©2008. **Д.Н. Непийпа**

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ БОЛЬШОЙ НОРМЫ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В работе исследованы большие собственные функции нелинейной периодической краевой задачи для собственных значений, находящихся в окрестности двумерного собственного значения линеаризованной задачи.

Ключевые слова: бифуркации, собственные функции, квазилинейное отображение
MSC (2000): 35P30, 47J10

Введение.

Теории бифуркаций собственных функций нелинейных краевых задач посвящена обширная литература (классические результаты теории изложены в [5], [6], [9]). В зависимости от типа краевой задачи применяются топологические, аналитические, вариационные, конусные и другие методы. Как правило исследуются бифуркации нулевого решения соответствующего дифференциального уравнения, то есть отыскиваются малые собственные функции нелинейной краевой задачи.

В последние десятилетия после работ Е. Ландесмана, А. Лазера, С. Фучика и др. (см. [7]), в которых описаны большие решения неоднородных нелинейных краевых задач, возрос интерес к большим собственным функциям этих задач. Важные результаты в этом направлении получены А. М. Красносельским [4].

Важнейшей характеристикой возможной точки бифуркации является размерность ядра соответствующей линеаризованной задачи. Согласно с классической теоремой М. А. Красносельского [5], в случае ядра нечетной кратности мы имеем явление бифуркации. Для ядер четной кратности в общем случае это не так. При этом выяснилось, что исследование вырождений высокой размерности практически неосуществимо. Поэтому особую роль играют задачи с двукратным вырождением. Оказывается (см. [2]), что они достаточно богаты решениями. Не более, чем двукратное вырождение имеют периодические краевые задачи. Указанные причины стимулируют к ним постоянный интерес.

В настоящей работе, опираясь на результаты работы [3], доказано существование собственных функций большой нормы нелинейной периодической краевой задачи так называемого квазилинейного вида.

Автор благодарен Я. М. Дымарскому за постоянную помощь в работе над статьей.

1. Формулировка основной теоремы.

Обозначим, как обычно, $L_2(0, 2\pi) = L_2$ – пространство вещественных суммируемых с квадратом функций, $W_2^i(0, 2\pi) = W_2^i$ – пространство Соболева 2π-периодических функций $y \in L_2$, которые имеют обобщенные производные из L_2 до порядка i включительно, $C^i[0, 2\pi] = C^i$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ – пространство i раз непрерывно дифференцируемых функций. Пусть $||.||$ – это норма в пространстве L_2, $||.||_{i,2}$ – норма в пространстве W_2^i, $||.||_i$ – норма в пространстве C^i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим краевую периодическую задачу на собственные функции $y \in W_2^2$ большой нормы и собственные значения $\lambda \in \mathbb{R}$, которая имеет вид

$$\begin{gathered} -y'' + p(y, y', ||y||, x)y + \mathrm{b}(x) = \lambda\, y, \\ y(0) - y(2\pi) = y'(0) - y'(2\pi), \end{gathered} \tag{1}$$

где функция $\mathrm{b}(x) \in C^0$, а функция $p(y, y', ||y||, x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. функция p является ограниченной и непрерывной на $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$;

2. существуют такие (малые) ε, $\mu > 0$ и постоянная $K > 0$, что для любой функции $y \in W_2^2$ имеет место равномерно на $[0, 2\pi]$ оценка

$$|p(y(x), y'(x), ||y||, x)| < K||y||^{-\mu} \text{ при } ||y|| > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Пару (λ, y), удовлетворяющую задаче (1), назовем *решением.*

Определение 1. [5]. Число λ^0 называется *асимптотической точкой бифуркации* для задачи (1), если для любого $\varepsilon > 0$ данная задача имеет решение (λ, y), которое удовлетворяет неравенствам $|\lambda - \lambda^0| < \varepsilon$, $||y||_{2,2} > \varepsilon^{-1}$.

Ниже краевая задача (1) будет переформулирована в операторном виде (12) с вполне непрерывным оператором. Точки бифуркации операторной задачи присутствуют (см. [2]) только среди характеристических значений линеаризованного в нуле оператора. Ниже мы убедимся, что эти характеристические значения совпадают с собственными значениями краевой задачи

$$-y'' = \lambda y, \qquad y(0) - y(2\pi) = y'(0) - y'(2\pi). \tag{3}$$

Собственные значения задачи (3) равны: $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n} = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Собственному значению λ_{2n-1} отвечает пара ортонормированных в L_2 собственных функций $y_{2n-1} = (1/\sqrt{\pi} \cos nx)$, $y_{2n} = (1/\sqrt{\pi} \sin nx)$. Зафиксируем номер n. Двумерное подпространство, образованное собственными функциями y_{2n-1}, y_{2n}, обозначим через H_0, а ортогональное дополнение к нему в L_2 обозначим через H_1. Обозначим через $S_\rho = \{y : ||y|| = \rho\} \subset L_2$ сферу. Радиус ρ впоследствии будем брать большим. Ищем решения (λ, y) задачи (1) такие, что $y \in S_\rho \cap W_2^2$, λ – в окрестности λ_{2n-1}. Каждая собственная функция может быть представлена единственным образом в виде:

$$\begin{gathered} y = r(y_{2n-1} \cos\varphi + y_{2n} \sin\varphi) + \nu, \\ \text{где } r > 0,\ \nu \in H_1 \text{ в } L_2,\ r^2 + ||\nu||^2 = \rho^2 \end{gathered} \tag{4}$$

Обозначим:

$$\begin{gathered} a(y) = \int\limits_0^{2\pi} p(y, y', ||y||, x) y_{2n-1}^2 dx, \\ b(y) = \int\limits_0^{2\pi} p(y, y', ||y||, x) y_{2n-1} y_{2n} dx, \\ c(y) = \int\limits_0^{2\pi} p(y, y', ||y||, x) y_{2n}^2 dx, \\ d(y) = \frac{1}{2}(a(y) - c(y)). \end{gathered} \tag{5}$$

В дальнейшем пределы интегрирования от 0 до 2π будем опускать. Пусть $\varphi \in [0, 2\pi)$ – параметризация единичной окружности S_1. Функционалы $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$, $d(y)$, опираясь на (4), обозначим соответственно через $a(r, \varphi, \nu)$, $b(r, \varphi, \nu)$, $c(r, \varphi, \nu)$, $d(r, \varphi, \nu)$. Пусть для некоторых r, ν и для всех φ выполняется неравенство: $d^2(\varphi, r, \nu) + b^2(\varphi, r, \nu) > 0$. Тогда формулы

$$\cos\alpha = d/\sqrt{d^2 + b^2}, \quad \sin\alpha = b/\sqrt{d^2 + b^2}$$

определяют отображение $\alpha = f(\varphi; r, \nu)$ окружности S_1 в окружность S_2, где (r, ν) выступают в качестве параметров. Через $\deg(f)$ обозначим ориентированную степень этого отображения (см. [1]).

Сформулируем основную теорему настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{b}(x) \in H_1$ *и существуют такие* ε *и* $\mu > 0$, *что равномерно для всех* $||y|| = \rho \in [\varepsilon^{-1}, +\infty)$ *выполняется условие: для любого* $N > 0$ *найдется такое положительное число* κ, *что имеет место неравенство*

$$\sqrt{d^2(y) + \mathrm{b}^2(y)} > \kappa ||y||^{-\mu}, \text{ при } ||\nu|| < N ||y||^{1-\mu}. \tag{6}$$

Пусть $\deg(f(\varphi, r, 0) \neq 2$ *для некоторого* $r \in (\varepsilon^{-1}, +\infty)$. *Тогда* $\exists\, \delta > 0$, *для которого справедливы следующие утверждения.*

1^0. *Если* (λ, y) *- произвольное решение задачи (1), которое удовлетворяет неравенствам* $||y|| > \delta^{-1}$, $|\lambda - \lambda_{2n-1}| < \delta$, *то собственная функция* $y \in C^2$, *и* $\exists\, N, \Lambda > 0$, *что* $||\nu|| < N||y||^{1-\mu}$, $|\lambda - n^2| < \Lambda ||y||^{-\mu}$.

2^0. *Число* $\lambda_{2n-1} = n^2$ *является асимптотической точкой бифуркации для задачи (1), причем для каждого* $\rho > \delta^{-1}$ *задача (1), (4) имеет по крайней мере два решения* (λ, y), *у которых собственные функции имеют* $2n$ *нулей.*

Прежде чем перейти к доказательству, обсудим требования предъявляемые к нелинейному слагаемому задачи (1). Во-первых, нелинейность содержит неизвестную функцию y в виде сомножителя. Это обстоятельство позволяет трактовать в дальнейшем собственную функцию нелинейной задачи как таковую для некоторой ассоциированной линейной задачи. (Отсюда термин “квазилинейная” задача, который будет уточнен ниже.) Оценка (2) означает, что нелинейность на бесконечности является исчезающей. Наконец, оценка (6) означает (см. [3]), что ассоциированная линейная задача имеет только простые собственные значения в окрестности точки бифуркации.

Доказательству теоремы посвящены пп. 2 и 3.

2. Операторное уравнение.

Доказательство теоремы осуществляется в пять этапов. На первом этапе мы осуществляем замену, которая преобразует задачу о больших собственных функциях в задачу о малых собственных функциях (последняя исследована весьма подробно в

[5], [6]). На втором этапе мы переписываем задачу в квазилинейном виде. На третьем этапе аппроксимируем краевую задачу и для полученных уравнений доказываем априорные оценки решений равномерно по всем аппроксимациям. Затем переходим к операторному уравнению в L_2, также имеющему квазилинейный вид. Далее применяем к этому уравнению топологическую конструкцию, описанную в работе [2]. И, наконец, переходим к пределу в аппроксимационном уравнении.

Сделаем следующую замену $y = y_1/||y_1||^2$. Если $||y|| > 1/\varepsilon$, тогда $||y_1|| < \varepsilon$. Представление (4) для y_1 приобретает вид

$$y_1 = \frac{y}{||y||^2} = \frac{r}{\rho^2}(y_{2n-1}\cos\varphi + y_{2n}\sin\varphi) + \frac{\nu}{\rho^2}$$

Обозначим $\nu_1 := \nu/\rho^2 \in H^{\perp}$ и, в силу (6), получаем:

$$||\nu_1|| = \frac{||\nu||}{\rho^2} < \frac{N\rho^{1-\mu}}{\rho^2} = N\rho_1^{1+\mu}, \tag{7}$$

где $\rho_1 = ||y_1||$. Требования, налагаемые на функцию p в окрестности бесконечности, превращаются в требования к функции $\tilde{p} := p\,(y/||y||^2, y'/||y||^2, 1/||y||, x)$ в окрестности нуля:

1. функция $\tilde{p}$ является ограниченной и непрерывной на $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$;
2. $|\tilde{p}(y, y', ||y||, x)| < K|y|^{\mu}$, при $||y|| < \varepsilon$ равномерно на $[0, 2\pi]$.

Перейдем от задачи (1) к эквивалентной задаче на собственные функции малой нормы, в обозначениях которой по-прежнему будем использовать y, а не y_1, ν, а не ν_1, ρ, а не ρ_1. Итак, рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} -y'' + \tilde{p}\,(y, y', ||y||, x)\,y + \mathrm{b}(x)||y||^2 = \lambda y, \\ y(0) - y(2\pi) = y'(0) - y'(2\pi). \end{gathered} \tag{8}$$

Условие (6) примет вид:

$$\forall N > 0\ \exists \kappa > 0, \text{ что } \sqrt{\tilde{d}^2(y) + \tilde{b}^2(y)} > \kappa||y||^{\mu}$$

$$, \text{ при} ||y|| < \varepsilon,\ \ ||\nu|| < N||y||^{1+\mu}.$$

В силу требований, налагаемых на функцию $\tilde{p}$, линеаризация задачи (8) имеет вид (3). Поэтому точки бифуркации ищем по-прежнему только среди собственных значений задачи (3).

Перепишем задачу (8) в квазилинейном виде. Обозначим через $\mathfrak{L}(W_2^2, L_2)$ пространство линейных симметрических операторов, действующих из W_2^2 в L_2, а через $\mathfrak{L}(L_2, L_2)$ пространство самосопряженных операторов, действующих из L_2 в L_2. Определим нелинейное отображение $B : W_2^2/0 \to \mathfrak{L}(W_2^2, L_2)$ следующим образом: для любого $v \in W_2^2$

$$B(y)v = \int yvdx\, \mathrm{b}(x) + \int \mathrm{b}vdx\, y(x) - \left(\int y^2 dx\right)^{-1} \int yvdx \int \mathrm{b}ydx\, y(x).$$

Тогда $B(y)y = \mathrm{b}(x)||y||^2$. Компактность оператора $B(y)$ вытекает из того, что при каждом y значения оператора $B(y)$ есть линейные комбинации двух функций b и y.

Докажем симметричность оператора $B(y)$: для любых $u, v \in W_2^2$

$$(B(y)v, u) = \int yvdx \int \mathrm{b}udx + \int \mathrm{b}vdx \int yudx -$$

$$- \left(\int y^2 dx\right)^{-1} \int yvdx \int \mathrm{b}ydx \int yudx = (v, B(y)u).$$

Найдем оценку для нормы линейного оператора $B(y)$:

$$||B(y)||^2_{W_2^2 \to L_2} = \sup_{||v||_{W_2^2}=1} ||B(y)v||^2 = \sup_{||v||_{W_2^2}=1} \int \Bigg(\int yvdx b +$$

$$+ \int \mathrm{b}vdx y - \left(\int y^2 dx\right)^{-1} \int yvdx \int \mathrm{b}ydx \Bigg)^2 dx =$$

$$= \sup_{||v||_{W_2^2}=1} \Bigg(\left(\int yvdx\right) 2 \int \mathrm{b}^2 dx + \left(\int \mathrm{b}vdx\right)^2 \int y^2 dx -$$

$$- \left(\int yvdx\right)^2 \left(\int \mathrm{b}ydx\right)^2 \left(\int y^2 dx\right)^{-1} \Bigg) < 3||y||^2||\mathrm{b}||^2,$$

$$||B(y)||_{W_2^2 \to L_2} < \sqrt{3}||\mathrm{b}||||y||. \tag{9}$$

Определим нелинейное отображение

$$\tilde{P} : W_2^2 \to \mathfrak{L}(W_2^2, L_2), \qquad \forall v \quad \tilde{P}(y)v := \tilde{p}(y, y', ||y||, x) \cdot v.$$

Норма линейного оператора $\tilde{P}(y)$ допускает оценку:

$$||\tilde{P}(y)||_{W_2^2\to L_2} = \\ = \sup_{||v||_{(2,2)}=1} \sqrt{\int \tilde{p}^2(y)v^2dx} < \sup_{x\in[0,2\pi]} |\tilde{p}(y)| < K||y||^{\mu}. \tag{10}$$

Пусть $C = ||\tilde{P}(y)||_{W_2^2\to L_2} + ||B(y)||_{W_2^2\to L_2}$. Очевидно, следующая задача эквивалентна задаче (8):

$$\begin{aligned} &-y'' + \tilde{P}(y)y + B(y)y + 2Cy = (\lambda + 2C)y, \\ &y(0) - y(2\pi) = y'(0) - y'(2\pi). \end{aligned} \tag{11}$$

Полученная задача имеет *квазилинейный* (см. [10]) вид

$$A(y)y = (\lambda + 2C)y, \tag{12}$$

где $A : W_2^2 \to \mathfrak{L}(W_2^2, L_2)$. То есть отображение A ставит в соответстие функции y линейный симметрический оператор $A(y) := (-d^2/dx^2 + \tilde{P}(y) + B(y) + 2C)$. Покажем, что линейный оператор $A(y) : W_2^2 \to L_2$ является положительным. В самом деле, для произвольного вектора $v \neq 0$ имеем

$$\begin{gathered} \int \left[\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{P}(y) + B(y) + 2C\right)v\right] vdx = \int (v')^2dx + \\ + \int p(y, y', ||y||, x)v^2dx + \int (B(y)v)vdx + 2\int Cv^2dx \geqslant \\ \geqslant \int (v')^2dx + 2\int Cv^2dx - ||\tilde{P}(y)||_{W_2^2\to L_2} - \\ - ||B(y)||_{W_2^2\to L_2} \geqslant \int (v')^2dx + \int Cv^2dx > 0 \end{gathered}$$

Таким образом, оператор $A(y)$ является непрерывным изоморфизмом пространства W_2^2 на пространство L_2.

Операторное уравнение (12) связано с парой пространств: W_2^2 и L_2. Нам удобно работать в одном пространстве L_2. Чтобы прийти к операторному уравнению в L_2, мы аппроксимируем задачу (12) следующим образом. Обозначим через π_k ортопроектор в L_2 на первые $2k + 1$ собственных функций задачи (3). Аппроксимация задачи (12) имеет вид

$$A(\pi_k y)y = (\lambda + 2C)y, \tag{13}$$

где $A(\pi_k y) := -d^2/dx^2 + \tilde{p}(\pi_k y, (\pi_k y)', ||y||, x) + B(\pi_k y) + 2C := A_k(y)$. Оператор A_k по указанной формуле может быть доопределен с W_2^2 на L_2. Не изменяя обозначения, считаем, что $A_k : L_2 \to \mathfrak{L}(W_2^2, L_2)$. Для удобства обозначений, по определению положим, что уравнение (13) совпадает с уравнением (12), если $k = \infty$.

Чтобы свести поиски малых в W_2^2 собственных функций к поиску малых в L_2 собственных векторов задачи (13), мы покажем, что нормы малых собственных функций в W_2^2, L_2 и C^2 эквивалентны.

Лемма 1. *Любые собственные функции $y \in W_2^2$ задачи (13) являются классическими (то есть $y \in C^2$) для всех $1 \leqslant k \leqslant \infty$.*

Доказательство. Из вложения $W_2^2 \subset C^1$, свойств функции $\tilde{p}$ и непосредственно задачи (13) получим, что $y'' \in C^0$. А это и означает, что $y \in C^2$. □

Лемма 2. *Равномерно для всех $1 \leqslant k \leqslant \infty$ и для всех решений (λ, y) задачи (13), близких к $(n^2, 0)$ в $\mathbb{R} \times L_2$, существует такая постоянная C_1, что $||y||_0 \leqslant C_1 ||y||$.*

Доказательство. Умножим скалярно левую и правую части тождества (13) на y, тогда получим:

$$-\int y''\, y\, dx + \int \tilde{p}(\pi_k y, (\pi_k y)', ||y||, x) y^2\, dx + \\ + \int (B(\pi_k y) y) y\, dx = \lambda \int y^2\, dx .$$

После преобразований придем к следующему неравенству:

$$||y'||^2 = \int (\lambda y^2 - \tilde{p}(\pi_k y, (\pi_k y)', ||y||, x) y^2) dx - \\ - \int (B(\pi_k y) y) y dx \leqslant G||y||^2 + \sqrt{3}||\mathrm{b}||\,||y||^3 \leqslant C_1^2 ||y||^2,$$

где $G = \max\limits_x |\lambda - \tilde{p}(y, y', ||y||, x)|$. С другой стороны известно, что $||y||_0 \leqslant \sqrt{2\pi}||y'||$, что доказывает лемму. □

Лемма 3. *Равномерно для всех $1 \leqslant k \leqslant \infty$ и для всех решений (λ, y) задачи (13), близких к $(n^2, 0)$ в $\mathbb{R} \times L_2$, существует такая постоянная C_2, что верна следующая оценка:* $\sup\limits_x |y''| < C_2 ||y||$.

Доказательство. Следует из лемм 1 и 2. □

Замечание 1. Для всех достаточно малых собственных функций задачи (13), имеющих фиксированную осцилляцию, мы получили эквивалентность норм C^2 и L_2.

Теперь мы можем перейти к абстрактному уравнению на собственные функции малой нормы из пространства L_2.

Оператор $A_k(y)$ для любого малого y в L_2 имеет ограниченный обратный $A_k^{-1}(y) : L_2 \to W_2^2$. Его суперпозиция $im \cdot A_k^{-1}(y)$ с компактным оператором вложения $im : W_2^2 \to L_2$ является компактным линейным оператором. Будем обозначать этот оператор через $A_k^c(y) := im \cdot A_k^{-1}(y)$.

Итак, мы получили аппроксимирующее операторное уравнение

$$(\lambda + 2C)A_k^c(y)y = y,\ 1 \leqslant k < \infty \tag{14}$$

в пространстве L_2. Каждый собственный вектор y этого уравнения, в силу наших рассуждений, является элементом пространства W_2^2.

Переобозначим $\lambda + 2C$ снова как λ. Окончательно аппроксимирующее абстрактное уравнение примет вид:

$$\begin{gathered}\lambda A_k^c(y)y = y, \quad \lambda \in (\lambda_{2n-1} + 2C - \varepsilon, \lambda_{2n-1} + 2C + \varepsilon), \\ ||y|| = \varepsilon,\ 1 \leqslant k < \infty.\end{gathered} \tag{15}$$

Отметим, что для решений аппроксимирующей задачи (15) равномерно по k справедливы априорные оценки лемм 1-3. Также обратим внимание, что уравнение (15) имеет квазилинейный вид, то есть при фиксированном y^* под знаком оператора A_k^c уравнение $\lambda A_k^c(y^*)y = y$ является линейным по $y \in L_2$. Для применения топологической конструкции работы [2] нам потребуется

Лемма 4. *Отображение $A_k^c : L_2 \to \mathfrak{L}(L_2, L_2)$ является вполне непрерывным.*

Доказательство. Проектирование π_k является компактным отображением. Отображение A_k^c – это суперпозиция π_k и нескольких непрерывных отображений. Последнее утверждение (см. [5]) доказывает лемму. □

3. Доказательство разрешимости операторного уравнения.

Выделим в квазилинейном операторе A_k^c постоянную (линейную) составляющую и собственно квазилинейную составляющую. Пусть $\tilde{A}_k^c(y) = A_k^c(y) - \mathbf{A}$, где $\mathbf{A} = im\,(-d^2/dx^2 + 2C)^{-1} \in \mathfrak{L}(L_2, L_2)$. Отображение $\tilde{A}_k^c$ – вполне непрерывно ввиду леммы 4. Квазилинейная задача (15) может быть переписана в виде:

$$\lambda(\mathbf{A} + \tilde{A}_k^c(y))y = y,\ y \neq 0,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \tilde{A}_k^c(0) = 0 \in \mathfrak{L}(L_2, L_2). \tag{16}$$

Отметим, что $\tilde{A}_k^c(y)y = o(y)$. Пару (λ, y), удовлетворяющую (16) по-прежнему будем называть решением. По построению, все $\lambda > 0$. Определим номер и кратность решения задачи (16).

Определение 2. [10] Решение (λ^0, y^0) задачи (16) называется простым (двукратным), если таким является λ^0 как характеристическое значение линейной задачи:

$$\lambda\, A_k^c(y^0)y = \; y; \tag{17}$$

Припишем паре (λ^0, y^0) те номер и кратность, которыми обладает λ^0, как собственное значение задачи (17).

Определение 2 без изменений переносится на все квазилинейные задачи с номерами от (12) до (15).

Отметим, что характеристическое число λ_{2n-1} оператора $\mathbf{A}$ (и только оно) выступает в качестве возможной точки бифуркации уравнения (16) (см. [5]). Обозначим (сравните с (5))

$$a_k(y) = (\tilde{A}_k^c(y)y_{2n-1}, y_{2n-1}), \quad b_k(y) = (\tilde{A}_k^c(y)y_{2n-1}, y_{2n}),$$
$$c_k(y) = (\tilde{A}_k^c(y)y_{2n}, y_{2n}), \qquad d_k(y) = \frac{1}{2}(a_k(y) - c_k(y)).$$

Аналогичным образом, с помощью разложения (4), определяются функции $a_k(\varphi; , r, \nu)$, $b_k(\varphi; , r, \nu)$, $c_k(\varphi; , r, \nu)$, $d_k(\varphi; , r, \nu)$. Если $b_k^2(\varphi; r, \nu) + d_k^2(\varphi; r, \nu) > 0$, то формулы

$$\cos\alpha = \frac{d_k(\varphi; r, \nu)}{(d_k^2(\varphi; r, \nu) + b_k^2(\varphi; r, \nu))^{1/2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{b_k(\varphi; r, \nu)}{(d_k^2(\varphi; r, \nu) + b_k^2(\varphi; r, \nu))^{1/2}}$$

определяют отображение $f_k : S_1 \to S_2$ окружности S_1 в окружность S_2, параметризованную углом α. Переменные r и ν в отображении f_k мы понимаем как параметры. Для доказательства разрешимости полученного операторного уравнения (14) воспользуемся утверждением работы [2], которое относится к отображению A_k^c в случае выполнения для него леммы 4.

Пусть существуют такие положительные постоянные ε и μ, для которых выполняются следующие оценки:

1. существует такое положительное число $\tilde{K}$, что

   $$||\tilde{A}_k^c(y)|| < \tilde{K}||y||^\mu \tag{18}$$

   как только $||y|| < \varepsilon$;

2. для любого $N > 0$ найдется такое положительное число $\tilde{\kappa}$, что
$$\sqrt{d_k^2(y) + b_k^2(y)} > \tilde{\kappa}||y||^{\mu} \tag{19}$$
как только $||y|| < \varepsilon$, $||\nu|| < N||y||^{1+\mu}$.

Пусть степень
$$\deg(f_k(\varphi, r, 0)) \neq 2 \tag{20}$$
для некоторого $r \in (0, \varepsilon)$.

Тогда существует такое малое $\delta > 0$, для которого справедливы следующие утверждения.

1^0. Если (λ, y) — произвольное решение задачи (15), которое удовлетворяет неравенству $|\lambda - \lambda_{2n-1}| + ||y|| < \delta$, то существуют такие постоянные N и $\tilde{\Lambda}$, для которых
$$||\nu|| < N||y||^{1+\mu}, \quad |\lambda - \lambda_{2n-1}| < \tilde{\Lambda}||y||^{\mu}.$$

2^0. Все решения задачи (15), для которых выполнено неравенство $|\lambda - \lambda_{2n-1}| + ||y|| < \delta$, являются простыми.

3^0. Степень $\deg(f_k(\varphi; r, 0))$ не зависит от выбора параметра $r \in (0, \delta)$.

4^0. Число λ_{2n-1} является точкой бифуркации для уравнения (15), причем для каждого $\rho < \delta$ задача (15) имеет по крайней мере одно решение (λ, y) с номером $2n-1$ и одно решение с номером $2n$, у которых $||y|| = \rho$.

Убедимся, что все условия предложения 1. в условиях теоремы 1. выполнены.

1. Докажем (18). Для этого воспользуемся неравенствами (9) и (10). Обозначим $T(y) = (-d^2/dx^2 + 2C)^{-1}\left(\tilde{P}(\pi_k y) + B(\pi_k y)\right)$. Нетрудно проверить, что $||T(y)||_{L_2 \to L_2} < 1$, если y достаточно ма-

ло. Итак, имеем

$$||\tilde{A}_k^c(y)|| =$$

$$= \left\| \left(\frac{-d^2}{dx^2} + 2C + \tilde{P}(\pi_k y) + B(\pi_k y) \right)^{-1} - \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2C) \right)^{-1} \right\| =$$

$$= \left\| \left[\left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2C + \tilde{P}(\pi_k y) + B(\pi_k y) \right)^{-1} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2C \right) - \mathbb{I} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2C \right)^{-1} \right\| = || \left[(\mathbb{I} + T(y))^{-1} - \mathbb{I} \right] \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2C \right)^{-1} || =$$

$$= || \left(-T(y) + T^2(y) - T^3(y) + \ldots \right) \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2C \right)^{-1} || \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2C \right)^{-1} \right\| \frac{||T(y)||}{1 - ||T(y)||} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left\| \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2C \right)^{-1} \right\| \cdot ||\tilde{P}(\pi_k y) + B(\pi_k y)|| < \tilde{K} ||y||^{\mu},$$

где $\tilde{K}$ – некоторая постоянная. Мы получили оценку (18).

2. Докажем (19). Эта оценка получается из (6) условия теоремы 1.

Найдем формулы для определения функций b_k и d_k:

$$b_k = (\tilde{A}_k^c(y) y_{2n-1}, y_{2n}) =$$

$$= \frac{1}{n^2 + 2C} \left(-(T(y) y_{2n-1}, y_{2n}) + (T^2(y) y_{2n-1}, y_{2n}) - \ldots \right);$$

$$d_k = \frac{a_k - c_k}{2} = \frac{(\tilde{A}_k^c(y) y_{2n-1}, y_{2n-1}) - (\tilde{A}_k^c(y) y_{2n}, y_{2n})}{2} =$$

$$= \frac{1}{2(n^2 + 2C)} \left(-(T(y) y_{2n-1}, y_{2n-1}) + (T(y) y_{2n}, y_{2n}) + \right.$$

$$\left. + (T^2(y) y_{2n-1}, y_{2n-1}) - (T^2(y) y_{2n}, y_{2n}) - \ldots \right).$$

Следовательно,

$$b_k^2 + d_k^2 = \tfrac{1}{(k^2+2C)^2} \sum_{i,j=1}^{\infty} (-1)^{i+j} \left((T^i(y)y_{2n-1}, y_{2n})\times\right.$$

$$\times(T^j(y)y_{2n-1}, y_{2n}) + 1/4[(T^i(y)y_{2n-1}, y_{2n-1})(T^j(y)y_{2n-1}, y_{2n-1})+$$

$$+(T^i(y)y_{2n}, y_{2n}) \cdot (T^j(y)y_{2n}, y_{2n}) - (T^i(y)y_{2n-1}, y_{2n-1})\times$$

$$\times(T^j(y)y_{2n}, y_{2n})]) = \tfrac{1}{(n^2+2C)^2} \left(\tfrac{1}{(n^2+2C)^2}(b^2+d^2)+\right.$$

$$\sum_{i,j=1,\ i\cdot j\geqslant 2}^{\infty} ((T^i(y)y_{2n-1}, y_{2n})(T^j(y)y_{2n-1}, y_{2n})+$$

$$+1/4[T^i(y)y_{2n-1}, y_{2n-1})(T^j(y)y_{2n-1}, y_{2n-1}) + +(T^i(y)y_{2n}, y_{2n})\times$$

$$\left.\times(T^j(y)y_{2n}, y_{2n}) - (T^i(y)y_{2n-1}, y_{2n-1}) \cdot (T^j(y)y_{2n}, y_{2n})])\right) \geqslant$$

$$\geqslant \tfrac{\kappa}{(n^2+2C)^2}||y||^{2\mu} + \sum_{i,j=1,\ i\cdot j\geqslant 2}^{\infty} \tfrac{7}{4}||T(y)||^{i+j} = \tfrac{7}{4}\sum_{i=2}^{\infty} i||T(y)||^{i+1} =$$

$$= \tfrac{7}{4}||T(y)||^2 \sum_{i=2}^{\infty} i||T(y)||^{i-1} \geqslant \tfrac{7}{4}D||T(y)||^2 \geqslant \tilde{\kappa}^2||y||^{2\mu}.$$

В силу доказанного выше, из того, что $b(y)$ отличается от $b_k(y)$ и $d(y)$ отличается от $d_k(y)$ на слагаемые более высокого порядка малости, степень

$$\deg(f(\varphi, r, 0)) = \deg(f_k(\varphi, r, 0)) \neq 2.$$

Итак, для произвольного $k \in \mathbb{N}$ предложение 1 справедливо. Отметим, что предложение 1 относится одновременно к уравнению (15) и равносильному ему при $k < \infty$ уравнению (13). Для доказательства теоремы 1 осуществим предельный переход в уравнении (13) при $k \to \infty$.

Пусть $(\lambda^{(k)}, y^{(k)})$ – произвольное решение с номером $2n-1$ уравнения (15) для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность решений $(\lambda^{(1)}, y^{(1)})$, $(\lambda^{(2)}, y^{(2)})$, $\ldots$. Поскольку собственные функции $y_k \in W_2^2$ и равномерно ограничены в W_2^2 (см. замечание после леммы 3), а собственные значения локализованы в окрестности $\lambda_{2n-1} = n^2$, то существует подпоследовательность решений (для которой мы оставляем прежние обозначения), сходящаяся в пространстве $\mathbb{R} \times W_2^1$ при $k \to \infty : (\lambda^{(k)}, y^{(k)}) \to (\lambda^*, y^*)$. Покажем, что пара (λ^*, y^*) является решением уравнения (13) при $k = \infty$. Уравнение (13) для любого $1 \leqslant k \leqslant \infty$ равносильно уравнению

$$
\begin{gathered}
y - \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 2C\right)^{-1} (-\tilde{p}(\pi_k y, (\pi_k y)', ||y||, x)y- \\
-B(\pi_k y)y + \lambda y + 2Cy) = 0,
\end{gathered}
\tag{21}
$$

где пара $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times W_2^2$, а оператор $\left(-d^2/dx^2 + 2C\right)^{-1}$ определен на пространстве L_2. Последнее уравнение рассмотрим на пространстве W_2^1. Покажем, что левая часть уравнения (21) обращается в ноль $0 \in W_2^1$ на паре $(\lambda^*, y^*) \in \mathbb{R} \times W_2^1$.

Справедлива цепочка неравенств:

$$
\begin{gathered}
\Big|\Big| y^* - \left(-\tfrac{d^2}{dx^2} + 2C\right)^{-1} (-\tilde{p}(y^*, (y^*)', ||y^*||, x)y^*- \\
-B(y^*)y^* + \lambda^* y^* + 2Cy^*)\Big|\Big|_{1,2} = \\
= \Big|\Big|(y^* - y^{(k)}) - \left(-\tfrac{d^2}{dx^2} + 2C\right)^{-1} (\tilde{p}(\pi_k y^{(k)}, (\pi_k y^{(k)})', ||y^{(k)}||, x)y^{(k)}- \\
-\tilde{p}(y^*, (y^*)', ||y^*||, x)y^* + B(y^{(k)})y^{(k)} - B(y^*)y^* + \lambda^* y^*- \\
-\lambda^{(k)}y^{(k)} + 2Cy^* - 2Cy^{(k)})\Big|\Big|_{1,2} \leqslant ||y^* - y^{(k)}||_{1,2} + \\
+||(-d^2/dx^2 + 2C)^{-1}||_{L_2 \to W_2^1} (||\tilde{p}(\pi_k y^{(k)}, (\pi_k y^{(k)})', ||y^{(k)}||, x)y^{(k)}- \\
\tilde{-}p(y^*, (y^*)', ||y^*||, x)y^*|| + ||B(y^{(k)})y^{(k)} - B(y^*)y^*|| + \\
+||(\lambda^* + 2C)y^* - (\lambda^{(k)} + 2C)y^{(k)}||_{1,2}).
\end{gathered}
\tag{22}
$$

В силу определения функции y^*, первое и последнее слагаемые в (22) стремятся к нулю при $k \to \infty$. Далее заметим, что для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\pi_l y^{(k)}$ сходится к $y^{(k)}$ при $l \to \infty$ в пространстве W_2^1 (см. [8]). Поэтому последовательность $\pi_k y^{(k)} \to y^*$ при $k \to \infty$ также в пространстве W_2^1. Теперь, из непрерывности по y оператора суперпозиции $\tilde{p}$

[5] и непрерывности отображения B (при фиксированной норме $||y|| = \text{const} = \rho$) следует, что остальные слагаемые также стремятся к нулю при $k \to \infty$. Последнее означает, что пара (λ^*, y^*) является решением уравнения (21) для $k = \infty$ из пространства $\mathbb{R} \times W_2^1$.

Поскольку оператор $(-d^2/dx^2 + 2C)^{-1}$ действует из L_2 в W_2^2, то из (21) следует, что $y^* \in W_2^2$. Итак, мы получили решение уравнения (13) из класса $\mathbb{R} \times W_2^2$. Лемма 1 гарантирует, что собственная функция $y^* \in C^2$, а пара (λ^*, y^*) является решением задачи (8).

Решение (λ^*, y^*) является простым с номером $2n - 1$ в силу неравенства (6). Аналогичным образом доказывается существование хотя бы одного простого решения с номером $2n$. Эти решения различны, поскольку имеют разные номера. Однако количество нулей полученных собственных функций одинаково и равно $2n$. При возвращении от малых собственных функций к большим (то есть к решению неоднородной задачи (1)) понятие номера собственной функции исчезает. Но количество нулей остается неизменным.

Теорема 1 полностью доказана.

4. Пример.

Рассмотрим квазилинейную задачу:

$$\begin{gathered} -y'' + \cos(mx + ||y||)\sin\left(\tfrac{|y|}{||y||^2}\right) y + b(x) = \lambda y, \\ y(0) - y(2\pi) = y'(0) - y'(2\pi) = 0, \end{gathered} \tag{23}$$

где $m \in \mathbb{N}$ – фиксированный параметр. В этом случае

$$p(y, y', ||y||, x) = \cos(mx + ||y||)\sin\left(\frac{|y|}{||y||^2}\right) \text{ при } y(x) \not\equiv 0.$$

При $\mu = 1$ неравенство (2) имеет место. Выясним, будет ли являться точкой бифуркации собственное значение $\lambda_1 = 1$. Найдем значения функционалов $b(\varphi, r, 0)$ и $d(\varphi, r, 0)$.

Для нечетных m функции $d(\varphi, r, 0) \equiv b(\varphi, r, 0) \equiv 0$ и, следовательно, условия теоремы 1 не выполняются. Для четных m

$$b(\varphi, r, \nu) = \frac{1}{r\pi^{3/2}} \sin \frac{(m-1)\pi}{2} \left(C_1 \sin(m\varphi + \rho) \cos 2\varphi - \right.$$

$$\left. - C_2 \cos(m\varphi + \rho) \sin 2\varphi\right) + O_1\left(\frac{||\nu||}{\rho^2}\right),$$

$$d(\varphi, r, \nu) = -\frac{1}{r\pi^{3/2}} \sin \frac{(m-1)\pi}{2} \left(C_2 \cos(m\varphi + \rho) \cos 2\varphi + \right.$$

$$\left. + C_1 \sin(m\varphi + \rho) \sin 2\varphi\right) + O_2\left(\frac{||\nu||}{\rho^2}\right),$$

где

$$\rho^2 = r^2 + ||\nu||^2, \ |O_i(||\nu||/\rho^2)| < \mathrm{const}\frac{||\nu||}{\rho^2}, \ i = 1, 2,$$

$$C_1 = \frac{8m+6}{(m^2-1)(m^2-9)}, \ C_2 = \frac{2m^2+6}{(m^2-1)(m^2-9)}.$$

При условиях $||y|| > \delta^{-1}$, $||\nu|| < N$ получаем оценку снизу (6), где постоянная κ зависит от C_1, C_2, δ, N. Следовательно, отображение f_k определено. Производная этого отображения равна:

$$\frac{d}{d\varphi} f_k(\varphi, r, 0) = 2 - \frac{(2m^2+6)(8m+6)m}{(2m^2+6)^2 \cos^2(m\varphi+\rho) + (8m+6)^2 \sin^2(m\varphi+\rho)}$$

Приращение $f_k(2\pi, r, 0) - f_k(0, r, 0) = (2-m)2\pi$, а степень отображения $\deg(f_\rho) = 2 - m \neq 2$ для четных натуральных m. Таким образом, точка $\lambda_1 = 1$ – это асимптотическая точка бифуркации и при каждом достаточно большом ρ задача (23), (4) имеет по крайней мере два решения, собственные функции которых имеют на полуинтервале $[0, 2\pi)$ в точности два нуля.

1. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука, 1986.
2. *Дымарский Я.М.* О типичных бифуркациях в одном классе операторных уравнений// Докл. РАН. - 1994. - 338, №4 - С. 446-449.
3. *Димарський Я.М.* Про малі періодичні власні функції. Серія: фізико-математичні науки// Вісник Київського університету - 2002 -№1. - С. 33-42.
4. *Красносельский А. М.* О числе неограниченных ветвей решений в окрестности асимптотической точки бифуркации// Функц. анал. прил. - 2005. - 39, №3 - С. 194-206.
5. *Красносельский М. А.* Геометрические методы нелинейного анализа. "Наука", М., 1975.

6. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – Москва: ГИТТЛ, 1956.
7. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1998, 300 с.
8. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. Главная редакция физико-математической литературы, Изд-во "Наука", 1973.
9. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. Сб. под редакцией *Келлер Дж., Антман С.* — М.: Мир, 1974. — 254 с.
10. *Dymarsky Ya. M.* Intersection number and eigenvectors of quasilinear Hilbert-Schmidt operators // Математ. физика, анализ, геометрия – 2002. - 9, №4. – С. 604-621.

Луганский национальный
педагогический университет
имени Тараса Шевченко
nepiypa@yandex.ru

Получено 28.02.2007