Нелинейные граничные задачи **18**, 107-115 (2008)

©2008. **М.І. Матійчук, А.О.Данилюк**

ПРО ПАРАБОЛІЧНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ З ВАГОВИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Лінійні та квазілінійні крайові задачі для рівняння параболічного типу у різних функціональних просторах вивчались багатьма авторами, зокрема у працях [1-6].

У даній роботі досліджується коректність загальної параболічної крайової задачі з особливостями у коефіцієнтах рівнянь і з ваговими крайовими умовами.

Ключові слова: параболічне рівняння, вагові крайові умови, інтегро-диференціальне рівняння, функція Гріна
MSC (2000): 35K35

1. Постановка задачі. Основний результат.

У області $Q^+ = (0,T) \times \Omega \times E_1^+$ розглянемо задачу з ваговими крайовими умовами

$$L_{t,x}(D)u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k|+2j \le 2b} A_{kj}(t,x) D_{x'}^k B_{x_n}^j u = f(t,x), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega^+ = \Omega \times E_1^+ \tag{2}$$

$$f_\nu \mathcal{B}_i u|_{x_n=0} = \lim_{x_n \to 0} f_\nu(x_n) \sum_{|k|+2j \le r_i} b_{kj}^{(i)}(t,x') D_{x'}^k B_{x_n}^j u = g_i(t,x') \tag{3}$$

$$(r_i \le 2b-1, \quad i = \overline{1,bN}),$$

де $\Omega \subseteq E_{n-1}$, $f_\nu(x_n) = x_n^{2\nu}, \nu > 0, f_0(x_n) = (ln(1/x_n))^{1}, f_\nu(x_n) = 1$, якщо $\nu < 0$, $x_n > 0$,

$$\mathcal{B}_{x_n} = D_{x_n}^2 + \frac{2\nu+1}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Означення 1. *Простором* $C_{a,B,f_\nu}^{(m+\alpha)}(Q^+)$ *називаеться клас функції* $u(t,x)$*, що мають в області* Q^+ *похідні* $D_x^k B_{x_n}^j u(t,x)$ *до порядку* $|k|+2j \le m$ *і для яких скінченна норма*

$$|u|_{m+\alpha}^{a,f_\nu} = |u|_m^{a,f_\nu} + [u]_{m+\alpha}^{a,f_\nu}, \quad (0 < \alpha < 1, \quad a > 0), \tag{4}$$

де

$$|u|_m^{a,f_\nu} = \sum_{|k|+2j \le m} \sup_{Q^+} \left\{ |D_{x'}^k B_{x_n}^j u(t,x)| e^{a x_n^q} x_n^{k_n} f_\nu(x_n) \right\},$$

$$[u]^{a,f_\nu}_{m+\alpha} = \sum_{|k|+2j=m} \sup_{Q^+} \left\{ \frac{|\Delta_x D^k_x B^j_{x_n} u(t,x)|}{|\Delta x|^\alpha} e^{a\tilde{x}^q_n} \tilde{x}^{k_n+\alpha}_n f_\nu(\tilde{x}_n) \right\},$$

$$\tilde{x}_n = \min\{x_n, |x_n+\Delta x_n|\}.$$

Для задачі (1)-(3) доведено такі твердження.

Теорема 1. (про коректність) $\underline{\overline{I}}$. *Нехай: 1) крайова задача* B *- параболічна і виконується умова узгодження*

$$f_\nu(x_n)\mathcal{B}_i(t,x',D_{x'},B_{x_n})\varphi|_{t=0} = g_i(0,x'), \quad x' \in \Omega;$$

2) коефіцієнти $A_{kj}(t,x)$ *парні по* x_n *і* $A_{k0}(t,x) \equiv A_{k0}(t,x')$, *причому* $A_{k0} \in \in C^\alpha(Q')$ *при* $|k| = 2b$, $A_{kj} \in C^{(3)}_{a,x_n}(Q^+) \bigcup C^{(\alpha)}_{t,x}(Q^+)$, $D^s_{x_n} A_{kj}(t,x',0) = 0$, $s = 1,2,3$ *і при* $|k|+2j = 2b$, *а при* $|k|+2j < 2b$ $D_{x_n} A_{kj} \in C^\alpha_{a,x'}(Q^+)$, $f \in C^{1+\alpha}_{a,f_\nu}(Q^+)$, $\varphi \in C^{2b+1+\alpha}_{a,f_\nu}(\Omega^+)$, $b^{(i)}_{kj}, g_i \in C^{2b-r_i+\alpha}(Q')$. *Тоді існує розв'язок задачі (1) - (3), який належить класу* $C^{(2b+\alpha)}_{a_0,f_\nu}(Q^+)$ *і справджується нерівність*

$$|u|^{a_0,f_\nu}_{2b+\alpha} \leq C \left(|\varphi|^{a,f_\nu}_{2b+1+\alpha} + |f|^{a,f_\nu}_{1+\alpha} + \sum_{i=1}^{bN} |g_i|_{2b-r_i+\alpha} \right) \tag{5}$$

$$(0 < a_0 < a)$$

$\overline{\underline{II}}$. *Якщо для* A_{kj}, f *виконані умови* $\underline{\overline{I}}$, *але* $\varphi \in C^{1+\alpha}_a(\Omega^+)$, $b^{(i)}_{kj}, g_i \in \in C^{(2b-r_i-1+\alpha)}(Q')$ *при* $r_i < 2b-1$, *то*

$$|f_\nu(x_n) x^{k_n}_n D^k_x B^j_{x_n} u(t,x)| \leq C_{kj} \Phi_{kj}(t,\rho(x',S)) e^{-a_0|x_n|^q} \times$$

$$\times (|\varphi|^a_{1+\alpha} + |f|^{a,f_\nu}_{1+\alpha} + \sum_{j=1}^{bN} |g_i|_{2b-r_i-1+\alpha}), \tag{6}$$

де $\Phi_{kj}(t,\rho) = T^{\frac{|k|+2j}{2b}}, |k|+2j < 2b-1; Q_{kj}(t,p) = t^{-\frac{2b-1}{2b}} ln(1/\rho)$, $|k|+2j = 2b-1, Q_{kj}(t,\rho) = t^{-\frac{2b-1}{2b}}(t^{-1/2b}+\rho^1), |k|+2j = 2b.$

2. Задача Коші для інтегро-диференціального рівняння.

Для доведення теореми спочатку побудуємо розв'язок задачі Коші (1), (2), звівши її за допомогою перетворення Пуассона і Соніна [4] до інтегро-диференціального рівняння. Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді

$$u_1(t,x) = \varphi(x) + P_{\nu v} = \varphi + x_n^{-2\nu} \int\limits_1^\infty (h^2-1)^{-\nu-1/2} v(t,x',x_n h)dh. \quad (7)$$

Тоді з рівняння (1), згідно з властивостями (9.24) і (11.7),(11.8) оператора P_ν з монографії [4], для функції v отримаємо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(t,x) D_{x'}^k D_{x_n}^{2j} v + S_{\nu x_n} \tilde{f}(t,x) +$$

$$+ \sum_{|k|+2j\le 2b} \int\limits_{x_n}^\infty a_{kj}^{(\nu)}(t,x,\xi_n) D_{x'}^k D_{\xi_n}^{2j} v(t,x',\xi_n) d\xi_n, \quad (8)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad (9)$$

де позначимо

$$\tilde{f} \equiv f - L_{t,x}(D)\varphi = f - \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(t,x) D_{x'}^k B_{x_n}^j \varphi,$$

$$a_{kj}^{(\nu)}(t,x,\xi_n) \equiv$$

$$\equiv C_\nu \int_0^1 s^{\nu-1/2}(1-s)^{-\nu-1/2} \tfrac{\partial}{\partial x_n} A_{kj}(t,x',\sqrt{(1-s)x_n^2 + s\xi_n^2}) ds,$$

$$S_\nu f(x_n) = C_{nu} x_n \int_{x_n}^\infty (h^2 - x_n^2)^{\nu-1/2} f(h) dh, \nu \in (0, 1/2). \quad (10)$$

При виконанні умов теореми система параболічних рівнянь

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{|k|+2j\le 2b} A_{kj}(t,x) D_{x'}^k D_{x_n}^{2j} v - \sum_{\substack{|k|+2j\le 2b,\\ j\ge 1}} \frac{\partial}{\partial x_n} A_{kj} D_{x'}^k D_{x_n}^{2j-1} v, \quad (11)$$

має фундаментальну матрицю $Z(t,\tau,x,\xi)$, з допомогою якої системі (11) поставимо у відповідність систему інтегральних рівнянь

$$D_{x'}^m D_{x_n}^p v(t,x) = \mathcal{F}_{mp}(t,x) + \sum_{|k|+2j\le 2b, j<2b} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n^+} K_{kj}^{(mp)}(t,\tau,x,\xi,\xi_n) \times$$

$$\times D^k_{y'} D^j_{\xi_n} v(\tau, y', \xi_n) dy' d\xi_n. \tag{12}$$

Тут позначимо: $\mathcal{F}_{mp}(t,x) = D^m_{x'} D^p_{x_n} \mathcal{F}(t,x)$, $\mathcal{F}(t,x) =$
$= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n^+} Z(t,\tau,x,\xi) S_{\nu\xi_n} f(\tau,\xi) d\xi$,

$$K^{(mp)}_{kj}(t,\tau,x,y',\xi_n) = \int\limits_0^{\xi_n} \tilde{K}^{(mp)}_{kj}(t,\tau,x,y,\xi_n) dy_n,$$

а $K^{(mp)}_{kj}$ має вигляд

$$\tilde{K}^{(mp)}_{kj} \equiv \begin{cases} D^m_{x'} D^p_{x_n} Z a^{(\nu)}_{kj}(\tau,y,\xi_n), \ |k|+2j<2b, \quad |m|+p<2b, \\ -D^m_{x'} D^p_{x_n} Z \dfrac{\partial}{\partial\xi_n} a^{(\nu)}_{kj}(\tau,y,\xi_n), \ |k|+2j=2b, j \geq 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |m|+p<2b, \\ \bar{D}^{2b}_{x'} G[a^{(\nu)}_{kj}(\tau,y,\xi_n) - a^{(\nu)}_{kj}(\tau,x',y_n,\xi_n)], \ |k|+2j<2b, \\ \bar{D}^{2b-1}_{x'} G \dfrac{\partial}{\partial\xi_n} a^{(\nu)}_{kj}(\tau,x',y_n,\xi_n)], \ |m|+p=2b, \\ \bar{D}^{2b}_{x'} G[\dfrac{\partial}{\partial\xi_n} a^{(\nu)}_{kj}(\tau,y,\xi_n) - \dfrac{\partial}{\partial\xi_n} a^{(\nu)}_{kj}(\tau,x',y_n,\xi_n)], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |k|+2j=2b, j \geq 1, \\ \bar{D}^{2b-1}_{x'} G \dfrac{\partial}{\partial\xi_n} a^{(\nu)}_{kj}(\tau,x',y_n,\xi_n) + D^{2b}_x W a^{(\nu)}_{kj}(\tau,y,\xi_n). \end{cases}$$

За умов теореми на коефіцієнти рівнянь (1) і оцінок матриці Z, для функції $K^{(mp)}_{kj}$ установлюємо нерівність

$$|K^{(mp)}_{kj}(t,\tau,x,y',\xi_n)| \leq C_0 (t-\tau)^{-(n-1+|m|+p-\alpha_{mp})/2b} (1+\xi_n)^{-2\nu-1} \times$$
$$\times e^{-C\rho(t,\tau,x',' y) - a(t-\tau) x_n^q}, (|m|+p \leq 2b) \tag{13}$$

де $\alpha_{mp} = 0$, якщо $|m|+p<2b$ і $\alpha_{mp} = \alpha$ при $|m| \neq p = 2b$.

Ця нерівність для ядер системи (12) гарантує можливість побудови резольвенти $(R^{(mp)}_{kj})$ і зображення розв'язку інтегральних рівнянь за формулою

$$\underset{(|m|+p) \leq 2b, p<2b}{D^m_{x'} D^p_{x_n}} v(t,x) = \mathcal{F}_{mp}(t,x) +$$
$$\sum_{|k|+2j \leq 2b, j<2b} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n^+} R^{(mp)}_{kj}(t,\tau,x,y) \mathcal{F}_{kj}(\tau,y) dy. \tag{14}$$

Щоб знайти похідні $D_{x_n}^{2b}v(t,x)$, треба $D_{x'}^{m}D_{x_n}^{p}v, p < 2b$, із (14) підставити у формулу (12) і застосувати оператор $D_{x_n}^{2b}$ до правої частини, виконавши інтегрування частинами. На основі зображення (14) і умов що $\varphi \in C_{a,f_\nu}^{2b+1+\alpha}(E_n^+)$, $f \in C_{a,f_\nu}^{1+\alpha}(\Pi^+)$ встановлюється що $P_\nu v \in C_{a_0,f_\nu}^{(2b+\alpha)}(\Pi^+)$ та нерівність

$$|P_\nu v|_{2b+\alpha}^{a_0,f_\nu} \leq C\left(|\varphi|_{2b+1+\alpha}^{a,f_\nu} + |f|_{1+\alpha}^{a,f_\nu}\right).$$

Отже, приходимо до оцінки (5), а якщо $\varphi \in C_a^{1+\alpha}(\Omega^+)$, то $u_1 = P_{\nu x_n}v$ і для v отримаємо оцінку (6) з $g_1 \equiv 0$.

3. Крайова задача.

Розв'язок крайової задачі (1)-(3) відшукуємо у вигляді $u = u_1 + u_2$, де u_2 розв'язок крайової задачі

$$L_{t,x}(D)u_2 = 0, \quad u_2|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega^+$$

$$f_\nu(x_n)\mathcal{B}_i u_2|_{x_n=0} = g_i - f_\nu(x_n)\mathcal{B}_i u_1|_{x_n=0} \equiv \tilde{g}_i(t,x'), (i = \overline{1,bN}). \quad (15)$$

Для визначення u_2 розглянемо відповідну модельну сингулярну задачу

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(\tau,\xi)D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}u_2, \quad \xi \in \Omega^+, \\ u_2|_{t=0} = 0, &\quad f_\nu(x_n)\mathcal{B}_i^{(0)}(\tau,\xi',D_{x'},B_{x_n})u_2|_{x_n=0} = \tilde{g}_i. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Якщо $G_i(t,x;\tau,\xi)$ - ядра Пуассона регулярної задачі

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \sum_{|k|+2j=2b} A_{kj}(\tau,\xi)D_{x'}^{k}D_{x_n}^{2j}u_2, \ \mathcal{B}_i^{(0)}(\tau,\xi',D_{x'},D_{x_n}^2)u_2|_{x_n=0} = g_i,$$

то $G_{i\nu}(t,x;\tau,\xi') = P_{\nu x_n}G_i(t,x;\tau,\xi')$ - ядра Пуассона задачі (16). Нехай $I_{x'}^{(\alpha_i)}$, $D_{x'}^{\alpha_i}$ - оператори дробового інтегрування і диференціювання, які відповідають оператору $\Lambda(D) = \dfrac{\partial}{\partial t} + (-1)^b\Delta_{x'}^b, x_n^{'} \in E_{n-1}$.

Для подальших міркувань розглянемо функції

$$G_{i\nu}^{(\alpha_i)}(t,x;\tau,\xi) \equiv P_{\nu x_n}I_{x'}^{\alpha_i}G_i(t,x;\tau,\xi) = \frac{x_n^{-2\nu}}{\Gamma(\alpha_i)}\int\limits_0^t \frac{d\beta}{(t-\beta)^{1-\alpha_i}}\times$$

$$\times \int\limits_{E_{n-1}} G_0(t-\beta, x'y') \int\limits_1^\infty (h^2-1)^{-\nu-1/2} G_i(\beta, y', x_n h_n; \tau, \xi) dh dy',$$

$$D^{\alpha_i}_{x'} f(t,x) = \Lambda(D) I^{(1-\alpha_i)}_{x'} f(t,x), \quad \alpha_i \in (0,1) \tag{17}$$

За допомогою теореми 9.1 з [4], для функції $G^{(\alpha_i)}_{i\nu}$ отримуємо оцінки

$$|D^k_x B^j_{x_n} G^{(\alpha_i)}_{i\nu}(t,x;\tau,\xi)| \le C_{kj} t^{-(n-1+\varepsilon_i+|k'|+2j)/2b} e^{-C\rho(t,x)} x_n^{-2\nu-k_n}. \tag{18}$$

$$(\varepsilon_i = 2b - r_i - 2b\alpha_i, \quad x \in E_n^+)$$

Тепер розглянемо потенціали

$$W_i(t,\tau,x,\xi') =$$

$$= \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_{E_n^+} Z(t,\beta,x,y) L_{\beta,y}(D) G^{(\alpha_i)}_{i\nu}(\beta-\tau, y-\xi'; \tau, \xi') y_n^{2\nu+1} dy,$$

$$V_i(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \mathcal{E}_i(t,\tau,x,\xi') \mu_i(\tau,\xi') d\xi', \tag{19}$$

де $\mathcal{E}_i(t,\tau,x,\xi) \equiv G_{i\nu}(t-\tau, x-\xi'; \tau, \xi') - W_i(t,\tau,x,\xi')$. Оскільки $G^{(\alpha_i)}_{i\nu}$ - ядра Пуассона (16), то

$$L_{t,x}(D) G^{(\alpha_i)}_{i\nu} = \sum_{|k|+2j=2b} [A_{kj}(\tau,\xi) - A_{kj}(t,x)] D^k_{x'} B^j_{x_n} G^{(\alpha_i)}_{i\nu} -$$

$$- \sum_{|k|+2j<2b} A_{kj}(t,x) D^k_{x'} B^j_{x_n} G^{(\alpha_i)}_{i\nu}.$$

Використовуючи умову Гельдера для коефіцієнтів і оцінки (18), знаходимо

$$\begin{aligned} &|L_{t,x}(D) G^{(\alpha_i)}_{i\nu}| \le \\ &\quad \le C(t-\tau)^{-(n-1+\varepsilon_i+2b-\alpha)/2b} e^{-C\rho(t,\tau,x,\xi')} x_n^{-2\nu}, \\ &|\Delta_{x'} L_{t,x}(D) G^{(\alpha_i)}_{i\nu}| \le \\ &\quad \le C|\Delta x|^\alpha (t-\tau)^{-(n-1+\varepsilon_i+2b)/2b} e^{-C\rho(t,\tau,x,\xi')} x_n^{-2\nu} \end{aligned} \tag{20}$$

при $|\Delta x^{'}|, (t-\tau)^{1/2b}$.

Отже, для $|k|+2j<2b$ і $2\nu<\alpha$ маємо

$$\begin{gathered}|D^k_{x^{'}} B^j_{x_n} W_i(t,\tau,x,\xi')| \leq \\ \leq C_{kj}(t-\tau)^{-(n-1-\alpha+\varepsilon_i+|k|+2j+2\nu)/2b} e^{-C_1\rho(t,\tau,x,\xi')}.\end{gathered} \tag{21}$$

Цю нерівність за допомогою оцінки (20) приросту щільності $L_{t,x}(D)G^{\alpha_i}_{i\nu}$ можна аналогічно довести і для старших похідних $D^k_{x'}B^j_{x_n}W_i$ $(|k|+2j=2b)$ та встановити існування $\dfrac{\partial W_i}{\partial t}$.

Таким чином, функція $\mathcal{E}_i(t,\tau,x,\xi')$ допускає застосування оператора $L_{t,x}(D)$ до V_i і $L(D)V_i=0$, $V_i|_{t=0}=0$, $x_n>0$.

Застосуємо до $V_i(t,x)$ крайовий оператор

$$f_\nu(x_n)\mathcal{B}_i(t,x',D_{x'},B_{x_n})$$

і перейдемо до границі при $x_n\to 0$ з урахуванням властивостей ядер Пуассона модельної задачі (16) і оцінок (21). У результаті отримаємо співвідношення

$$\begin{gathered}\lim_{x_n\to 0} f_\nu(x_n)\mathcal{B}_i(t,x',D_{x'},B_{x_n})V_j(t,x)=\delta_{ij}I^{\alpha_i}_{x'}\mu_j(t,x')+ \\ +\int\limits_0^\tau d\tau\int\limits_\Omega E_{ij}(t,\tau,x',\xi')\mu_j(\tau,\xi)d\xi',\end{gathered} \tag{22}$$

де

$$\begin{gathered}E_{ij}(t,\tau,x',\xi')\equiv[B^{(0)}_i(t,x',D_{x'},D^2_{x_n})-B^{(0)}_i(\tau,\xi',D_{x'},D^2_{x_n})]\times \\ \times G^{(\alpha_i)}_i(t-\tau,x'-\xi';\tau,\xi')+B^{(1)}_i(t,x',D_{x'},D^2_{x_n})G^{(\alpha_i)}_i(t-\tau,x'-\xi';\tau,\xi').\end{gathered}$$

Тепер розв'язок задачі (15) відшукуємо у вигляді

$$u_2(t,x)=\sum_{j=1}^{bN}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega \mathcal{E}_j(t,\tau,x,\xi')\mu_j(\tau,\xi')d\xi' \tag{23}$$

Задовольняючи крайову умову в (15), для визначення функцій $\mu_j(t,x')$ на основі (22) отримуємо систему інтегральних рівнянь Вольтера-Фредгольма першого роду

$$I^{(\alpha_i)}_{x'}\mu_i(t,x')=\tilde{g}_i(t,x')-\sum_{j=1}^{bN}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega E_{ij}(t,\tau,x',\xi')\mu_j(\tau,\xi')d\xi' \tag{24}$$

$$(i=\overline{1,bN})$$

Якщо виконуються умови $\underline{I}$ теореми, то покладемо $\alpha_i=(2b-r_i)/2b$, тобто $\varepsilon_i=0$ і згідно з умовою узгодження $\tilde{g}_i(0,x')=0$, $x'\in\Omega$, $\tilde{g}_i\in\in C^{(2b-r_i+\alpha)}(Q')$. При цьому береться до уваги співвідношення

$$\lim_{x_n\to 0} f_\nu(x_n)\mathcal{B}_i(t,x',D_{x'},B_{x_n})u_1(t,x)=$$
$$=\sum_{|k|+2j\le r_i} b_{kj}^{(i)}(t,x')D_{x'}^kD_{x_n}^{2j}v(t,x',0)\in C^{(2br_i+\alpha)}(Q').$$

З умов $b_{kj}^{(i)}\in C^{(2b-r_i+\alpha)}(Q')$ і оцінок функцій типу ядра Пуассона $G_i^{(\alpha_i)}$ випливає, що $E_{ij}\in C_{n-1+r_i-\alpha}^{(2b-r_i+\alpha)}(Q',Q')$. Якщо скористатись наслідком 6.2 [4] про дію оператора дробового диференціювання, то дістанемо, що $D_x^{\alpha_i}E_{ij}\in\in C_{n-1+2b-\alpha}^{(\alpha)}(Q',Q')$. Тому з (24) дією оператора $D_{x'}^{\alpha_i}$ на обидві частини отримуємо систему рівнянь другого роду

$$\mu_i(t,x')=D_{x'}^{\alpha_i}\tilde{g}_i(t,x')-\sum_{j=1}^{bN}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega D_{x'}^{\alpha_i}E_{ij}(t,\tau,x',\xi')\mu_j(\tau,\xi')d\xi' \tag{25}$$
$$(i=\overline{1,bN}).$$

Згідно з оцінками $u_1(t,x)$ і згаданим наслідком знаходимо, що

$$|D_{x'}^{\alpha_i}\tilde{g}_i(t,x')|_\alpha\le C\left(|\varphi|_{2b+1+\alpha}^{a,f_\nu}+|f|_{1+\alpha}^{a,f_\nu}+|g_i|_{2b-r_i+\alpha}\right), \tag{26}$$

а ядро системи $D_{x'}^{\alpha_i}E_{ij}$ задовольняє нерівність, яка гарантує існування резольвенти як рівняння з квазірегулярним ядром, причому виконується умова Гельдера по x'.

Ці властивості неоднорідностей і ядра системи інтегральних рівнянь (25) забезпечують існування розв'язку, який допускає оцінку

$$|\mu_i|_\alpha\le C\left(|\varphi|_{2b+1+\alpha}^{a,f_\nu}+|f|_{1+\alpha}^{a,f_\nu}+\sum_{j=1}^{bN}|g_j|_{2b-r_i+\alpha}\right). \tag{27}$$

Ця нерівність і властивості ядер Пуассона дозволяють оцінити похідні потенціалу (23)

$$|D_{x'}^kB_{x_n}^ju_2|\le C_{kj}x_n^{-2\nu}\left(|\varphi|_{2b+1+\alpha}^{a,f_\nu}+|f|_{1+\alpha}^{a,f_\nu}+\sum_{i=1}^{bN}|g_i|_{2b-r_i+\alpha}\right)e^{-a_0x_n^q}$$

$$(|k| + 2j \leq 2b)$$

та приріст старших похідних і отримати нерівність (5).

Якщо виконуються умови $\underline{\overline{II}}$ теореми, то покладаємо $\alpha_i = (2b - r_i - 1)/2b$, а розв'язок задачі (15) також відшукується у вигляді потенціалу (23). Однак, через відсутність умови узгодження для розв'язку задачі (1)-(3), дістанемо оцінку (6) тільки у відкритій області Ω.

Примітка. *Якщо коефіцієнт системи (1) не залежить від* x_n, *то розв'язок задачі (1)-(3) можна знайти у вигляді суми потенціалів*

$$u(t,x) = \int\limits_{\Omega^+} P_{\nu x_n}\mathcal{E}(t,0,x,\xi)S_{\nu x_n}\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega^+} P_{\nu x_n}\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)S_{\nu x_n}f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{bN} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega} P_{\nu x_n}\mathcal{E}_j(t,\tau,x,\xi')\mu_j(\tau,\xi')d\xi',$$

де $\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)$ *- функція Гріна відповідної однорідної регулярної крайової задачі, а* $\mathcal{E}_j$ *- ядра потенціалу, який є розв'язком регулярної крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами.*

1. *О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967. - 736 с.
2. *Загорский Т.Я.* Смешаные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. - М.: Наука, 1967. - 736 с.
3. *С.Д. Ивасишен* Матрицы Грина параболических задач. - К.: Вища школа, 1990. - 199 с.
4. *М.І. Матійчук* Параболічні сингулярні крайові задачі. - К.: Ін-т математики НАН України, 1999. - 176 с.
5. *С.Д.Эйдельман* Параболические системы. - М.: Наука, 1964. - 444 с.
6. *Reiko A.* On general bounary value problem for parabolic equations // I.Math.Kyoto Univ. - 1964. 4, № 1. - C. 207-243.

Кафедра диференціальних рівнянь
Чернівецького національного університету
ім.Ю.Федьковича
вул. Коцюбинського 2,
58012, м. Чернівці, Україна

Отримано 27.08.07