7), т.е. это множество матриц $\Xi_{11} = (\xi_{ij})$, элементы которых удовлетворяют системе

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial}{\partial b_{ij}} \Big(det(J^0 + B_{11} - \lambda E)\big|_{\lambda=\lambda^0+Sp(B_{11})/m} \Big)\Big|_{B_{11}=0} \cdot \xi_{ij} = 0, \\
\sum\limits_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial}{\partial b_{ij}} \left(\dfrac{\partial}{\partial \lambda} det(J^0 + B_{11} - \lambda E)\Big|_{\lambda=\lambda^0+Sp(B_{11})/m} \right)\Bigg|_{B_{11}=0} \cdot \xi_{ij} = 0, \\
\vdots \\
\sum\limits_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial}{\partial b_{ij}} \left(\dfrac{\partial^{m-2}}{\partial \lambda^{m-2}} det(J^0 + B_{11} - \lambda E)\Big|_{\lambda=\lambda^0+Sp(B_{11})/m} \right)\Bigg|_{B_{11}=0} \cdot \xi_{ij} = 0.
\end{cases} \tag{10}
$$

Покажем, что в первом уравнении из (10) все производные, кроме производной по b_{m1}, равны нулю; во втором уравнении все производные, кроме производных по переменным $b_{m-1,1}$ и $b_{m,2}$, равны нулю, а производные по $b_{m-1,1}$ и $b_{m,2}$ отличны от нуля и совпадают; и т.д. Точнее, мы покажем, что в k-том $(k = 0, 1, \ldots, m-2)$ уравнении системы (10) коэффициент $c_{m-i,j}$ при элементе $\xi_{m-i,j}$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1,\ j = 1, 2, \ldots, m)$ равен

$$
c_{m-i,j} := \frac{\partial}{\partial b_{m-i,j}} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} det(J^0 + B_{11} - \lambda E)\Big|_{\lambda=\lambda^0+\frac{Sp(B_{11})}{m}} \right)\Bigg|_{B_{11}=0} = (-1)^k k! \tag{11}
$$

при $k = i + j - 1,\ m - i > j$, и равен

$$
c_{m-i,j} := \frac{\partial}{\partial b_{m-i,j}} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} det(J^0 + B_{11} - \lambda E)\Big|_{\lambda=\lambda^0+\frac{Sp(B_{11})}{m}} \right)\Bigg|_{B_{11}=0} = 0 \tag{12}
$$

в остальных случаях: $\{k = i + j - 1$ и $m - i \leq j\}$ или $\{k \neq i + j - 1\}$.

Докажем равенство (11). В силу (8), собственное значение λ зависит только от диагональных элементов матрицы B_{11}. Поэтому при $m-i > j$ в определении коэффициента $c_{m-i,j}$ мы вправе поменять порядок дифференцирования. При условии $B_{11} = 0$ производная определителя $\det\big(J^0 + B_{11} - \lambda E\big)$ есть определитель матрицы, у которой в $(m-i)$-ой строке стоят только нулевые элементы, кроме j-го места, где находится единица. Расписав полученный определитель по элементам $(m-i)$-ой строки, мы получим, что

$$
c_{m-i,j} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \begin{vmatrix} (\lambda^0 - \lambda)E_{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m-i-j} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^0 - \lambda)E_i \end{vmatrix},
$$

где E_p – единичная матрица размера $p \times p$. Таким образом,

$$c_{m-i,j} = \frac{\partial}{\partial b_{m-i,j}} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \det(J^0 + B_{11} - \lambda E)\Big|_{\lambda=\lambda^0} =$$
$$= \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\lambda^0 - \lambda)^{j-1} \cdot 1 \cdot (\lambda^0 - \lambda)^i \Big|_{\lambda=\lambda^0} =$$
$$= \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\lambda^0 - \lambda)^{j+i-1} \Big|_{\lambda=\lambda^0} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\lambda^0 - \lambda)^k \Big|_{\lambda=\lambda^0} = (-1)^k \cdot k!$$

что доказывает (11).

Повторяя предыдущие рассуждения для нижнедиагональных элементов $b_{m-i,j}$ $(m-i > j)$, при условии $k \neq i+j-1$ получаем

$$c_{m-i,j} = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\lambda^0 - \lambda)^{j+i-1} \Big|_{\lambda=\lambda^0} = 0.$$

Рассмотрим случай, когда производные берутся по верхнедиагональным элементам $b_{m-i,j}$ $(m-i < j)$. Учитывая (8) и то обстоятельство, что производные в (12) берутся только по переменной $b_{m-i,j}$ в точке $b_{m-i,j} = 0$, коэффициент $c_{m-i,j}$ можно переписать следующим образом:

$$c_{m-i,j} = \frac{\partial}{\partial b_{m-i,j}} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\lambda^0 - \lambda)^m \Big|_{\lambda=\lambda^0} \right) \Bigg|_{B_{11}=0} = 0.$$

Остается доказать равенство (12) для случая диагональных элементов b_{jj} $(m-i=j)$, т.е. доказать, что при $k = 0, ..., m-2$,

$$c_{jj} = \frac{\partial}{\partial b_{jj}} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \det(J^0 + B_{11} - \lambda E) \Big|_{\lambda=\lambda^0 + Sp(B_{11})/m} \right) \Bigg|_{B_{11}=0} = 0. \qquad (13)$$

Учитывая (8) и тот факт, что частная производная в (13) берется по диагональному элементу матрицы, коэффициент c_{jj} из (13) равен

$$c_{jj} = \frac{\partial}{\partial b_{jj}} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\lambda^0 - \lambda + b_{11}) \dots (\lambda^0 - \lambda + b_{mm}) \Big|_{\lambda=\lambda^0 + Sp(B_{11})/m} \right) \Bigg|_{b_{jj}=0}. \qquad (14)$$

При взятии частной производной по элементу b_{11}, мы можем считать, что все остальные элементы b_{jj} $(j = 2, 3, \dots, m)$ равны нулю, т.е. левая часть (14) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial b_{11}}\left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left(\lambda^0-\lambda+b_{11}\right)\left(\lambda^0-\lambda\right)^{m-1}\Big|_{\lambda=\lambda^0-b_{11}/m}\right)\Bigg|_{b_{11}=0}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial b_{11}}\left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\left((\lambda^0-\lambda)^m+b_{11}(\lambda^0-\lambda)^{m-1}\right)\Big|_{\lambda=\lambda^0-b_{11}/m}\right)\Bigg|_{b_{11}=0}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial b_{11}}\left(\frac{m!}{(m-k)!}\left(-\frac{b_{11}}{m}\right)^{m-k}+\frac{(m-1)!}{(m-1-k)!}\left(-\frac{b_{11}}{m}\right)^{m-k}\right)\Bigg|_{b_{11}=0},$$

что равняется нулю для всех $k=0,1,\ldots,m-2$.

Аналогичные рассуждения справедливы, если брать частные производные по элементам $b_{22},b_{33},\ldots,b_{mm}$.

Вспомогательная теорема доказана. $\Box$

3. Основная теорема.

Обозначим: $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область с C^∞-границей $\partial\Omega$; $W_2^l(\Omega)=W_2^l$ – гильбертово пространство Соболева функций, имеющих обобщенные производные до l-го порядка из пространства $L_2(\Omega)$ [10]; $(y_1,y_2)=\int_\Omega y_1(x)\bar{y_2}(x)dx$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$; $\overset{\bullet}{W}{}_2^1$ – замыкание в W_2^1 множества C^∞-функций с компактным в Ω носителем; $\overset{\circ}{W}{}_2^2=W_2^2\cap\overset{\bullet}{W}{}_2^1$. Рассмотрим семейство краевых задач второго порядка

$$-\Delta y+\sum_{i=1}^n q_i\frac{\partial y}{\partial x_i}+ay=\lambda y\quad y|_{\partial\Omega}=0, \tag{15}$$

где Δ – оператор Лапласа, $q_1,...,q_n,a$ – комплекснозначные функции из $C^1(\overline{\Omega})$; в качестве функционального параметра семейства используется потенциал $a\in C^1(\overline{\Omega})$. Семейство (15) краевых задач порождает семейство операторов

$$F(a):\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)\to L_2(\Omega),$$

$$F(a)y:=-\Delta y+\sum q_i\frac{\partial y}{\partial x_i}+ay,$$

зависящих от параметра $a\in C^1(\overline{\Omega})$. Без ограничения общности можно считать, что спектр оператора $F(a^0)$ имеет положительную действительную часть (иначе рассмотрим оператор $F(a^0)+C$ с достаточно большой постоянной $C>0$).

Поэтому в некоторой окрестности $U(a^0) \subset C^1(\overline{\Omega})$ точки a^0 определено семейство обратных операторов

$$(F(a))^{-1} : \ L_2(\Omega) \to \overset{\circ}{W}{}_2^2 (\Omega),$$

которое, в свою очередь, порождает семейство компактных операторов

$$im \cdot (F(a))^{-1} : \ L_2(\Omega) \to L_2(\Omega),$$

где $im : \overset{\circ}{W}{}_2^2 \subset L_2(\Omega)$ – компактное вложение.

Т.о. семейство (15) краевых задач локально равносильно семейству операторных уравнений

$$(im \cdot (F(a))^{-1})y = \frac{1}{\lambda}y.$$

Нас интересует аналитическое [7] отображение

$$f : U(a^0) \to L_c(L_2(\Omega)), \ f(a) := im \cdot (F(a))^{-1},$$

которое каждому потенциалу a из окрестности точки a^0 ставит в соответствие компактный оператор.

Пусть при $a = a^0$ собственное значение λ^0 компактного оператора $A^0 := f(a^0)$ имеет кратность m, и ему отвечает одна клетка Жордана. Обозначим через $y_1, ..., y_m$ – собственную и присоединенные функции, отвечающие собственному значению λ^0, через $\{y_1, ..., y_m\} \subset L_2(\Omega)$ – подпространство, порожденное указанными функциями, а через H – инвариантное подпространство, отвечающее остальной части спектра компактного оператора A^0. Тогда $L_2(\Omega) = \{y_1, ..., y_m\} \oplus H$.

Обозначим через $C^1(a^0, \varepsilon, \lambda^0, m) \subset U(a^0)$ подмножество потенциалов a ε-близких a^0, для которых собственное значение λ компактного оператора $f(a)$, близкое собственному значению λ^0, имеет ту же кратность m.

Теорема 2. *Пусть в точке a^0 отображение f трансверсально подмногообразию $L_c(A^0, \delta, \lambda^0, m)$:*

$$f|_{a^0} \pitchfork L_c(A^0, \delta, \lambda^0, m). \tag{16}$$

Тогда прообраз $f^{-1}(L_c(A^0, \delta, \lambda^0, m)) = C^1(a^0, \varepsilon, \lambda^0, m) \subset C^1(\overline{\Omega})$ является банаховым аналитическим подмногообразием коразмерности $m-1$; касательное пространство к нему определяется как полный прообраз:

$$T_{a^0} C^1(a^0, \varepsilon, \lambda^0, m) = (Df(a^0))^{-1} \left[T_{A^0} L_c(A^0, \delta, \lambda^0, m) \right],$$

где

$$Df(a^0) : T_{a^0} U(a^0) := C^1(\overline{\Omega}) \to T_{A^0} L_c(L_2(\Omega)) := L_c(L_2(\Omega))$$

– оператор производной.

Доказательство. Доказательство теоремы немедленно следует из условия трансверсальности [8].□

Чтобы выписать аналитические условия, достаточные для справедливости (16), рассмотрим подробнее производную $Df(a^0)$. В силу правила дифференцирования отображения $F(a) \to (F(a))^{-1}$ [7], значение искомого оператора производной на приращении $b \in C^1(\overline{\Omega})$ равно

$$Df(a^0)b = \left[D\left(im \cdot (F(a))^{-1}\right)\Big|_{a=a^0}\right] b = -im \cdot (F(a^0))^{-1} \cdot DF(a^0)b \cdot (F(a^0))^{-1}.$$

Поэтому справедливы разложения

$$\left[-im \cdot (F(a^0))^{-1} \cdot DF(a^0)b \cdot (F(a^0))^{-1}\right] y_j = \xi_{1j}y_1 + \xi_{2j}y_2 + \ldots + \xi_{mj}y_m + Y_j, \quad (17)$$

где $\xi_{ij} \in \mathbb{C}$, $Y_j \in H$, $j = 1, ..., m-1$, $i = 1, ..., m$. Отметим, что, в силу определения отображения f, матрица $\Xi_{11} = (\xi_{ij})$ $(i, j = 1, ..., m)$ является верхним левым блоком оператора из пространства L_c (см. (6)).

Введем следующее обозначение: $H_i := \{y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_m, H\}$. Из определения следует, что $H_i \oplus \{y_i\} = L_2(\Omega)$. Существует функция η_i такая, что $\eta_i \perp H_i$ и $|\eta_i| = 1$ (все такие функции образуют единичную окружность, нас устраивает любая из них). Понятно, что $\lambda_i := (\eta_i, y_i) \neq 0$ и $H_i \oplus \{\eta_i\} = L_2(\Omega)$.

Умножив обе части (17) скалярно на η_i, получим

$$\left(\left[-im \cdot (F(a^0))^{-1} \cdot DF(a^0)b \cdot (F(a^0))^{-1}\right] y_j, \eta_i\right) = \xi_{ij} \cdot (y_i, \eta_i). \quad (18)$$

Обозначим через B^*– банахово пространство, сопряженное B; через $im^* : (L_2(\Omega))^* \to (\overset{\circ}{W}{}_2^2)^*$ и $((F(a^0))^{-1})^* : (\overset{\circ}{W}{}_2^2)^* \to (L_2(\Omega))^*$, операторы, сопряженные к im и $(F(a^0))^{-1}$ соответственно; через $(-im \cdot (F(a^0))^{-1})^\star : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ обозначим оператор, гильбертово сопряженный к оператору $-im \cdot (F(a^0))^{-1}$. Тогда, в силу [9],

$$(-im \cdot (F(a^0))^{-1})^\star = R^{-1}(-im \cdot (F(a^0))^{-1})^* R, \quad (19)$$

где $R : L_2(\Omega) \to (L_2(\Omega))^*$ – линейный изоморфизм Риса, порожденный скалярным произведением, между пространством и ему сопряженным. Равенство (18) можно переписать следующим образом:

$$\left(\left[DF(a^0)b \cdot (F(a^0))^{-1}\right] y_j, (-im \cdot (F(a^0))^{-1})^\star \eta_i\right) = \xi_{ij} \cdot (y_i, \eta_i).$$

В силу (19)

$$\left(\left[DF(a^0)b \cdot (F(a^0))^{-1}\right] y_j, (R^{-1}(-im \cdot (F(a^0))^{-1})^* R)\eta_i\right) = \xi_{ij} \cdot (y_i, \eta_i).$$

Откуда

$$\xi_{ij}\lambda_i = \left(\left(-\frac{1}{\lambda^0} y_j + y_{j-1}\right) b, \nu_i\right),$$

где $\nu_i = (R^{-1}(-im\cdot(F(a^0))^{-1})^* R)\eta_i = -(R^{-1}\cdot((F(a^0))^{-1})^*\cdot im^*\cdot R)\eta_i$. Покажем, что функция $\nu_i \neq 0$. Во-первых, по определению, $\eta_i \neq 0$. Во-вторых, линейные операторы R^{-1}, $((F(a^0))^{-1})^*$, R являются ограниченными изоморфизмами. Наконец, оператор im^* имеет тривиальное ядро, поскольку является сопряженным к оператору, образ которого всюду плотен [10]. Итак, мы получили, что

$$\xi_{ij} = \xi_{ij}(b) = \frac{1}{\lambda_i}\int\limits_{\Omega}\left(-\frac{1}{\lambda^0}y_j(x) + y_{j-1}(x)\right)\cdot b(x)\cdot \nu_i(x)dx, \tag{20}$$

где $i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,m-1, y_0 \equiv 0$. Отметим, что интегралы (20) существуют, поскольку функция $b \in C^1(\overline{\Omega})$. Теперь из п. 2 теоремы 1 мы сразу получаем достаточные условия трансверсальности (16).

Теорема 3. *Если функционалы*

$$\begin{aligned}&\xi_{m,1},\\ &\xi_{m-1,1}+\xi_{m,2},\\ &\ldots,\\ &\xi_{21}+\xi_{32}+\ldots+\xi_{m,m-1},\end{aligned}$$

являются линейно независимыми, то в точке a^0 отображение f трансверсально подмногообразию $L_c(A^0,\varepsilon,\lambda^0,m)$. В частности, для двукратного собственного значения достаточным условием трансверсальности является невырожденность функционала

$$\xi_{21}(b) = -\frac{1}{\lambda^0\lambda_2}\int\limits_{\Omega} y_1(x)\cdot b(x)\cdot \nu_2(x)dx.$$

Убедимся, что для двукратного собственного значения условие трансверсальности выполняется всегда.

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Существует такое малое $\varepsilon > 0$, что $C^1(a^0,\varepsilon,\lambda^0,2) \subset C^1(\overline{\Omega})$ является аналитическим подмногообразием коразмерности*

$$co\dim C^1(a^0,\varepsilon,\lambda^0,2) = 1.$$

2. *Касательное пространство $T_{a^0}C^1(a^0,\varepsilon,\lambda^0,2)$ определяется условием*

$$T_{a^0}C^1(a^0,\varepsilon,\lambda^0,2) = \{b\in C^1(\overline{\Omega}),\ \int\limits_{\Omega} y_1(x)\cdot b(x)\cdot \nu_2(x)dx = 0\}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что существует функция $b \neq 0$, для которой

$$\xi_{21}(b) = -\frac{1}{\lambda^0 \lambda_2} \int\limits_{\Omega} y_1(x) \cdot b(x) \cdot \nu_2(x) dx \neq 0. \tag{21}$$

Возьмем $\beta(x) = \bar{y_1}(x) \cdot \bar{\nu_2}(x)$, поскольку $y_1 \in W_2^2(\Omega)$, то $\beta(x) \in L_2(\Omega)$ и $|y_1|^2 \cdot |\nu_2|^2 \in L_2(\Omega)$. Функция $\nu_2 \neq 0$, а собственная функция y_1 не обращается в нуль ни на одном открытом подмножестве области Ω (этот факт следует из гладкости коэффициентов q_i и a уравнения (15), см. [11]), значит существует подмножество полной меры в Ω, на котором обе они не обращаются в нуль ни в одной точке. Поэтому функция $\psi = |y_1|^2 \cdot |\nu_2|^2 \neq 0$. Следовательно, $I = \int_\Omega \psi dx > 0$. Далее, найдутся функции $b \in C^1(\overline{\Omega})$ и $\epsilon \in L_2(\Omega)$ такие, что $\beta = b + \epsilon$, причем функцию $\epsilon \in L_2(\Omega)$ можно выбрать сколь угодно малой нормы. Выберем ϵ так, чтобы

$$\left| \int_\Omega \epsilon \cdot y_1 \cdot \nu_2 dx \right| < \frac{1}{2} I.$$

Действительно

$$\left| \int\limits_\Omega \epsilon \cdot y_1 \cdot \nu_2 dx \right| < max|y_1(x)| \sqrt{\int\limits_\Omega |\epsilon|^2 dx \int\limits_\Omega |\nu_2|^2 dx} = C \cdot ||\epsilon||_{L_2(\Omega)} < \frac{1}{2} I,$$

где C – некоторая постоянная. Теперь $b = \beta - \epsilon$ и

$$(-\lambda^0 \lambda_2)\xi_{21}(b) = \int\limits_\Omega y_1 \cdot b \cdot \nu_2 dx \geq \left| \int\limits_\Omega y_1 \cdot \beta \cdot \nu_2 dx \right| - \left| \int\limits_\Omega y_1 \cdot \epsilon \cdot \nu_2 dx \right| \geq I - \frac{1}{2} I > 0.$$

Следовательно выполняется неравенство (21). Откуда, в силу теоремы 3 и теоремы 2, следуют утверждения доказываемой теоремы. □

В своей работе [1] В.И.Арнольд показал, что семейство конечномерных вещественных симметрических операторов с фиксированной кратностью выделенного собственного значения образует гладкое подмногообразие конечной коразмерности, которая дается формулой $codim = \frac{1}{2}(m-1)(m+2)$. Там же им высказана гипотеза о сохранении формулы коразмерности для "типичных" семейств вещественных симметрических эллиптических операторов. (Получены достаточные условия справедливости гипотезы Арнольда, см. [3].)

Полученная нами формула коразмерности $codim = m - 1$ подмногообразия комплексных несимметрических эллиптических операторов второго порядка естественно отличается от формулы Арнольда. Это связано следующими очевидными фактами.

1. Скалярная матрица в пространстве симметрических матриц определяется условиями обнуления всех элементов выше главной диагонали (при

этом элементы ниже диагонали обнуляются автоматически), что приводит к появлению в точности $\frac{1}{2}(m-1)(m+2)$ условий.

2. В случае, рассмотренном В.И. Арнольдом, алгебраическая кратность выделенного собственного значения совпадала с геометрической. Другими словами, он рассматривал симметрические операторы, у которых выделенному собственному значению кратности m отвечает m одномерных клеток Жордана. Нами же рассматривается случай, когда собственному значению кратности m отвечает единственная клетка Жордана размера $m \times m$.

Однако мы отметим, что формула коразмерности по-прежнему зависит только от кратности собственного значения.

1. *Арнольд В.И.* Моды и квазимоды // Функц. анализ и его прилож. - 1972. -6, №2,-с.94-101.
2. *Lupo D., Micheletti A.M.* On the persistence of the multiplicity of eigenvalues for some variational operator depending on the domain // J. Math. Anal. and Appl. — 1995. — 193. — P. 990-1002.
3. *Dymarskii Ya.M.* Manifold Method in the Eigenvector Theory of Nonlinear Operators // Jornal of Mathematical Sciences - 2008. - vol. 154, No 5. - p.655-815.
4. *Fujiwara D., Tanikawa M., Yukita Sh.* The spectrum of Laplasian and Boundary Perturbation I// Proc. Jap. Acad. Ser. A. - 1978. - 54, No 4.- p 87-91.
5. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве – М.: Наука, 1970. – 535 с.
6. *Садовничий В.А.* Теория операторов – М.: Дрофа, 2004. – 385 с.
7. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа – М.: Мир, 1964. – 430 с.
8. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий – М.: Мир, 1967. – 203 с.
9. *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с.
10. Функциональный анализ. Справочник под редакцией Ф.Г.Крейна – М.: Наука, 1972.
11. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными – М.: Мир, 1977. – 504 с.

Луганский национальный университет
имени Тараса Шевченко,
ул. Оборонная, 2, 91011 Луганск
a.-bondar@mail.ru

Получено 21.04.11