©2009. **Н. В. Краснощек**

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ДИНАМИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА ЛИНИИ СОПРЯЖЕНИЯ

Доказана классическая разрешимость задачи сопряжения при взаимодействии двух упругих сред с динамическим условием на линии сопряжения, включающем уравнение параболического типа для функции, моделирующей отклонение линии контакта от положения равновесия.

Ключевые слова: задача сопряжения, неоднородная среда, теория упругости, метод продолжения по параметру
MSC (2000): 35R35, 74G40

Введение.

Пусть две упругих среды занимают области $\Pi_1 = \{x \in R^2,\ 0 < x_2 < H_1\}$, $\Pi_2 = \{x \in R^2,\ -H_2 < x_2 < 0\}$, где H_1, H_2 - произвольные положительные постоянные. Предположим, что модули Юнга E_1, E_2 данных сред различны, а (для упрощения выкладок) коэффициенты Пуассона совпадают: $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. В дальнейшем обозначим через $u^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)})$ и $u^{(2)} = (u_1^{(2)}, u_2^{(2)})$ векторы смещений в 1-й и 2-й средах соответственно (аналогично, индексом вверху будут обозначаться деформации, напряжения и внешние воздействия в соответствующих средах), а через u следующую функцию:

$$u = \begin{cases} u^{(1)},\ x \in \Pi_1, \\ u^{(2)},\ x \in \Pi_1. \end{cases}$$

Для произвольной функции v обозначим через $[v] = v|_{x_2=+0} - v|_{x_2=-0}$ скачок на прямой $x_2 = 0$. Рассмотрим задачу: найти функции $u^{(1)}(x,t)$, $u^{(2)}(x,t)$, $\rho(x_1,t)$ такие, что

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{1-2\nu}\nabla \mathrm{div} u^{(i)} + \Delta u^{(i)} = \mathbb{F}^{(i)}, \quad x \in \Pi_i,\ t > 0,\ i = 1,2, \\ \sigma_{i2}^{(1)} = \mathbb{G}_i, \quad x_2 = H_1,\ t > 0,\ i = 1,2, \\ u^{(2)} = 0, \quad x_2 = -H_2,\ t > 0, \\ [\sigma_{12}] = \mathbb{H}_1,\ [\sigma_{22}] + b_0\rho_{x_1x_1} = \mathbb{H}_2, \quad x_2 = 0,\ t > 0, \\ [u_1] = 0,\ [u_2] - b_1\rho = 0, \quad x_2 = 0,\ t > 0, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\rho_t - a\rho_{x_1x_1} + a_0\rho - u_2^{(1)} + c\left[\tfrac{\sigma_{22}}{E}\right] = \mathbb{H}_0(x_1,t), \quad x_2 = 0,\ t > 0, \tag{2}$$

$$\rho(x_1,0) = 0, \tag{3}$$

здесь σ_{ij} - напряжения, $\left[\frac{\sigma_{22}}{E}\right] = \frac{\sigma_{22}^{(1)}}{E_1} - \frac{\sigma_{22}^{(2)}}{E_2}$, $\mathbb{F}^{(i)}$, $\mathbb{G}_i$, $\mathbb{H}_i$ - заданные функции, периодические по переменной x_1 с периодом равным 2π, а b_0, b_1, a_0, a, c - произвольные положительные постоянные.

Напомним некоторые соотношения линейной теории упругости:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i}\right),\ \varepsilon^{(k)} = \mathrm{div} u^{(k)},$$
$$\sigma_{ij}^{(k)} = \tfrac{E_k}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij}^{(k)} + \tfrac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon^{(k)}\delta_{ij}\right), \quad i,j,k = 1,2.$$

Задача данного типа возникает при исследовании задачи со свободной границей при взаимодействии двух упругих сред (см., например, [1], [2]), а именно при линеаризации исходной задачи в малой окрестности стационарного решения с плоским фронтом. Изучению данной задачи в полной постановке будет посвящена отдельная статья.

Считаем, что выполнены следующие предположения

H1) $\mathbb{F}^{(i)} \in C^{(0,\alpha)}(\Omega_T^{(i)})$, $\mathbb{G}_i \in C^{(0,1+\alpha)}(S_T)$, $\mathbb{H}_j \in C^{(0,1+\alpha)}(S_T)$, $i = 1,2;\ j = 0,1,2;$

H2) $\mathbb{F}^{(i)}|_{t=0} = 0,\ \mathbb{G}_i|_{t=0} = 0,\ \mathbb{H}_j|_{t=0} = 0,\ \ i = 1,2;\ j = 0,1,2.$

Основная особенность задачи (1)-(3) состоит в том, что в уравнении для функции ρ первое и четвертое слагаемые являются равносильными по порядку, то есть фактически содержат вторую производную $\rho_{x_1x_1}$. В данной связи заметим, на примере однородной задачи, что если $E_1 = E_2 = E$, то из условия $[\sigma_{22}] = -b_0\rho_{x_1x_1}$ следует, что в этом случае ρ удовлетворяет уравнению:

$$\rho_t - \left(a + \frac{c}{E}\right)\rho_{x_1x_1} + a_0\rho + u_2^{(1)} = \mathbb{H}_0(x_1,t).$$

Подход, предлагаемый в данной статье, состоит, в применении метода продолжения по параметру. Введем параметр $\lambda \in [0,1]$ и рассмотрим уравнение

$$\rho_t - a\rho_{x_1x_1} + \lambda\left(a_0\rho - u_2^{(1)} + c\left[\frac{\sigma_{22}}{E}\right]\right) = \mathbb{H}_0, \quad x_2 = 0,\ t > 0, \tag{2_λ}$$

которое при $\lambda = 1$ совпадает с уравнением (2), а при $\lambda = 0$ переходит в уравнение теплопроводности

$$\rho_t - a\rho_{x_1x_1} = \mathbb{H}_0, \tag{2_0}$$

а значит мы можем сначала найти ρ, а потом - смещения $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ из задачи сопряжения (1). План работы состоит в том, чтобы 1) доказать разрешимость задачи (1), (2_0), (3); 2) получить равномерные по λ оценки решения задачи (1), (2_λ), (3); 3) применить теорему о продолжении по параметру.

Эволюционные задачи со свободными границами для эллиптических уравнений и систем изучались во многих работах при помощи различных подходов. Не претендуя на полноту изложения, укажем на некоторые из них. В работе [3] при доказательстве разрешимости линеаризованной задачи применяется метод поточечных оценок Шаудера и теорема Фредгольма, в работах [4] и [5] метод построения регуляризатора в пространствах Гельдера и Бесова-Никольского соответственно, в [6] используется метод разделения переменных, в [7] - теория полугрупп, в работе [8] исходная задача регуляризуется: для функции, описывающей отклонение свободной границы от начального положения, рассматривается параболическое уравнение 4-го порядка с малым параметром ϵ при старших производных по пространственным переменным, а затем производится предельный переход по ϵ, в работе [9] постановка задачи (задача Веригина) позволяет сначала "решить" задачу сопряжения для эллиптического уравнения, а затем "найти" свободную границу: при этом существенную роль играет изучение модельной задачи сопряжения и последующее применение метода Шаудера.

1. Основные обозначения. Задача при $\lambda = 0$. Оценка максимума модуля в задаче сопряжения.

Обозначим через S окружность единичного радиуса. В дальнейшем, не указывая на периодичность рассматриваемых функций по x_1, будем говорить, что $x_1 \in S$. Введем следующие обозначения: $\Sigma^{(1)} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in S,\ x_2 = H_1\}$, $\Sigma^{(2)} = \{(x_1, x_2) : x_1 \in S,\ x_2 = -H_2\}$, $\Gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 \in S,\ x_2 = 0\}$, $\Omega^{(1)} = \{x : x \in S \times (0, H_1)\}$ $\Omega^{(2)} = \{x : x \in S \times (-H_2, 0)\}$, $\Omega = \{x : x \in S \times (-H_2, H_1)\}$. Обозначим $\Sigma_T^{(1)} = \{(x,t) : x \in \Sigma^{(1)},\ t \in (0,T)\}$, определив аналогичным образом множества $\Sigma_T^{(2)}$, Γ_T, S_T, $\Omega_T^{(1)}$, $\Omega_T^{(2)}$, Ω_T.

Пусть Q одно из множеств на плоскости, перечисленных выше. Положим (k - целое неотрицательное число, $0 < \alpha < 1$)

$$|v|_Q^{(0)} = \sup_Q |v|, \quad |v|_Q^{(k)} = \sum_{0 \le |j| \le k} \left|D^j v\right|_Q^{(0)},$$

$$\langle v \rangle_Q^{(\alpha)} = \sup_{x,y \in Q} \tfrac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\alpha},\ \langle v \rangle_Q^{(k+\alpha)} = \sum_{|j|=k} \left\langle D^j v \right\rangle_Q^{(\alpha)}.$$

Напомним, что норма в пространстве Гёльдера задаётся формулой $|v|_Q^{(k+\alpha)} = |v|_Q^{(k)} + \langle v \rangle_Q^{(k+\alpha)}$.

Следуя работе [10], введем пространства $C^{0,\alpha}(Q_T)$, состоящее из непрерывных и ограниченных в $\overline{Q_T}$ функций $v(x,t)$, непрерывных по Гёльдеру с показателем α равномерно по t.

Далее введем пространства $C^{0,k+\alpha}(Q_T)$ функций $v(x,t)$ таких, что сами функции и их производные по пространственным переменным до k-го порядка включительно принадлежат $C^{0,\alpha}(Q_T)$. Норма в пространстве $C^{0,k+\alpha}(Q_T)$ задается формулой

$$|v|_{Q_T}^{(k+\alpha)} = \sup_{0\le t\le T} |v(\cdot,t)|_Q^{(k)} + \sup_{0\le t\le T} \langle v(\cdot,t)\rangle_Q^{(k+\alpha)}.$$

Для вектора $u^{(i)}$ принадлежность пространству $C^{0,k+\alpha}\left(\Omega_T^{(i)}\right)$ означает, что $u_j^{(i)} \in C^{0,k+\alpha}\left(\Omega_T^{(i)}\right)$ для $j=1,2$, причем

$$\left|u^{(i)}\right|_{\Omega_T^{(i)}}^{(k+\alpha)} = \left|u_1^{(i)}\right|_{\Omega_T^{(i)}}^{(k+\alpha)} + \left|u_2^{(i)}\right|_{\Omega_T^{(i)}}^{(k+\alpha)}.$$

В свою очередь, обозначим

$$|u|_{\Omega_T}^{(k+\alpha)} = \left|u^{(1)}\right|_{\Omega_T^{(1)}}^{(k+\alpha)} + \left|u^{(2)}\right|_{\Omega_T^{(2)}}^{(k+\alpha)}.$$

Также будем использовать пространства

$$C^{1,2+\alpha}(S_T) = \left\{v | v \in C^{0,2+\alpha}(S_T),\ v_t \in C^{0,\alpha}(S_T)\right\}$$

и

$$C^{1,3+\alpha}(S_T) = \left\{v|\, v \in C^{0,3+\alpha}(S_T), v_t \in C^{0,1+\alpha}(S_T)\right\}$$

с нормами

$$\|v\|_{S_T}^{(2+\alpha)} = |v|_{S_T}^{(2+\alpha)} + |v_t|_{S_T}^{(\alpha)}$$

и

$$\|v\|_{S_T}^{(3+\alpha)} = |v|_{S_T}^{(3+\alpha)} + |v_t|_{S_T}^{(1+\alpha)}$$

соответственно.

Из Теоремы 3.0.12 работы [10] непосредственно следует следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{H}_0 \in C^{0,\alpha}(S_T)$, тогда существует единственное классическое решение задачи (2_0), (3) такое, что $u \in C^{1,2+\alpha}(S_T)$.*

Рассматривая задачу вида (2_0), (3) для конечно-разностного отношения $(u(x+\delta,t)-u(x,t))/\delta$ и правой части $(\mathbb{H}_0(x+\delta,t)-\mathbb{H}_0(x,t))/\delta$, можем продифференцировать уравнение (2_0) по x_1 и убедиться в справедливости леммы.

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{H}_0 \in C^{0,1+\alpha}(S_T)$, тогда $u \in C^{1,3+\alpha}(S_T)$.*

Теперь рассмотрим стационарную задачу сопряжения

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{1-2\nu}\nabla \mathrm{div} u^{(i)} + \Delta u^{(i)} = \mathbb{F}^{(i)}, \quad x \in \Omega^{(i)},\ i = 1,2,\\ \sigma_{i2}^{(1)} = \mathbb{G}_i, \quad x \in \Gamma^{(1)},\ i = 1,2, \quad u^{(2)} = 0, \quad x \in \Gamma^{(2)}, \\ [\sigma_{12}] = \phi_1,\ [\sigma_{22}] = \phi_2, \quad x \in S, \quad [u_1] = \psi_1,\ [u_2] = \psi_2, \quad x \in S.\end{gathered} \tag{4}$$

Заметим, что для единственности решения данной задачи достаточно предположить, что $u^{(i)} \in W_2^1(\Omega^{(i)})$, $i = 1,2$. Действительно, однородную задачу можно записать в виде

$$\sum_{j,k,l=1}^{2} \tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ijkl}(x)\tfrac{\partial u_k}{\partial x_l}\right) = 0, \quad x \in \Omega,\ i = 1,2,$$

$$\sum_{k,l=1}^{2} c_{i2kl}\tfrac{\partial u_k}{\partial x_l} = 0, \quad x \in \Gamma^{(1)},\ i = 1,2,$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma^{(2)},$$

здесь $c_{ijkl}(x)$ - кусочно-постоянные компоненты тензора упругости, значения которых зависят от E_1, E_2, ν. Поскольку на части границы решение обращается в нуль, можем применить неравенство Корна и тогда

$$\sum_{i,j=1,2} \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 dx \leq C \sum_{i,j,k,l=1}^{2} \int\limits_{\Omega} c_{ijkl}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx = 0,$$

а значит $u = 0$ п.в. в Ω.

Подробная библиография работ, в которых изучена проблема оценки максимума модуля смещений для различных задач теории упругости, приведена в [11]. К сожалению, не удалось найти результатов, которые можно было бы непосредственно применить к задаче (4). Поэтому ход рассуждений состоит в следующем: используя известную из [12] оценку решения $u^{(i)}$ в соболевском пространстве $W_2^2(\Omega^{(i)})$ $i = 1,2$, применить теорему вложения:

$$|u|_{\Omega^{(i)}}^{(0)} \leq C_i \|u, W_2^2(\Omega^{(i)})\|, \quad i = 1,2. \tag{5}$$

Обозначим через $W_2^2(\Omega)$ прямую сумму пространств $W_2^2(\Omega^{(1)}) + W_2^2(\Omega^{(1)})$. В силу приведенных выше соображений о единственности, можем применить оценку Теоремы 2 работы [12] (см. также [13]):

$$\begin{gathered}\|u, W_2^2(\Omega)\| \leq K \left(\sum_{i=1,2} \|\mathbb{F}^{(i)}, L_2(\Omega^{(i)})\| + \right.\\ \left. + \|\mathbb{G}^{(i)}, W_2^{1/2}(S))\| + \|\psi_i, W_2^{3/2}(S)\| + \|\phi_i, W_2^{1/2}(S)\| \right)\end{gathered} \tag{6}$$

Для дальнейших рассуждений можно огрубить последнюю оценку и записать её в виде

$$\|u, W_2^2(\Omega)\| \le K \sum_{i=1,2} \left(\left|\mathbb{F}^{(i)}\right|^{(0)}_{\Omega^{(i)}} + \left|\mathbb{G}^{(i)}\right|^{(1)}_S + |\psi_i|^{(2)}_S + |\phi_i|^{(1)}_S \right). \tag{7}$$

Используя оценку (7) и вложение (5), применительно к исходной задаче сопряжения (1), для каждого $t \in [0,T]$ и произвольной, достаточно гладкой функции ρ имеем

$$|u(\cdot,t)|^{(0)}_\Omega \le \widetilde{K} \left(\sum_{i=1,2} \left\{ \left|\mathbb{F}^{(i)}(\cdot,t)\right|^{(0)}_{\Omega^{(i)}} + \left|\mathbb{G}^{(i)}(\cdot,t)\right|^{(1)}_S + |\mathbb{H}_i(\cdot,t)|^{(1)}_S \right\} + |\rho(\cdot,t)|^{(3)}_S \right). \tag{8}$$

Отметим также, что непосредственно из уравнения (2) следует неравенство ($t \in [0,T]$)

$$|\rho_t(\cdot,t)|^{(1)}_S \le C(a_0,a,c) \left(|\rho(\cdot,t)|^{(3)}_S + \left|u^{(1)}(\cdot,t)\right|^{(2)}_\Gamma + \left|u^{(2)}(\cdot,t)\right|^{(2)}_\Gamma + |\mathbb{H}_0(\cdot,t)|^{(1)}_S \right). \tag{9}$$

2. Модельные задачи. Априорная оценка модельной задачи сопряжения.

Зададим при помощи бесконечно дифференцируемых функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^N$ разбиение единицы в области Ω, т.е. $\sum\limits_{k=1}^N \zeta_k(x) = 1$ для всех $x \in \Omega$. Обозначим $u^{(i)}_{,k} = (u_1^{(i)}\zeta_k, u_2^{(i)}\zeta_k)$, $\rho_k = \rho\zeta_k$. Умножим выражения (1)-(3) на ζ_k при фиксированном значении параметра k. Используя формулы приведенные в главе I работы [14], получим следующие соотношения

$$\frac{1}{1-2\nu}\nabla \mathrm{div} u^{(i)}_{,k} + \Delta u^{(i)}_{,k} = F^{(i)}_k, \quad x \in \Omega^{(i)}_T,\ i = 1,2, \tag{10}$$

$$\sigma^{(1)}_{i2,k} = f_{i,k},\ i = 1,2, \quad x \in \Sigma^{(1)}_T,\ t > 0,\ i = 1,2, \tag{11}$$

$$u^{(2)}_{,k} = 0, \quad x \in \Sigma^{(2)}_T, \tag{12}$$

$$\begin{gathered} [\sigma_{12,k}] = \phi_{1,k},\ [\sigma_{22}] = \phi_{2,k} - b_0\rho_{x_1x_1,k}, x \in \Gamma_T, \\ [u_{1,k}] = 0,\ [u_{2,k}] = b_1\rho_k \quad x \in \Gamma_T, \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \rho_{k,t} = a\rho_{k,x_1x_1} - a_0\rho_k + \\ +\lambda\left(u^{(1)}_{2,k} - c\left[\tfrac{\sigma_{22,k}}{E}\right]\right) + h_k(x_1,t), \quad x \in \Gamma_T, \\ \rho_k(x_1,0) = 0,\ x \in S, \end{gathered} \tag{14}$$

где

$$F_k^{(i)} = \mathbb{F}^{(i)}\zeta_k + \tfrac{1}{1-2\nu}\left(\nabla(\nabla\zeta_k)\cdot u^{(i)} + (\nabla u^{(i)})\cdot(\nabla\zeta_k) + \nabla\zeta_k\nabla\cdot u\right) +$$

$$+\left((\nabla\cdot(\nabla\zeta_k))u^{(i)} + \nabla\zeta_k\cdot(\nabla u^{(i)}) + (\nabla u^{(i)})^T\cdot(\nabla\zeta_k)\right).$$

$$f_{1,k} = \mathbb{G}_1\zeta_k + \tfrac{E_1}{2(1+\nu)}u^{(1)}_{2,k}\tfrac{\partial\zeta_k}{\partial x_1},\ f_{2,k} = \mathbb{G}_2\zeta_k + \tfrac{E_1\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}u^{(1)}_{1,k}\tfrac{\partial\zeta_k}{\partial x_1},$$

$$\phi_{1,k} = \mathbb{H}_1\zeta_k + \tfrac{E_1}{2(1+\nu)}u^{(1)}_{2,k}\tfrac{\partial\zeta_k}{\partial x_1} - \tfrac{E_2}{2(1+\nu)}u^{(2)}_{2,k}\tfrac{\partial\zeta_k}{\partial x_1}, \tag{15}$$

$$\phi_{2,k} = \mathbb{H}_2\zeta_k + \tfrac{E_1\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}u^{(1)}_{1,k}\tfrac{\partial\zeta_k}{\partial x_1} - \tfrac{E_2\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}u^{(2)}_{1,k}\tfrac{\partial\zeta_k}{\partial x_1} +$$

$$+b_0(2\zeta_{k,x_1}\rho_{x_1,k} + \zeta_{k,x_1x_1}\rho_k),$$

$$h_k = \mathbb{H}_0\zeta_k - a(2\zeta_{k,x_1}\rho_{x_1,k} + \zeta_{k,x_1x_1}\rho_k) + h\zeta_k.$$

В зависимости от расположения носителя ζ_k разобъём множество индексов k на четыре класса: 1) $k\in\mathbb{K}_1$, если носитель ζ_k не имеет общих точек с $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$ и Γ ; 2) $k\in\mathbb{K}_2$, если носитель ζ_k имеет непустое пересечение с $\Sigma^{(1)}$ 3) $k\in\mathbb{K}_3$, если носитель ζ_k имеет непустое пересечение с $\Sigma^{(2)}$; 4) $k\in\mathbb{K}_4$, если носитель ζ_k имеет непустое пересечение с Γ . Соответственно, следует рассмотреть модельные задачи четырёх видов: 1) при $k\in\mathbb{K}_1$ система (10) во всей плоскости, решение которой стремится к нулю на бесконечности; 2) $k\in\mathbb{K}_2$: система (10) в верхней полуплоскости , решение которой стремится к нулю при $x_2\to+\infty$, с краевым условием (11); 3) $k\in\mathbb{K}_3$: система (10) в верхней полуплоскости, решение которой стремится к нулю при $x_2\to+\infty$, с краевым условием (12); 4) $k\in\mathbb{K}_3$: модельная задача сопряжения на плоскости для системы (10), точную формулировку которой дано ниже. В первых трёх случаях будем опираться на результаты, полученные в работе [15].

Введём вспомогательные множества $D^{(1)} = \{x\in R^2 : x_2>0\}$, $D^{(2)} = \{x\in R^2 : x_2<0\}$, $D^{(1)}_T = \{(x,t) : x\in D^{(1)},\ \ t\in(0.T)\}$, $D^{(2)}_T = \{(x,t) : x\in D^{(2)},\ \ t\in(0.T)\}$, $\omega = \{x\in R^2 : x_2=0\}$, $\omega_T = \{(x,t) : x\in\omega,\ \ t\in(0.T)\}$. Итак, в четвертом случае рассматривается задача: найти функции w,p такие, что

$$\tfrac{1}{1-2\nu}\nabla\mathrm{div}v^{(i)} + \Delta v^{(i)} = f^{(i)},\ (x,t)\in D^{(i)}_T,$$

$$[v_1]=0,\quad [v_2]=b_1p$$

$$[\sigma_{12}(v)]=\phi_1,\quad [\sigma_{22}(v)] = -b_0p_{x_1x_1}+\phi_2,\ (x,t)\in\omega_T,$$

$$v\to0,\ \text{при } |x|\to\infty, \tag{16}$$

$$p_t = ap_{x_1x_1} - a_0p + \lambda\left(v_2^{(1)} - c\left[\frac{\sigma_{22}(v)}{E}\right]\right) + g(x_1,t), (x,t) \in \omega_T,$$

$$p(x_1,0) = 0, \qquad x_1 \in R_1.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу сопряжения: найти смещения s такие, что

$$\frac{1}{1-2\nu}\nabla \mathrm{div} s^{(i)} + \Delta s^{(i)} = f^{(i)},\ (x,t) \in D_T^{(i)},$$

$$[s_1] = 0, \quad [s_2] = 0 \tag{17}$$

$$[\sigma_{12}(s)] = \phi_1, \quad [\sigma_{22}(s)] = \phi_2,\ (x,t) \in \omega_T,$$

$$s \to 0,\ \text{при}\ |x| \to \infty.$$

Для вектор-функции $w = v - s$ и p получим следующую задачу

$$\frac{1}{1-2\nu}\nabla \mathrm{div} w^{(i)} + \Delta w^{(i)} = 0,\ (x,t) \in D_T^{(i)},$$

$$[w_1] = 0, \quad [w_2] = b_1 p$$

$$[\sigma_{12}(w)] = 0, \quad [\sigma_{22}(w)] = -b_0 p_{x_1x_1},\ (x,t) \in \omega_T,$$

$$w \to 0,\ \text{при}\ |x| \to \infty, \tag{18}$$

$$p_t = ap_{x_1x_1} - a_0p + \lambda\left(v_2^{(1)} - c\left[\frac{\sigma_{22}(w)}{E}\right]\right) + \psi(x_1,t), (x,t) \in \omega_T,$$

$$p(x_1,0) = 0, \qquad x_1 \in R_1,$$

где $\psi = g - B_\lambda s$, а $B_\lambda s = \lambda(s_2^{(1)} - c\left[\frac{\sigma_{22}(s)}{E}\right])\Big|_{x_2=0}$.

После преобразования Фурье по переменной x_1 задача (18) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{i\xi}{1-2\nu}(i\xi\widetilde{w}_1^{(k)} + \frac{d\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2}) + \frac{d^2\widetilde{w}_1^{(k)}}{dx_2^2} - \xi^2\widetilde{w}_1^{(k)} = 0,$$

$$\frac{1}{1-2\nu}\frac{d}{dx_2}(i\xi\widetilde{w}_1^{(k)} + \frac{d\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2}) + \frac{d^2\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2^2} - \xi^2\widetilde{w}_2^{(k)} = 0,\ k = 1, 2, \tag{19}$$

с граничными условиями

$$\widetilde{w} \to 0,\ \text{при}\ |x| \to \infty, \tag{20}$$

$$[\widetilde{w}_1] = 0, \quad [\widetilde{w}_2] = b_1 \widetilde{p}$$

$$\tfrac{i\xi}{2(1+\nu)} \left[E_k (i\xi \widetilde{w}_2^{(k)} + \tfrac{d\widetilde{w}_1^{(k)}}{dx_2}) \right]_{k=2}^{k=1} = 0, \quad x_2 = 0, \tag{21}$$

$$\tfrac{1}{(1+\nu)} \left[E_k \left(i\xi \widetilde{w}_1^{(k)} + \tfrac{\nu}{1-2\nu} (i\xi \widetilde{w}_1^{(k)} + \tfrac{d\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2}) \right) \right]_{k=2}^{k=1} = b_0 \xi^2 \widetilde{p},$$

$$\widetilde{p}_t = -a\xi^2 \widetilde{p} - a_o \widetilde{p} +$$

$$+\lambda \left(\widetilde{w}_1^{(2)} - \tfrac{c}{1+\nu} \left[i\xi \widetilde{w}_1^{(k)} + \tfrac{\nu}{1-2\nu} (i\xi \widetilde{w}_1^{(k)} + \tfrac{d\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2}) \right]_{k=2}^{k=1} \right) + \widetilde{\psi}, \ x_2 = 0, \tag{22}$$

$$\widetilde{p}(\xi, 0) = 0.$$

Рассмотрим сначала задачу (19)-(21) в предположении, что $\widetilde{p}$ известно, затем подставим полученное представление $\widetilde{w}$ в (22) и, таким образом, найдем $\widetilde{p}$.

Общим решением системы (19) в двух полупространствах, удовлетворяющим условиям (20), являются функции

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_1 &= i\xi \left(-\tfrac{z_1}{|\xi|} - z_2 x_2 + (3 - 4\nu_1) \tfrac{z_2}{|\xi|} \right) e^{-|\xi| x_2}, \\ \widetilde{w}_2 &= (z_1 + z_2 |\xi| x_2)\, e^{-|\xi| x_2}, \qquad x_2 > 0, \\ \widetilde{w}_1 &= i\xi \left(z_3 |\xi| - z_4 x_2 - (3 - 4\nu_1) \tfrac{z_4}{|\xi|} \right) e^{|\xi| x_2}, \\ \widetilde{w}_2 &= (z_3 - z_4 |\xi| x_2)\, e^{|\xi| x_2}, \qquad x_2 < 0, \end{aligned} \tag{23}$$

где z_k $(k = 1, .., 4)$- произвольные постоянные. Подставляя выражения (23) в граничные условия (21) и решая полученную систему, находим:

$$\begin{aligned} z_1 &= \big(E_2 b_1 \{ E_2 (3 - 4\nu) + E_1 ((2 - 2\nu)^2 + (1 - 2\nu)^2) \} - \\ &\quad -2(3 - 4\nu)(1 - \nu^2) b_0 (E_1 + E_2) |\xi| \big)\, \widetilde{p}/Z, \\ z_2 &= (E_2 b_1 - b_0 (1 + \nu) |\xi|)\, ((3 - 4\nu) E_1 + E_2)\, \widetilde{p}/Z, \\ z_3 &= -\big(E_1 b_1 \{ (3 - 4\nu) E_1 + E_2 ((2 - 2\nu)^2 + (1 - 2\nu)^2) + \\ &\quad +2(3 - 4\nu)(1 - \nu^2) b_0 (E_1 + E_2) |\xi| \} \big)\, \widetilde{p}/Z, \\ z_4 &= -(E_1 b_1 + b_0 (1 + \nu) |\xi|)\, ((3 - 4\nu) E_2 + E_1)\, \widetilde{p}/Z, \\ Z &= ((3 - 4\nu) E_2 + E_1)((3 - 4\nu) E_1 + E_2). \end{aligned} \tag{24}$$

Подстановка представлений (23) в уравнение (22), с учетом (24), дает

$$\widetilde{p}_t = -\mu\xi^2\widetilde{p} + \mu_1|\xi|\widetilde{p} + \mu_0\widetilde{p} + \widetilde{\psi}, \tag{30}$$

где

$$\mu = a + \lambda\tfrac{8(1-\nu)(1-\nu^2)}{Z(1+\nu)}cb_0(E_2+E_1),$$

$$\begin{aligned} \mu_1 = \tfrac{\lambda}{Z}\big(&-E_2 b_1 2(3-4\nu)(1-\nu^2)b_0(E_1+E_2)+ \\ &+\tfrac{2c(1-\nu)}{(1+\nu)}\left((E_2-E_1)(E_2+E_1)^2 b_1\right)\Big), \end{aligned} \tag{25}$$

$$\mu_0 = \lambda\tfrac{E_2 b_1}{Z}\{E_2(3-4\nu)+E_1((2-2\nu)^2+(1-2\nu)^2)\} - a_o.$$

Из полученных выражений для μ, μ_1, μ_0 следует, что можно выбрать постоянную $\varkappa$, такую, что

$$|\mu_0| \le \varkappa, \quad \tfrac{1}{\varkappa} \le \mu \le \varkappa, \quad \mu_1 \le \varkappa \text{ для всех } \lambda \in [0,1]. \tag{26}$$

Решение уравнения (22) с нулевыми начальными данными можно записать в виде

$$\widetilde{p}(\xi,t) = \int\limits_0^t \widetilde{Q}(\xi,t-\tau)\widetilde{\psi}(\xi,\tau)d\tau,$$

где $\widetilde{Q}(\xi,t) = exp\left((-\mu\xi^2+\mu_1|\xi|+\mu_0)t\right)$. Рассмотрим отдельно функцию $\widetilde{G}(\xi,t) = exp\left((-\mu\xi^2+\mu_1|\xi|)t\right)$ и соответственно

$$G(x_1,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left((-\mu\xi^2+\mu_1|\xi|)t + i\xi x_1\right)d\xi.$$

Введём потенциал

$$v(x_1,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x_1-y,t-\tau)f(y,\tau)d\tau dy. \tag{27}$$

Получим оценки констант Гельдера производных $v_{x_1x_1}$, v_t. Очевидно, на произвольном конечном интервале из них будут следовать оценки $p_{x_1x_1}$, p_t. Оценим сначала производные $G(x_1,t)$.

Лемма 4. *Имеет место оценка*

$$\left|D_t^l D_{x_1}^k G(x_1,t)(x_1,t)\right| \le C(l,n,\varkappa,T)t^{-\frac{1+2l+k}{2}} exp\left(-C_\varkappa \tfrac{x_1^2}{t}\right). \tag{28}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\mu_1 \le 0$. Как видим

$$D_t^l D_{x_1}^k G(x_1,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-\mu\xi^2 - |\mu_1||\xi|)^l(i\xi)^k \times \\ \times \exp\left((-d\xi^2 + d_1|\xi|)t + i\xi x_1\right)d\xi. \tag{29}$$

Поэтому предварительно оценим выражения вида

$$\Phi_n(x_1,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\xi|^n \exp\left((-d\xi^2 + d_1|\xi|)t + i\xi x_1\right)d\xi, \quad 0 \le m \le n.$$

Докажем, что

$$|\Phi_n(x_1,t)| \le C(l,n,\varkappa,T)t^{-\frac{1+n}{2}} exp\left(-C_\varkappa \frac{x_1^2}{t}\right), \quad t \in (0,T]. \tag{30}$$

Сделаем замену $\xi = \sqrt{\mu t}\eta$ и обозначим $y = \frac{x_1}{\sqrt{\mu t}}$, тогда

$$\Phi_n = (\mu t)^{-\frac{n+1}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\eta|^n \exp(-\eta^2 + iy\eta - \sqrt{t/\mu}|\mu_1||\eta|)d\eta.$$

Замена $\eta = \frac{iy}{2} + u$ и очевидное неравенство $z^n \exp(-z^2) \le c_n \exp(-z^2/2)$ при $z \ge 0$ приводят к цепочке неравенств

$$|\Phi_n| \le (\mu t)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(|u|^n + \frac{|y|^n}{4}\right)\exp(-u^2)du \le$$

$$\le c(n,\varkappa)t^{-\frac{n+1}{2}}\exp\left(-C_\varkappa \frac{y^2}{4}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-u^2/2)du$$

из которых следует (30).

Из представления (29) и оценки (30) следует оценка (28) при $\mu \le 0$.

Пусть теперь $\mu > 0$. Поскольку

$$\exp(\mu_1|\xi|t) = 2ch(\mu_1|\xi|t) - \exp(-\mu_1|\xi|t) = 2ch(\mu_1\xi t) - \exp(-\mu_1|\xi|t),$$

функцию G можно записать в виде

$$G(x_1,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left((-\mu\xi^2 + i\xi x_1\right)ch(\mu_1|\xi|)t)d\xi -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left((-\mu\xi^2 - \mu_1|\xi|)t + i\xi x_1\right)d\xi = \mathcal{G}(x_1,t) - \mathcal{H}(x_1,t),$$

причем функция $\mathcal{H}$ имеет тот же вид, что и G при $\mu \le 0$. Первое же слагаемое можно преобразовать к виду

$$\mathcal{G}(x_1,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu t}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4\mu t} + \frac{\mu_1^2 t}{4\mu}\right) \cos\left(\frac{\mu_1 x_1}{2\mu}\right), \qquad (31)$$

из которого следует оценка вида (28) и для функции $\mathcal{G}$.

Далее оценим функцию $v(x_1,t)$ из (27).

Лемма 4. *Выполнены неравенства*

$$\text{а)} \quad \sup_{0\le t\le T} \langle v_{x_1x_1}(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} \le c(T,\varkappa) \sup_{0\le t\le T} \langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1}, \qquad (32)$$

$$\text{б)} \quad \sup_{0\le t\le T} \langle v_t(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} \le c(T,\varkappa) \sup_{0\le t\le T} \langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1}. \qquad (33)$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (32), как и при получении оценок §2 главы 4 монографии [16], используем представление

$$v_{x_1x_1}(x_1,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{x_1x_1}(x_1-y,t-\tau)\,(f(y,\tau)-f(x_1,\tau))\,d\tau dy.$$

Получим

$$v_{x_1x_1}(x_1,t) - v_{z_1z_1}(z_1,t) =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{|x_1-y|\le 2|x_1-z_1|} G_{x_1x_1}(x_1-y,t-\tau)\,(f(y,\tau)-f(x_1,\tau))\,d\tau dy -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_{|x_1-y|\le 2|x_1-z_1|} G_{z_1z_1}(z_1-y,t-\tau)\,(f(y,\tau)-f(z_1,\tau))\,d\tau dy +$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_{|x_1-y|\ge 2|x_1-z_1|} [G_{x_1x_1}(x_1-y,t-\tau) - G_{z_1z_1}(z_1-y,t-\tau)]\,(f(y,\tau)-f(z_1,\tau))\,d\tau dy +$$

$$+ \int\limits_0^t (f(z_1,\tau)-f(x_1,\tau))\,d\tau \int\limits_{|x_1-y|\ge 2|x_1-z_1|} G_{x_1x_1}(x_1-y,t-\tau) dy = \sum_{i=1}^4 I_4.$$

Поскольку оценки (28) функции G с точностью до множителя совпадают с оценками фундаментального решения уравнения теплопроводности, первые первые три слагаемых можно оценить стандартным образом. Последнее слагаемое запишем в виде:

$$I_4 = \int\limits_0^t (f(z_1,\tau) - f(x_1,\tau))\,[G_{x_1}(2|x_1 - z_1|, t-\tau) - G_{x_1}(-2|x_1 - z_1|, t-\tau)]\,d\tau.$$

Теперь рассмотрим более подробно выражение для G_{x_1}. Докажем, что

$$|G_{x_1}(x_1,t)| \le c(\varkappa,T)\left(\frac{|x_1|}{t^{3/2}} + \frac{1}{t^{1/2}}\right) exp(-c_\varkappa \frac{x_1^2}{t}). \qquad (34)$$

Пусть $\mu_1 > 0$, тогда

$$\mathcal{G}_{x_1}(x_1,t) = -\tfrac{1}{\sqrt{\pi\mu t}}\left[\tfrac{x_1}{2\mu t}\cos\left(\tfrac{\mu_1 x_1}{2\mu}\right) + \tfrac{\mu_1}{2\mu}\sin\left(\tfrac{\mu_1 x_1}{2\mu}\right)\right]\exp\left(-\tfrac{x_1^2}{2\mu t} + \tfrac{\mu_1^2 t}{4\mu}\right)$$

и, значит, для $\mathcal{G}_{x_1}(x_1,t)$ оценка вида (34) выполнена.

Далее при помощи тех же самых преобразований, что были использованы при доказательстве оценки (30), получим выражение

$$\mathcal{H}_{x_1}(x_1,t) = \tfrac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi\exp\left((-\mu\xi^2 - \mu_1|\xi|)t + i\xi x_1\right)d\xi =$$

$$= \tfrac{i}{2\pi}\tfrac{1}{\mu t}\exp\left(-\tfrac{x_1^2}{4\mu t}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(u + \tfrac{ix_1}{2\sqrt{\mu t}}\right)\exp\left(-u^2 - \mu_1\sqrt{\tfrac{t}{\mu}\left(u^2 + \tfrac{x_1^2}{4\mu t}\right)}\right)du,$$

которое можно разбить на два слагаемых с множителями u и $\frac{ix_1}{2\sqrt{\mu t}}$ соответственно. Причём первый интеграл, в силу нечетности подынтегральной функции равен нулю. Отсюда

$$|\mathcal{H}_{x_1}(x_1,t)| \le C(\varkappa)\tfrac{|x_1|}{t^{3/2}}\exp\left(-\tfrac{x_1^2}{4\mu t}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-u^2\right)du.$$

Т.о. оценка (34) при $\mu_1 > 0$ доказана. При $\mu_1 \le 0$ данная оценка, очевидно, следует из оценки для $\mathcal{H}_{x_1}$.

Используя (34) и замену $\sigma = \frac{|x_1 - z_1|}{(t-\tau)^{1/2}}$, получим

$$|I_4| \le c(\varkappa,T)|x_1 - z_1|^\alpha \sup_{0\le t\le T}\langle f(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(\alpha)}\int\limits_0^t\left[\tfrac{|x_1-z_1|}{t^{3/2}}exp(-c_\varkappa\tfrac{|x_1-z_1|^2}{t-\tau}) + \tfrac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\right]d\tau \le$$

$$\le c(\varkappa,T)|x_1 - z_1|^\alpha \sup_{0\le t\le T}\langle f(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(\alpha)}\int\limits_0^{+\infty}exp(-c_\varkappa\sigma^2)d\sigma.$$

Т.о. оценка (32) доказана.

В случае б) имеем

$$v_t(x_1,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G_t(x_1-y,t-\tau)(f(y,\tau)-f(x,\tau))dy. \tag{35}$$

Рассмотрим сначала случай неположительных μ_1. Непосредственно из представления функции G следует, что $G_t(x_1,t)=\mu G_{x_1x_1}(x_1,t)+\mu_1 G^*(x_1,t)$, где

$$G^*(x_1,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\xi|\exp\big((-\mu\xi^2-|\mu_1||\xi|)t+i\xi x_1\big)\,d\xi.$$

Имеем

$$v_t(x_1,t)=\mu\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G_{x_1x_1}(x_1-y,t-\tau)(f(y,\tau)-f(x,\tau))dy+$$

$$+\mu_1\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G^*(x_1-y,t-\tau)(f(y,\tau)-f(x,\tau))dy+f(x_1,t)=$$

$$=v'(x_1,t)+v^*(x_1,t)+f(x_1,t).$$

Первое слагаемое оценено в случае а). Для второго слагаемого получим оценку

$$\sup_{R^1\times[0,T]}|v^*_{x_1}|\le c(T,\varkappa)\sup_{0\le t\le T}\langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1}. \tag{36}$$

Т.к.

$$G^*_{x_1}(x_1,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}i\xi|\xi|\exp\big((-\mu\xi^2-|\mu_1||\xi|)t+i\xi x_1\big)\,d\xi,$$

аналогично оценке (30), можно убедиться в том, что

$$|G^*_{x_1}(x_1,t)|\le c(\varkappa,T)t^{-\frac{3}{2}}exp(-c_\varkappa\frac{x_1^2}{t}). \tag{37}$$

В силу последней оценки

$$|v^*_{x_1}(x_1,t)|=\left|\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G^*_{x_1}(x_1-y,\tau)\left(f(y,\tau)-f(x_1,\tau)\right)dy\right|\le$$

$$\le c(\varkappa,T)\sup_{0\le t\le T}\langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x_1-y|^\alpha(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}exp(-c_\varkappa\tfrac{|x_1-y|^2}{t-\tau})dy.$$

Замена переменной $z = \frac{x_1 - y}{\sqrt{t-\tau}}$ приводит к неравенству

$$|v^*_{x_1}(x_1,t)| \le c(\varkappa, T) \sup_{0\le t\le T} \langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^\alpha \exp(-c_\varkappa z^2) dz,$$

из которого следует (36).

При $\mu_1 > 0$, дифференцируя (31), получим

$$\mathcal{G}_t - \mu \mathcal{G}_{x_1 x_1} = \mu_1 \mathcal{G}^* \equiv \frac{\mu_1}{\sqrt{\pi \mu t}} \left[(\mu_1/4 + \mu_1 \mu)\mathcal{G} - \frac{\mu_1 x_1}{2\mu t^{3/2}} \sin\left(\frac{\mu_1 x_1}{2\mu}\right) \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\mu t}\right)\right].$$

Из данного выражения видим, что для производной также справедлива оценка вида (37). Т.о. оценка (36), а с ней и оценка (33) доказаны.

Обозначим $(0 < \alpha < 1)$

$$\langle u \rangle^{(\alpha)}_{[0,T]} = \sup_{t,\sigma \in [0,T]} \frac{|u(t) - u(\sigma)|}{|t-\sigma|^\alpha}.$$

Следует отметить, что необходимо также доказать, что функция и её производные непрерывны по переменной t.

Лемма 5. *Имеют место неравенства*

$$\begin{aligned} &\sup_{x_1 \in R^1} \langle v_{x_1}(x_1,\cdot)\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{[0,T]} \le C(T,\varkappa) \sup_{0\le t\le T} \langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1}, \\ &\sup_{x_1 \in R^1} \langle v_{x_1 x_1}(x_1,\cdot)\rangle^{(\frac{\alpha}{2})}_{[0,T]} \le C(T,\varkappa) \sup_{0\le t\le T} \langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1}, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} &\sup_{x_1 \in R^1} |v_t(x_1,t) - v_\sigma(x_1,\sigma)| \le \\ &\le C(T,\varkappa) \sup_{0\le t\le T} \langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} |t-\sigma|^{\alpha/2} + \sup_{x_1\in R^1} |f(x_1,t) - f(x_1,\sigma)|. \end{aligned} \tag{39}$$

Доказательство. Оценки (38) следуют из (32) и интерполяционных неравенств (см. [17])

$$\sup_{x_1 \in R^1} \langle v_{x_1}(x_1,\cdot)\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{[0,T]} \le C \left(\sup_{0\le t\le T} \langle v_t(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} + \sup_{0\le t\le T} \langle v_{x_1 x_1}(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} \right),$$

$$\sup_{x_1 \in R^1} \langle v_{x_1 x_1}(x_1,\cdot)\rangle^{(\frac{\alpha}{2})}_{[0,T]} \le C \left(\sup_{0\le t\le T} \langle v_t(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} + \sup_{0\le t\le T} \langle v_{x_1 x_1}(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} \right).$$

Для доказательства оценки (39) используем представление (35). Для определённости считаем, что $0 \le \sigma < t \le T$. Следуя выкладкам §2 главы 4 монографии [16], запишем разность $v_t(x_1,t) - v_\sigma(x_1,\sigma)$ в виде

$$v_t(x_1,t) - v_\sigma(x_1,\sigma) =$$

$$= \int\limits_{2\sigma-t}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_t(x_1-y,t-\tau)\,(f(y,\tau)-f(x_1,\tau))\,dy-$$

$$- \int\limits_{2\sigma-t}^{\sigma} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\sigma(x_1-y,\sigma-\tau)\,(f(y,\tau)-f(x_1,\tau))\,dy+$$

$$+ \int\limits_{0}^{2\sigma-t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [G_t(x_1-y,t-\tau) - G_\sigma(x_1-y,\sigma-\tau)] \times$$

$$\times\,(f(y,\tau)-f(x_1,\tau))\,dy + (f(x_1,t)-f(x_1,\sigma)) = \sum_{i=1}^{4} I_4$$

Причем, следуя Замечанию 1, можем считать, что $f(x_1,t)=0$ при $t \le 0$. Первые три слагаемых оцениваются одинаковым образом на основе оценки (28). Например, для I_1 имеем

$$|I_1| \le c(\varkappa,T)\,\langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} \int\limits_{2\sigma-t}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{|x_1-y|^\alpha}{(t-\tau)^{3/2}} exp(-c_\varkappa \tfrac{|x_1-y|^2}{t-\tau})dy =$$

$$\le c(\varkappa,T)\,\langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} \int\limits_{2\sigma-t}^{t} (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{|x_1-y|^\alpha}{(t-\tau)^{\alpha/2}} exp(-c_\varkappa \tfrac{|x_1-y|^2}{t-\tau}) \tfrac{dy}{(t-\tau)^{1/2}}.$$

Замена $z_1 = \frac{x_1-y}{(t-\tau)^{1/2}}$ в интеграле по y и последующее интегрирование по τ приводят к неравенствам

$$|I_1| \le c(\varkappa,T)\,\langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} \int\limits_{2\sigma-t}^{t} (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\tau \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^\alpha exp(-c_\varkappa z^2) dz \le$$

$$\le c(\varkappa,T)\,\langle f(\cdot,t)\rangle^{(\alpha)}_{R^1} |t-\sigma|^{\alpha/2}.$$

Поскольку

$$v_{x_1}(x_1,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{x_1}(x_1-y,t-\tau) f(y,\tau) =$$

$$= -\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_y(x_1-y,t-\tau) f(y,\tau) dy = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x_1-y,t-\tau) f_y(y,\tau) dy,$$

из оценок (32), (33) следуют неравенства

$$\sup_{0\le t\le T}\langle v(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(3+\alpha)}+\sup_{0\le t\le T}\langle v_t(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(1+\alpha)}\le c(T,\varkappa)\sup_{0\le t\le T}\langle f(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(1+\alpha)}. \tag{40}$$

Остается оценить функцию u из (16). Из результатов работы [12] следует оценка решения задачи (17)

$$\sum_{i=1}^{2}\sup_{0\le t\le T}\left\langle s^{(i)}(\cdot,t)\right\rangle_{D^{(i)}}^{(2+\alpha)}\le C\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\sup_{0\le t\le T}\langle f_i(\cdot,t)\rangle_{D^{(i)}}^{(\alpha)}+\sup_{0\le t\le T}\langle \phi_i(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(1+\alpha)}\right)\right]. \tag{41}$$

Используя теперь оценки (40) и (41) имеем

$$\sup_{0\le t\le T}\langle p(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(3+\alpha)}+\sup_{0\le t\le T}\langle p_t(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(1+\alpha)}\le$$

$$\le c(T,\varkappa)\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\sup_{0\le t\le T}\langle f_i(\cdot,t)\rangle_{D^{(i)}}^{(\alpha)}+\sup_{0\le t\le T}\langle \phi_i(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(1+\alpha)}\right)+\sup_{0\le t\le T}\langle g(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(1+\alpha)}\right]. \tag{42}$$

Рассматривая задачу (18) относительно неизвестной функции w с заданной функцией p, из работы [12] и (42) получим

$$\sum_{i=1}^{2}\sup_{0\le t\le T}\left\langle w^{(i)}(\cdot,t)\right\rangle_{D^{(i)}}^{(2+\alpha)}\le C\sup_{0\le t\le T}\langle p(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(3+\alpha)}\le$$

$$\le c(T,\varkappa)\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\sup_{0\le t\le T}\langle f_i(\cdot,t)\rangle_{D^{(i)}}^{(\alpha)}+\sup_{0\le t\le T}\langle \phi_i(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(1+\alpha)}\right)+\sup_{0\le t\le T}\langle g(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(1+\alpha)}\right]. \tag{43}$$

Суммируя оценки (41)-(43), получим для решения задачи (16) оценку

$$\sum_{i=1}^{2}\sup_{0\le t\le T}\left\langle u^{(i)}(\cdot,t)\right\rangle_{D^{(i)}}^{(2+\alpha)}+\sup_{0\le t\le T}\langle p(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(3+\alpha)}+\sup_{0\le t\le T}\langle p_t(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(1+\alpha)}\le$$

$$\le c(T,\varkappa)\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\sup_{0\le t\le T}\langle f_i(\cdot,t)\rangle_{D^{(i)}}^{(\alpha)}+\sup_{0\le t\le T}\langle \phi_i(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(1+\alpha)}\right)+\sup_{0\le t\le T}\langle g(\cdot,t)\rangle_{R^1}^{(1+\alpha)}\right]. \tag{43}$$

3. Априорная оценка. Теорема существования.

Следуя работе [17] введём обозначения

$$\mathcal{N}_t[u,\rho]=\sup_{0\le\tau\le t}|u(\cdot,\tau)|_{\Omega}^{(2+\alpha)}+\sup_{0\le\tau\le t}|\rho(\cdot,\tau)|_{S}^{(3+\alpha)}+\sup_{0\le\tau\le t}|\rho_\tau(\cdot,\tau)|_{S}^{(1+\alpha)},$$

$$\mathcal{F}_t=\sum_{i=1}^{2}\sup_{0\le\tau\le t}|\mathbb{F}^{(i)}(\cdot,\tau)|_{\Omega^{(i)}}^{(2+\alpha)}+\sum_{i=1}^{2}\sup_{0\le\tau\le t}|\mathbb{G}_i(\cdot,\tau)|_{S}^{(2+\alpha)}+\sum_{i=0}^{2}\sup_{0\le\tau\le t}|\mathbb{H}_i(\cdot,\tau)|_{S}^{(2+\alpha)}.$$

При $k\in\mathbb{K}_i$, $i=1,2,3$ используем оценки, полученные в работе [15], при $k\in\mathbb{K}_4$ неравенство (43). Следуя стандартной схеме (см., например, главу 3 монографии [18]), приходим к оценке

$$\mathcal{N}_t[u,\rho]\le c_1(\varkappa,T)\left(\mathcal{F}_t+\sup_{0\le\tau\le t}|u(\cdot,\tau)|_{\Omega}^{(2)}+\sup_{0\le\tau\le t}|\rho(\cdot,\tau)|_{S}^{(3)}+\sup_{0\le\tau\le t}|\rho_\tau(\cdot,\tau)|_{S}^{(1)}\right).$$

Из неравенства (9) следует, что

$$\mathcal{N}_t[u,\rho]\le c_2(\varkappa,T)\left(\mathcal{F}_t+\sup_{0\le\tau\le t}|u(\cdot,\tau)|_{\Omega}^{(2)}+\sup_{0\le\tau\le t}|\rho(\cdot,\tau)|_{S}^{(3)}\right).$$

Применяя интерполяционные неравенства (2.1) работы [18] к функциям $u_j^{(i)}$, $i,j=1,2$ получим

$$\mathcal{N}_t[u,\rho]\le c_3(\varkappa,T)\left(\mathcal{F}_t+\sup_{0\le\tau\le t}|u(\cdot,\tau)|_{\Omega^{(i)}}^{(0)}+\sup_{0\le\tau\le t}|\rho(\cdot,\tau)|_{S}^{(3)}\right).$$

Учитывая оценку (8), имеем

$$\mathcal{N}_t[u,\rho]\le c_4(\varkappa,T)\left(\mathcal{F}_t+\sup_{0\le\tau\le t}|\rho(\cdot,\tau)|_{S}^{(3)}\right).$$

Далее, после применения интерполяционных неравенств к функции ρ, заключаем, что

$$\mathcal{N}_t[u,\rho]\le c_5(\varkappa,T)\left(\mathcal{F}_t+\sup_{0\le\tau\le t}|\rho(\cdot,\tau)|_{S}^{(0)}\right)\le c_5(\varkappa,T)\left(\mathcal{F}_t+\int\limits_0^t\mathcal{N}_\tau[u,\rho]d\tau\right).$$

Как и в работе [17], применяя к последнему неравенству лемму Гроноулла приходим к оценке

$$\mathcal{N}_t[u,\rho]\le \mathrm{C}(\varkappa,T)\mathcal{F}_t. \tag{46}$$

Из оценки (46) и теоремы о продолжении по параметру (см. §14.2 работы [19]) вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения H1), H2, тогда существует единственное решение задачи (1)-(3):* $\rho\in C^{(1,3+\alpha)}(S_T)$, $u^{(i)}\in C^{(0,2+\alpha)}(\Omega_T^{(i)})$, $i=1,2$.

В заключение автор выражает глубокую признательность Б.В.Базалию и А.И.Марковскому за полезное обсуждение данной тематики.

1. *Angheluta L., Jettestuen E., Mathiesen J., Renard F., Jamtveit B.* Stress-driven phase transformation and the roughening of solid-solid interfaces // Prysical review letters – 2008. – Vol.100(9), 096105.- p.1-4.
2. *Angheluta L., Jettestuen E., Mathiesen J.* The thermodynamics and roughening of solid-solid interfaces // Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics - 2009, vol. 79(1), N.3.- P.7-25.
3. *Базалий Б.В.* Задача Стефана для уравнения Лапласа с учетом кривизны свободной границы // Укр. матем. журнал.- 1997. - Т. 49, №10. - С. 1299-1315.
4. *Васильева Н.В.* Об одной краевой задаче со старшими производными в граничном условии, возникающей при исследовани задачи Hele-Shaw с нерегулярной границей // Труды ИПММ.- 2002. - Т. 7. - С. 33-44.
5. *Mucha P.* On the weak solutions to the Stefan problem with Gibbs-Thompson correction // Differential and integral equations. - V. 20, - 2007. P. 769-792.
6. *Bum Ja Jin* Estimates of the solutions of the elastic system in a moving domain with free upper interface // Nonlinear Analysis. – 2002. – v. 51. – P. 1009–1029.
7. *Esher J., Simonett G.* Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension // Adv. Differential Eqs. – 1997. – V.2. - No. 4. – P. 619-642.
8. *Cheng X., Hong J., Yi F.* Existence, uniqueness of classical solutions of the Mullins-Sekerka problem // Commun. in Partial Differential Equations, v.21, 1996, pp.1705-1727.
9. *Гусаков, Дегтярев С.П.* Существование гладкого решения в одной задаче фильтрации // Укр. матем. журнал.- 1989. - 41, No.9. - С.1192-1198.
10. *Lunardi A.* How to use interpolation in PDE's // Summer School on Harmonic Analysis and PDE's - Helsinki. - August 2003.- 34p.
11. *Maremonti P., Russo R.* On the existence and uniqueness of clasical solutions to the stationaty Navier-Stokes equations and to the traction problem of linear elastostatics // Quad. Mat. - 1997.- V.1.- P.171-251.
12. *Шефтель З.Г.* Общая теория граничных задач для эллиптических систем с разрывными коэффициентами // Укр. матем. журнал.- 1966. - 18, No.3. - С.132-136.
13. *Житарашу Н.В.* Априорные оценки и разрешимость общих краевых задач для общих эллиптических систем с разрывными коэффициентами // Доклады АН СССР .- 1965. - Т.165, No.1. - С.24-27.
14. *Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З* Введение в механику поверхностных явлений в дформируемых твёрдых телах.- Киев.- Наукова думка.- 1985.- 200с.
15. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary condition, II // Comm. Pure Apll. Math. - 1964. - V.17. - P.35-92.
16. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
17. *Солонников В.А.* Оценки решения второй начально-краевой задачи для системы Стокса в пространствах функций с непрерывными по Гельдеру производными по пространственым переменным // Записки научных семинаров ПОМИ. - 1999.- Т.259. - С.254-279.
18. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва: Наука, 1973. – 576 с.
19. *Треногин В.А.* Функциональный анализ.– Москва: Наука, 1980. – 496 с.

ИПММ НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74,
83114, Донецк, Украина
krasnoschok@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 23.07.2009